

光 波 导 等 参 元 分 析

姚慧海 陈智浩

(上海科技大学现代光纤通讯研究所)

提 要

本文提出一套用于分析任意介质光波导的等参元算法,它基于严格的 E_z-H_z 变分公式,采用八节点曲边四边形单元。这种类型的等参元分析法尤其适用于研究各种具有曲边边界的复杂光波导和光波导器件。作为例子,文中把这一方法用于分析阶跃型光纤、渐变型光纤、各向同性以及各向异性光纤耦合器。

关键词: 光波导, 等参元分析法, 光纤耦合器。

一、引 言

八十年代以来,出现了各种各样复杂的光波导结构(均匀与非均匀,各向同性与各向异性结构等),精确求解这些复杂光波导的电磁场边值问题,变得越来越重要。任意光波导的复杂性通常难以得到精确的解析解,需要采用数值方法。早在1975年 Yeh 等人^[1]就提出有限元法其通用性和精确性是其它方法所难以比拟的。

有限元法就是从变分原理出发,通过分区插值,把二次泛函的极值问题转化为一组多元线性代数方程来求解。本文作者首先从麦克斯韦方程出发,推导了三种形式不同的严格的 E_z-H_z 变分公式,其中二种是我们推导的。然后作有限元近似,把场域用一个个单元离散。文献[1]用的是线性单元,文献[2]则用高阶插值多项式。这些单元只适合于三角形或矩形等直边光波导,不能比较理想地拟合复杂的曲边边界,如光纤以及由光纤构成的器件。为了

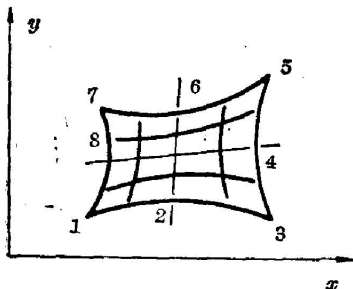


Fig. 1. Eight-node curve-sided quadrilateral element

以较少的单元得到较高的精度和比较理想地拟合复杂的曲边边界,可以选择等参数单元(简称等参元)。等参数单元对任意形状光波导可作出严密的近似,大大减小了模拟几何形状而产生的误差,从而不需要在边界上使用细小的网格来减小误差。不论是从计算经济性还是从结果精度来看,二次等参元被认为是比较理想的。最近文献[3]报导了六点曲边三角单元在光波导中的应用。本文作者采用了图1所示的八节点曲边四边形等参元,这种精巧的单元以前还没有用于光波导研究。文中还对阶

跃型光纤,渐变型光纤,光纤耦合器(包括各向同性与各向异性)等进行了分析。

二、基本 原 理

1. E_z-H_z 变分公式

收稿日期: 1986年9月8日; 收到修改稿日期: 1986年11月27日

考虑任意介质光波导,如图 2 所示。其中 n_x, n_y, n_z 是光波导主轴折射率。假定电磁场随时间变化形式为 $\exp(i\omega t)$, 则无源麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon_0[n^2]\mathbf{E}, \quad (2)$$

式中 ω 是角频率, ϵ_0, μ_0 分别是真空中介电常数和磁导率。 $[n^2]$ 是主折射率张量, 其矩阵形式为

$$[n^2] = \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

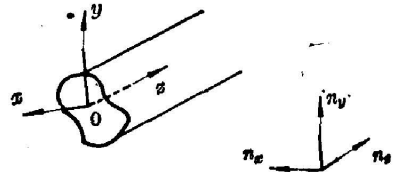


Fig. 2 Arbitrary optical waveguide

由麦克斯韦方程出发, 导出了三种形式不同的严格的 E_z-H_z 变分表述

$$F = \iint \left\{ \tau_{yy} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \tau_{yx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + w_x \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + w_y \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + Q_x \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - Q_y \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \Gamma (\phi^2 + \bar{\beta}^2 n_z^2 \psi^2) \right\} ds, \quad (4)$$

$$Q_x = \begin{cases} 2\bar{\beta}^2 \tau_{yx}, & \text{对形式 1} \\ 2n_x^2 \tau_{yx}, & \text{对形式 2} \\ (\bar{\beta}^2 + n_x^2) \tau_{yx}, & \text{对形式 3} \end{cases}$$

$$Q_y = \begin{cases} 2\bar{\beta}^2 \tau_{xy}, & \text{对形式 1} \\ 2n_y^2 \tau_{xy}, & \text{对形式 2} \\ (\bar{\beta}^2 + n_y^2) \tau_{xy}, & \text{对形式 3} \end{cases}$$

