

模式竞争与压缩现象

刘 正 东
(江西师范大学物理系)

提 要

双模激发将使场趋近初始相干态,此时场的某一正交分量的压缩变浅。讨论了加深压缩的一种可能性并举了级联单模情况为例。

关键词: 模式竞争; 压缩; 复振幅算符; 相干态; 一阶关联函数。

光的压缩态是电磁场的一种量子化状态^[1],在此态中场的某个正交分量具有比相干态更小的量子起伏,因而在光通信,精密计量等方面有潜在而重要的应用前景^[2]。

单模相干场与二能级原子相互作用的“J-O”模型中的压缩,有一较浅的压缩($(\Delta I_1)^2 \approx 0.20$)^[3]。

在三能级原子与两个腔模场的相互作用中,由于条件参量的增多(如 \bar{n}_i, λ_i ,原子结构),将使问题复杂化;同时,双模问题中存在着模式竞争^[4-6];研究这些条件下的压缩现象并与文献[3]相比较无疑是有意义的。

取光学腔中上能级型三能级原子(“ \wedge ”型跃迁结构)为例;初始时刻,原子处于激发态,两个腔模场各处于相干态 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$,且分别具有平均光子数 $\bar{n}_1 = |\alpha|^2$ 和 $\bar{n}_2 = |\beta|^2$,此时若 $\bar{n}_1 = \bar{n}_2$,则两个腔模场处于平等的地位,存在的模式竞争在物理表现上是明显的。

取旋波近似及共振条件,在相互作用表象中其哈密顿量为^[4]:

$$\hat{H}_I = \lambda_1(\hat{S}_{12}\hat{a}_1 + \hat{S}_{21}\hat{a}_1^\dagger) + \lambda_2(\hat{S}_{13}\hat{a}_2 + \hat{S}_{31}\hat{a}_2^\dagger),$$

其中 λ_i 为模之场与原子的耦合系数, $\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i$ 为模*i*场的产生和湮灭算符。 \hat{S}_{ij} 可表为 3×3 的矩阵,其矩阵元

$$(\hat{S}_{ij})_{kl} = \delta_{ij}\delta_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (a)$$

它们造成 $U(3)$ 群的生成元,并满足下列对易关系:

$$[\hat{S}_{ij}, \hat{S}_{mn}] = \hat{S}_{in}\delta_{jm} - \hat{S}_{jm}\delta_{in}, \quad [\hat{S}_{ij}, \hat{a}_k] = [\hat{S}_{ij}, \hat{a}_k^\dagger] = 0, \quad (b)$$

则场的密度算符为:

$$\begin{aligned} \rho_f(t) &= Tr_{atom} \hat{U}(t, 0) \begin{pmatrix} \rho_f(0) & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \hat{U}^\dagger(t, 0) \\ &= \cos \sqrt{\hat{\mu}} t + \beta_1(0) \cos \sqrt{\hat{\mu}} t + \lambda_2 \hat{a}_1^\dagger \frac{\sin \hat{\mu} t}{\sqrt{\hat{\mu}}} \rho_f(0) \lambda_1 \frac{\sin \sqrt{\hat{\mu}} t}{\sqrt{\hat{\mu}}} \hat{a}_1 \\ &\quad + \lambda_2 \hat{a}_2^\dagger \frac{\sin \sqrt{\hat{\mu}} t}{\sqrt{\hat{\mu}}} \beta_1(0) \lambda_2 \frac{\sin \sqrt{\hat{\mu}} t}{\sqrt{\hat{\mu}}} \hat{a}_2, \end{aligned} \quad (1)$$

其中,时间平移算符

$$\hat{U}(t, 0) = \exp[-i\hat{H}_I t], \quad (2)$$

$$\hat{\rho}_f(0) = \sum_{m_1, m_1', m_2, m_2'} e^{-|\alpha|^2 - |\beta|^2} \alpha^{m_1} \alpha^{m_1'} \beta^{m_2} \beta^{m_2'} (m_1! m_1'! m_2! m_2'!)^{-\frac{1}{2}} |m_1 m_2\rangle \langle m_1' m_2'|, \quad (3)$$

$$\hat{\mu} = \lambda_1^2 \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger + \lambda_2^2 \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger. \quad (4)$$