式中: $\beta, \bar{\beta} = (\beta/k)$ 分别为传播常数和归一化传播常数; $k = (\omega/c)$ 为真空中波数; c 为真空中光速; $\phi = H_z$ 为纵向磁场; $\psi = \beta^{-1}(\epsilon_0/\mu_0)^{1/2}E_z$ 为纵向电场; $\Gamma = k^2(1 - \bar{\beta}^2)$, $\tau_{yx} = [(\bar{\beta}^2 - 1)/(\bar{\beta}^2 - n_x^2)]$, $\tau_{xy} = [(\bar{\beta}^2 - 1)/(\bar{\beta}^2 - n_y^2)]$, $w_x = \bar{\beta}^2 \tau_{yx} n_x^2$, $w_y = \bar{\beta}^2 \tau_{xy} n_y^2$ 。形式 1 是文献 [2] 的结果, 形式 2, 3 是我们推导的结果。泛函 (4) 式的自然边界条件就是光波导的电磁场边界条件。

2. 有限元公式

把场域用图 1 所示八节点曲边四边形等参元离散。在每个单元上构造插值函数, 单元 e 中任意点处的场强 $\phi^e(x, y)$, $\psi^e(x, y)$ 用单元节点处场强表示为

$$\phi^e(x, y) = \sum_{j=1}^8 N_j \phi_j, \quad \psi^e(x, y) = \sum_{j=1}^8 N_j \psi_j, \quad (5)$$

式中 N_j 是单元形状函数, 其值为^[4]

$$N_i(\xi, \eta) = \begin{cases} (1/4)(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1), & i=1, 3, 5, 7 \\ (1/2)(1 - \xi^2)(1 + \eta_0), & \xi_i=0 \quad i=2, 6 \\ (1/2)(1 + \xi_0)(1 - \eta^2), & \eta_i=0 \quad i=4, 8 \end{cases} \quad (6)$$

$$\xi_0 = \xi \xi_i, \quad \eta_0 = \eta \eta_i, \quad (7)$$

式中 ξ, η 表示单元局部坐标, ξ_i, η_i 表示单元节点 i 的局部坐标, 其可用行矩阵表示成

$$\begin{Bmatrix} [\xi_i]^T = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_8] = [-1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1], \\ [\eta_i]^T = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_8] = [-1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0]. \end{Bmatrix} \quad (8)$$