(4)式显示双模场已通过原子耦合而具有整体效应, 另外, λ_i 在式中为一权重因子且具有复杂的非线性影响。

密度矩阵的矩阵元在粒子数表象中为:

$$\begin{aligned} \rho_{n_1 n_2; n_1' n_2'}(t) &= \langle n_1 n_2 | \hat{\rho}_f(t) | n_1' n_2' \rangle \\ &= \exp[-i(n_1 - n_1') \Omega_1 t] \exp[-i(n_2 - n_2') \Omega_2 t] \exp[-|\alpha|^2 - |\beta|^2] \\ &\quad \times \alpha^{n_1 - 1} \alpha^{n_1' - 1} \beta^{n_2 - 1} \beta^{n_2' - 1} (n_1! n_1'! n_2! n_2'!)^{\frac{1}{2}} \left[|\alpha|^2 |\beta|^2 \cos \sqrt{\mu_1} t \cos \sqrt{\mu_2} t \right. \\ &\quad \left. + |\beta|^2 \lambda_1^2 n_1 n_1' \frac{\sin \sqrt{\mu_2} t}{\sqrt{\mu_2}} \frac{\sin \sqrt{\mu_2'} t}{\sqrt{\mu_2'}} + |\alpha|^2 \lambda_2^2 \frac{\sin \sqrt{\mu_3} t}{\sqrt{\mu_3}} \frac{\sin \sqrt{\mu_3'} t}{\sqrt{\mu_3'}} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \lambda_1^2 (n_1 + 1) + \lambda_2^2 (n_2 + 1), \quad \mu_1' = \lambda_1^2 (n_1' + 1) + \lambda_2^2 (n_2' + 1), \\ \mu_2 &= \lambda_1^2 n_1 + \lambda_2^2 (n_2 + 1), \quad \mu_2' = \lambda_1^2 n_1' + \lambda_2^2 (n_2' + 1), \\ \mu_3 &= \lambda_1^2 (n_1 + 1) + \lambda_2^2 n_2, \quad \mu_3' = \lambda_1^2 (n_1' + 1) + \lambda_2^2 n_2', \\ \alpha &= |\alpha| e^{i\varphi}, \quad \beta = |\beta| e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

ψ, φ 为 α, β 的相角, 以下讨论中均取 $\psi = 0, \rho = 0^{(2)}$ 。两个腔模的频率分别为 Ω_1 和 Ω_2 。

引入复振幅算符 \hat{d}_1^I 和 \hat{d}_1^{II} , 它们在相互作用表象中被定义为

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_1 &= \hat{d}_1^I + i\hat{d}_1^{II}, \\ \hat{a}_1^\dagger &= \hat{d}_1^I - i\hat{d}_1^{II}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

构成 \hat{a}_1 的实部虚部, 则

$$\left. \begin{aligned} \hat{d}_1^I &= \frac{1}{2} (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) \\ \hat{d}_1^{II} &= \frac{1}{2i} (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

若定义算符

$$\hat{d} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 + \hat{a}_2), \quad \hat{d}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2^\dagger). \quad (8)$$

并取

$$\hat{d}_1 = \frac{1}{2} (\hat{d} + \hat{d}^\dagger), \quad \hat{d}_2 = \frac{1}{2i} (\hat{d} - \hat{d}^\dagger), \quad (9)$$

则按(9)式讨论的压缩, 实际上是两个腔模各按(7)式之方案求压缩后的算术平均值, 再计入两个模的交叉项的影响, 数值分析已表明交叉项并不导致深压缩; 而且为方便地寻找场的压缩与相干之间的关系, 本文仅按(7)式之定义讨论。

由 $[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = 1$, 有对易关系 $[\hat{d}_1^I, \hat{d}_1^{II}] = \frac{i}{2}$, 且相应的测不准关系为: $\Delta d_1^I \Delta d_1^{II} \geq \frac{1}{4}$, 如果场在某态中有关系式 $(\Delta d_1^I)^2 < \frac{1}{4}$ 或 $(\Delta d_1^{II})^2 < \frac{1}{4}$ 成立, 则称此态为压缩态。

$$\begin{aligned} (\Delta d_1^I)^2 &= \langle (\hat{d}_1^I - \langle \hat{d}_1^I \rangle)^2 \rangle \\ &= \frac{1}{4} (2\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle + 1 + \langle \hat{a}_1^\dagger \rangle + \langle \hat{a}_1 \rangle) - \frac{1}{4} \langle \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger \rangle^2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta a_1^{\dagger})^2 &= \langle (\hat{a}_1^{\dagger} - \langle \hat{a}_1^{\dagger} \rangle)^2 \rangle \\
 &= \frac{1}{4} (2\langle \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 \rangle + 1 - \langle \hat{a}_1^{\dagger} \rangle - \langle \hat{a}_1 \rangle) + \frac{1}{4} \langle \hat{a}_1 - \hat{a}_1^{\dagger} \rangle^2. \quad (11)
 \end{aligned}$$

利用(5)式,复振幅算符的方差(10)、(11)两式可借助数值求和来分析。

图1中取 $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 4$, 有相当微弱的压缩出现,且比文献[3]中对应的 $\bar{n} = 4$ 时的压缩要浅。两个腔模场在模式竞争中的地位相当,并且双模激发将使场趋近于初始的相干状态^[7],故场的压缩与相干以及模式竞争间有一定关系。

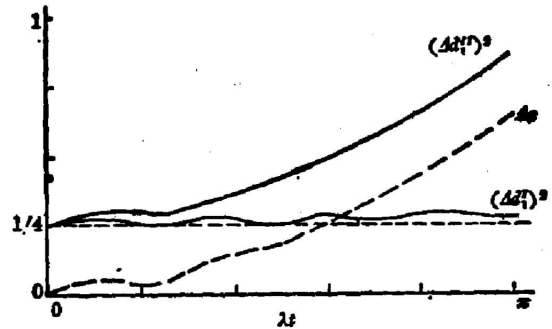


Fig. 1 $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 4, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

场的光学相干可以用场的一阶关联函数的因式分解式 $\langle \hat{E}_t^- \hat{E}_t^+ \rangle = \langle \hat{E}_t^- \rangle \langle \hat{E}_t^+ \rangle$ 来定义^[8],其中 \hat{E}^- 和 \hat{E}^+ 分别是电场算符 \hat{E} 的负频和正频部分,即 $\hat{E} = \hat{E}^- + \hat{E}^+$ 。在原子与场相互作用的动力学行为中,该式成立时的“时间” λt 相当短暂,为扩大讨论起见,我们谨定义一个辐射场对相干态的偏离量: $\Delta E_t = \langle \hat{E}_t^- \hat{E}_t^+ \rangle - \langle \hat{E}_t^- \rangle \langle \hat{E}_t^+ \rangle$,进一步无量纲化: $\Delta c_t = \frac{\Delta E_t}{g_1^2} = \langle \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 \rangle - \langle \hat{a}_1^{\dagger} \rangle \langle \hat{a}_1 \rangle$ 。并在图中作入 $\Delta c = \langle \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 \rangle - \langle \hat{a}_1^{\dagger} \rangle \langle \hat{a}_1 \rangle$ 以反映模1辐射场对初始相干态的偏离程度。

增大模2初始激发场的强度,将使模1场在模式竞争中处于劣势,而与原子的相互作用更加减弱,则模1场能在一段时间近似地保持初始时的统计性质,而压缩减弱乃至消失(图2)。

欲改善模1场在竞争中的地位,或者减弱模2初始场的强度;或者增大模1初始场的强

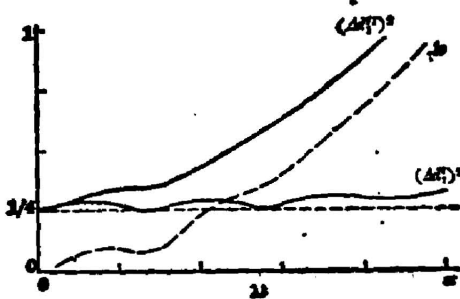


Fig. 2 $\bar{n}_1 = 4, \bar{n}_2 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