经有限元离散后, 总能量泛函就离散为

$$F = X^T A X - \Gamma X^T B X, \quad (9)$$

于是变分问题就转化为多元函数的极值问题。根据泛函的稳定性质, 经过求导便可得到有限元方程为

$$A X = \Gamma B X, \quad (10)$$

式中: A 是对称、稀疏、带状矩阵; B 是对称、正定、稀疏、带状矩阵; X 是由节点场强组成的列阵。

3. 算法

经过有限元离散后, 原来光波导电磁场的特征值问题就变成由有限元方程(10)式所描述的广义特征值问题。由于场延伸到无穷远, 这给矩阵 A 、 B 的形成带来困难。解决这个难题有三种方法^[2]。本文采用在足够远的地方强加虚边界($E_z = H_z = 0$)条件的方法。(10)式求解用广义 Givens 法(二分法)。不把方程(10)变换到标准特征值问题, 而直接判别由 $|A_r - \Gamma B_r|$, ($r=0, 1, 2, \dots, 2n$) 构成的 Sturm 序列的符号, 用二分法隔离根, 然后用迭代求场值同时用瑞利商使特征值精确化。数值积分用高斯求积法, 在高斯点处输出场强值, 用线性插值法计算等位线。遗憾的是, 这种矢量波有限元方法在计算结果中会出现假模式。在计算高阶模时要区别非物理模与物理模的确非常难, 但对于最低阶的几个模式, 可通过观察场形, 等位线、色散曲线等以判别物理模与非物理模。因为通常物理模是简单的正弦振荡和指数曲线, 等位线很光滑; 而非物理模则不是这样。在泛函(4)式中, 当 $\beta = n_x$ 时, $\tau_{yx} \rightarrow \infty$ 或 $\beta = n_y$ 时, $\tau_{xy} \rightarrow \infty$, 所以在计算中应避开这些奇点。

三、例 子

1. 阶跃型光纤

对于各向同性光纤, 泛函(4)式可进一步简化, 只要令 $n_x = n_y = n_z$ 即可。阶跃型光纤的折射率剖面如图 3 所示, 已有许多光波导著作详细讨论了这种光纤的严格解析解。作为例子, 我们选择芯层折射率 $n_1 = 1.50$, 包层折射率 $n_2 = 1.0$ 。根据电磁场对称性, 只需考虑四分之一的场域, 从而大大减小了计算量和所需的计算机内存容量。采用上面分析的等参元有限元方法, 按图 4 所示方式剖分, 总共用 68 个单元、255 个节点离散这四分之一场域。

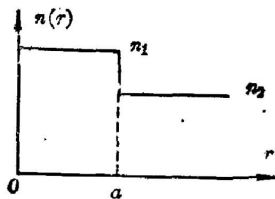


Fig 3 Profile of the step index fiber

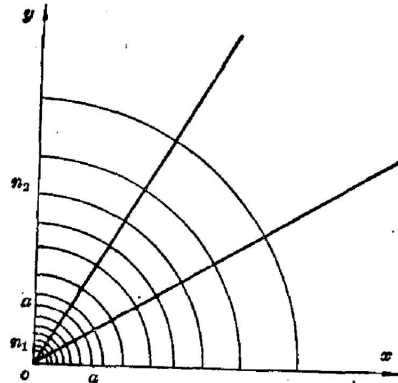


Fig. 4 Discretized cross section of optical fiber

上节分析中已提到, 采用在足够远的地方强加虚边界条件的方法可以把无界问题化为有界问题来处理。通过计算证实, 当虚边界 ($E_z = H_z = 0$) 的位置选取在 $(R/a) = 30$ 和 $(R/a) = 55$ 处时, 所得的计算结果几乎相同。其中 $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, a 是纤芯半径。即当 $(R/a) \geq 30$ 时, 虚边界位置对计算结果的影响可以忽略不计。

表 1 给出了阶跃型光纤 HE_{11} 模的有限元计算结果, 表中 I、II、III 分别相应于由三种不同的 $E_z - H_z$ 变分公式所求出的结果。由此可见, 对不同形式的泛函, 所求得的归一化频率的值在小数点后第四、五位才有区别, 因而三种形式之间的相对误差仅为 $10^{-6} \sim 10^{-5}$ 数量级。在实际计算中, 可用这三种形式变分公式中的任一形式。由表 1 也可看出, 等参元结果与精确解相比, 相对误差大约是 10^{-3} 数量级。

Table 1 Comparison of computed results from three functional forms

$\bar{\beta}$	ka				error
	from I	from II	from III	precision solution	
1.10	1.503080	1.503074	1.503078	1.510383	4.8×10^{-3}
1.35	3.019324	3.019175	3.019187	3.028590	3.0×10^{-3}
1.48	9.244424	9.244414	9.244492	9.222240	2.4×10^{-3}

图 5 是阶跃型光纤的色散特性曲线, 图 6 是纵向磁场 H_z 等位线图, 其中相邻等位线之间位差 ΔH_z 相等。等位线越靠外, 其数值越小。因而图 6 中 b 等位线 H_z 的数值比 a 等位线的 H_z 数值大 $2\Delta H_z^*$ 。