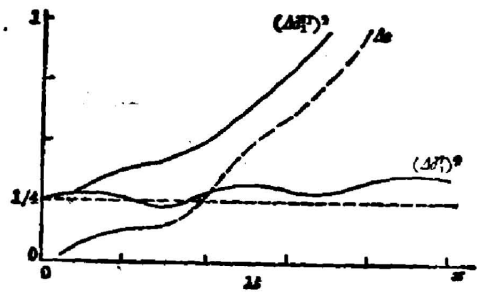


Fig. 3 $\bar{n}_1 = 4, \bar{n}_2 = 10, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

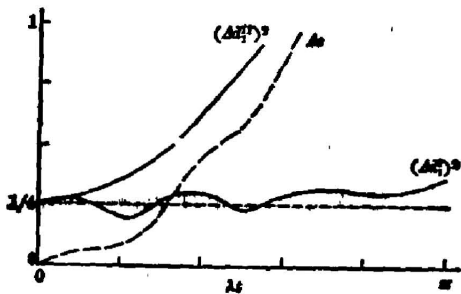


Fig. 4 $\bar{n}_1 = 10, \bar{n}_2 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

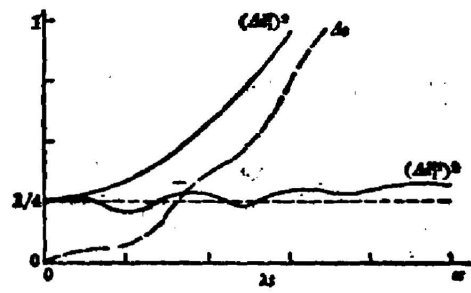


Fig. 5 $\bar{n}_1 = 10, \bar{n}_2 = 1, \lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \frac{\lambda}{2}$

度;或者相对减弱模 2 腔场与原子的耦合程度。图 3~5 显示了当这些条件逐步叠加时,模 1 场与原子的相互作用逐步增强,场的统计性质逐渐迅速畸变而偏离初始相干态,压缩则逐步加深。

注意到图 3~5 中的压缩仍然比文献[3]中的要浅,这从另一侧面证明了邻模的竞争作用,对本模的压缩加深总是不利的。其他结构的三能级原子与双模场作用中均存在模式竞争问题,这里不再赘述。

由此可以推论,在三能级问题中若二对能级间的跃迁均与单模腔场共振,此时该场与原子的相互作用极强,不仅无模式竞争而且还存在受激的同模式双光子过程,应有深压缩出现。

以级联型三能级原子与单模相干场的相互作用为例。设原子的上、中、下能级为 $|a\rangle$ 、 $|b\rangle$ 及 $|c\rangle$, $|a\rangle$ 与 $|b\rangle$ 及 $|b\rangle$ 与 $|c\rangle$ 之间的跃迁均与频率为 Ω 的单模腔场相联系且 $\Omega = \omega_a - \omega_b = \omega_b - \omega_c$, 这里 ω_a 、 ω_b 和 ω_c 为原子能级对应频率。在相互作用表象中其哈密顿量为:

$$\hat{H}_I = (\lambda_1 \hat{A}_a^+ \hat{A}_b + \lambda_2 \hat{A}_b^+ \hat{A}_c) \hat{a} + H \cdot O,$$

其中 \hat{A}_η^+ 和 \hat{A}_η 分别为能态 $|\eta\rangle$ ($\eta = a, b, c$) 的产生和湮灭算符。

Schrödinger 方程为: $i|\dot{\psi}(t)\rangle = \hat{H}_I |\psi(t)\rangle$, 其中

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} (a_m(t) |a, m\rangle + b_{m+1}(t) |b, m+1\rangle + c_{m+2}(t) |c, m+2\rangle), \quad (12)$$

$$|\psi(0)\rangle = |a, \alpha\rangle, \quad (13)$$

即原子处于初始激发态 $|a\rangle$, 场处于初始相干态。

解(12), (13)式求得 $a_m(t)$, $b_{m+1}(t)$ 和 $c_{m+2}(t)$ 则即求得态矢量 $|\psi(t)\rangle$ 。原子—场系统的密度算符可表为 $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ 。可求得在粒子数表象中场密度矩阵的矩阵元为:

$$\begin{aligned} \rho_{m'm} = & \exp[-i(n-n')\Omega t] \exp[-|\alpha|^2] \alpha^{n-2} \alpha^{m'-2} (n!n')^{-\frac{1}{2}} \\ & \times \left[|\alpha|^4 \frac{\lambda_2^2(n+2) + \lambda_1^2(n+1)\cos\nu_1 t}{\nu_1^2} \cdot \frac{\lambda_2^2(n'+2) + \lambda_1^2(n'+1)\cos\nu_1 t}{\nu_1'^2} \right. \\ & \left. + |\alpha|^2 \lambda_2^2 m' \frac{\sin\nu_2 t}{\nu_2} \cdot \frac{\sin\nu_2' t}{\nu_2'} + \lambda_1^2 \lambda_2^2 n(n-1)n'(n'-1) \frac{\cos\nu_3 t - 1}{\nu_3} \cdot \frac{\cos\nu_3' t - 1}{\nu_3'} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad \nu_1 &= [\lambda_1^2(n+1) + \lambda_2^2(n+2)]^{\frac{1}{2}}, \quad \nu_1' = [\lambda_1^2(n'+1) + \lambda_2^2(n'+2)]^{\frac{1}{2}}, \\ \nu_2 &= [\lambda_1^2 n + \lambda_2^2(n+1)]^{\frac{1}{2}}, \quad \nu_2' = [\lambda_1^2 n' + \lambda_2^2(n'+1)]^{\frac{1}{2}}, \\ \nu_3 &= [\lambda_1^2(n-1) + \lambda_2^2 n]^{\frac{1}{2}}, \quad \nu_3' = [\lambda_1^2(n'-1) + \lambda_2^2 n']^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

同样在相互作用表象中定义复振幅算符:

$$\hat{d}^{\dagger} = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}), \quad \hat{d}^{\text{II}} = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^{\dagger}),$$

其中 \hat{a}^{\dagger} 、 \hat{a} 为单模场的产生、湮灭算符。(10)、(11)式以及对易关系,测不准关系和压缩态关系式中取消下标 1 后尽皆成立而适用于此。

图 6 依此而作,出现了所预期的超过文献[3]及图 1~5 的较深压缩 ($(\Delta d^{\text{I}})^2 \approx 0.173$)。证明了场与原子相互作用越强,其压缩程度越深的推论。注意到在平均光子数由 4 至 20 这

样一个较大范围内,单模场均达到或超过文献 [3] 中的最深压缩 0.20。

破坏这种强烈的同模式双光子过程,最简单的方法是取 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 此时两对能级间的跃迁与单模腔场的耦合不对称,而使双光子现象含有弛豫过程或减弱。无论是 $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \frac{\lambda}{2}$ 或 $\lambda_1 = \frac{\lambda}{2}, \lambda_2 = \lambda$ 这两种简单情况中,数值分析都表明 $(\Delta I^I)_{\min}^2$ 上升为 0.208。可以预言,在有强烈的同模式三光子过程的级联四能级单模共振模型中,将会存在更深的压缩。

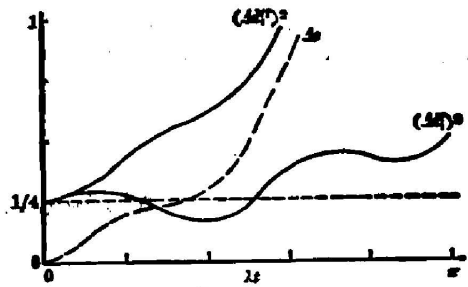


Fig. 6 $\bar{n}=6, \lambda_1=\lambda_2=\lambda$

注意到压缩出现时 Δc 曲线均向下凹,即此时受激辐射场处于偏离相干态后,又重新趋近相干态的过程。

图例还显示:走向不致相同的 $(\Delta I^I)^2$ 曲线与 Δc 曲线间的距离在压缩出现时增大。注意到两个共轭分量在满足测不准关系的条件下,以某一正交分量的均方涨落扩大为代价,另一正交分量的均方涨落缩小而取得压缩。在 $\lambda t = 0$ 时模 1 场(或单模场)处于相干态,而 $\Delta c = 0$ 且 $(\Delta I^I)^2 = (\Delta I^{II})^2 = \frac{1}{4}$, 即当 $(\Delta I^I)^2 - \Delta c = \frac{1}{4}$ 时有 $(\Delta I^I)^2 = \frac{1}{4}$; 故当 $(\Delta I^I)^2 - \Delta c > \frac{1}{4}$ 时,我们可观察 $(\Delta I^I)^2$ 之变化,结果是 $(\Delta I^I)^2$ 达到非经典值($< \frac{1}{4}$)而出现压缩。

事实上,由(10)、(11)式有

$$(\Delta I^I)^2 + (\Delta I^{II})^2 = \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle + \frac{1}{2} - \langle \hat{a}_1^\dagger \rangle \langle \hat{a}_1 \rangle = \frac{1}{2} + \Delta c, \quad (15)$$

$$(\Delta I^I)^2 - \frac{1}{4} = - \left[(\Delta I^{II})^2 - \Delta c - \frac{1}{4} \right], \quad (16)$$

即 $(\Delta I^I)^2$ 曲线与 $(\Delta I^{II})^2 - \Delta c$ 曲线以 $\frac{1}{4}$ 水平线为镜像对称轴(为避免画面繁杂各图例均未描入后者)。

本文所讨论的压缩与相干之间有一确定的解析关系。

注 1: \hat{S}_u 为原子投影算符,当取 $|a\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $|b\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $|c\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 时,有(a)、(b)式

注 2:

$$\begin{aligned} (\Delta I^I)^2 + (\Delta I^{II})^2 &= \frac{1}{4} (2\langle a^\dagger a \rangle + 1 + \langle a^{+2} \rangle) + \frac{1}{4} (\langle a \rangle^2 + 2\langle a \rangle \langle a^\dagger \rangle + \langle a^{+2} \rangle) \\ &\quad + \frac{1}{4} (2\langle a^\dagger a \rangle + 1 - \langle a^2 \rangle - \langle a^{+2} \rangle) + \frac{1}{4} (\langle a \rangle^2 - 2\langle a \rangle \langle a^\dagger \rangle + \langle a^{+2} \rangle) \\ &= \langle n \rangle + \frac{1}{2} - \langle a \rangle \langle a^\dagger \rangle - \Delta c + \frac{1}{2}, \text{ 即为(15)式。} \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] D. F. Walls and P. Zoller; *Phys. Rev. Lett.*, 1981, 47, No. 10 (Sep), 709~711.
 [2] C. M. Caves; *Phys. Rev. (D)*, 1981, 23, No. 8 (Apr), 1693~1708.
 [3] P. Meystre and M. S. Zubairy; *Phys. Lett. (A)*, 1982, 89, No. 8 (Jun), 390~392.

- [4] X. S. Li and N. Y. Bai; *Phys. Lett. (A)*, 1984, **101**, No. 3 (Mar), 169~174.
[5] 李孝申;《物理学报》, 1985, **34**, No. 6 (June), 833~840.
[6] X. S. Li and Y. N. Peng; *Phys. Rev. (A)*, 1985, **32**, No. 3 (Sep), 1501~1514.
[7] X. S. Li and C. D. Guog; *Phys. Rev. (A)*, 1986, **33**, No. 4 (Apr) 2801~2804.
[8] F. W. Cummings; *Phys. Rev. (A)*, 1965, **140**, No. 4A (Nov), 1051~1056.

Mode competition and squeezing

LIU ZHENG DONG

(Department of Physics, Jiangxi Normal University)

(Received 27 November 1986; revised 23 March 1987)

Abstract

Double stimulation will cause the field to approach its initial coherent state and make its squeezing weak. There is deeper squeezing in the case of a three level cascade atom excited by one-mode field.

Key words: mode-competition; squeezing; hermitian amplitude operator; coherent state; first-order correlation function.