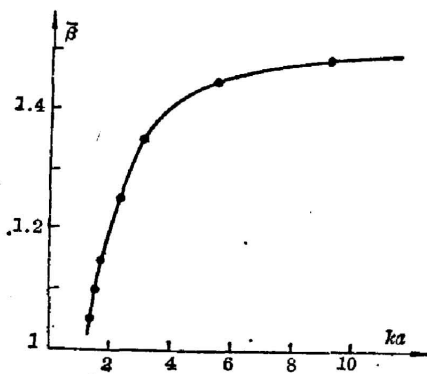


Fig. 5 Dispersion characteristics of HE_{11} mode of step index fiber

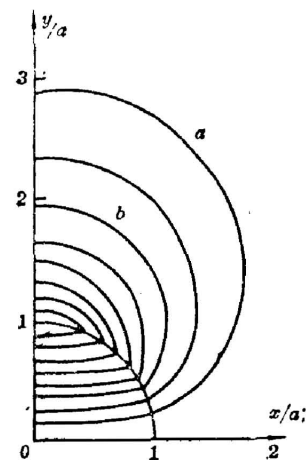


Fig. 6 Field plot of HE_{11} mode in step-index fiber (H_z field) with $\bar{\beta} = 1.10$

2. 渐变型光纤

对渐变型光纤而言, 至今尚无严格解。而只有许多近似法研究这种波导。本文将把等参元分析结果与预测校正法结果^[5]相比较。通常这种类型光纤都是圆对称的, 由于它是一维问题, 二维等参元分析实际上是不需要的, 这里的分析仅讨论等参元分析的精确性, 有效性。

* 本文各等位线图都具有这一性质。

为便于进行比较起见,采用文献[5]中的抛物型折射率剖面,且具体数值也一致,即光纤芯层中心折射率 $n_1=1.53$,包层折射率 $n_2=1.50$,包层外折射率 $n_3=1.0$,包层半径与芯层半径之比为 1.25。仍用 68 个单元,255 个节点离散四分之一场域。从图 7(a)、(b) 可见,等参元结果与预测校正法结果吻合很好。图 8 是纵向电场等位线图。通常我们还需知道电磁场幅度的大小,图 9 是纵向电场(E_z/E_m)与径向位置(r/a)的关系曲线,点线是等参元结果,实线是 $p-c$ 法结果。从图中可以看出,只需较少的单元,二者就符合得较好了。

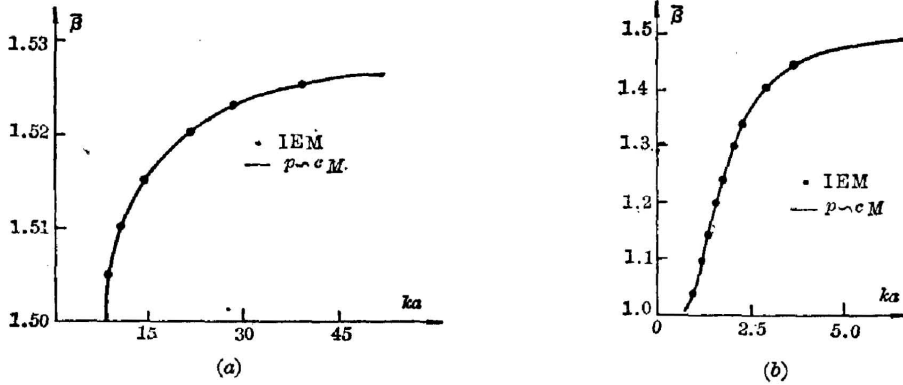


Fig. 7 Dispersion characteristics of HE_{11} mode in the fiber with parabolic index profile
a) core mode; b) cladding mode

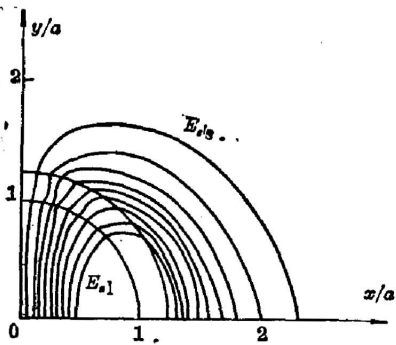


Fig. 8 Field plot of HE_{11} mode in parabolic-index fiber (E_z field) with $\bar{\beta}=1.30$

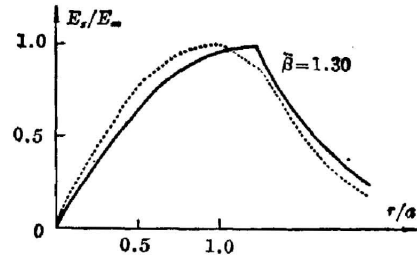


Fig. 9 E_z/E_m vs r/a of HE_{11} mode in parabolic-index fiber with $\bar{\beta}=1.30$

3. 光纤耦合器

首先考虑一个比较简单的单模光纤耦合器。在该耦合器中,二根折射率均为 n_1 的纤芯互相接触,被延伸到无穷远的折射率为 n_2 的媒质所包围。把光纤耦合器看作一个复合光波导,其中模式可分成四种,它们依赖于纵向电磁场的对称性。模式用符号 HE_{ij}^n , n 表示第 n 阶模,实际上我们只对 $n=1$ 的情形感兴趣。 i, j 分别是 e 和 m 的组合, i 位置表示在 x 轴上, j 则表示在 y 轴上。 e 表示电壁, m 表示磁壁。耦合效应是由复合光波导中模式的节拍现象产生的。

用 90 个单元 321 个节点离散场域,剖分方式如图 10 所示,取 $n_1=1.50085$, $n_2=1.50$, $\delta = [1 - (n_2/n_1)^2]$ 。 δ 的数量级为 10^{-3} ,可以认为 $\delta \rightarrow 0$ 。为了比较的目的,参数间作了换算。

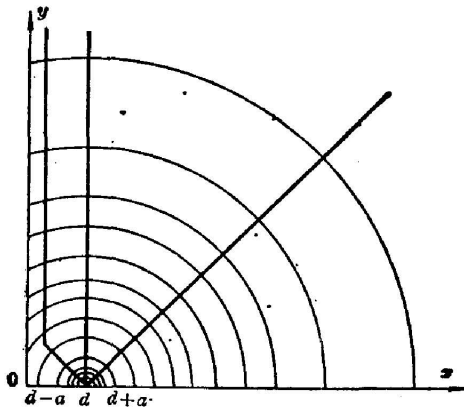


Fig. 10 Discretized cross section of fiber coupler

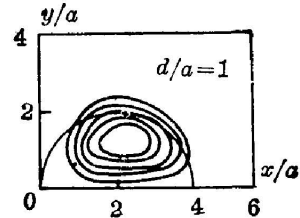


Fig. 11 Field plot of HE_1^{oe} mode in isotropic optical fiber coupler (E_z field) with $\bar{\beta}=1.50059$

对于 HE_1^{oe} 模*, 在 $V=3.5$ 处, $u=1.9282$, 其中

$$v = ka\sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \quad u = ka\sqrt{n_1^2 - \bar{\beta}^2}, \quad (11)$$

与用圆谐函数展开法^[6]算得的结果 $u=1.9341$ 比较, 相对误差为 3×10^{-3} 。图 11 是 $\bar{\beta}=1.50059$ 时 HE_1^{oe} 模纵向电场 E_z 等位线图, 图 12, 13 则是 $\bar{\beta}=1.5001$ 时 HE_1^{ms} 和 HE_1^{em} 模的纵向电场 E_z 等位线图。由图 6、8、11~13 可以形象地看出光纤与光纤耦合器中电磁场的分布。当 $\bar{\beta}$ 大时, 等位线比较集中在芯区, 即能量在芯区较多; 反之当 $\bar{\beta}$ 小时, 等位线延伸到包层较远的地方, 说明包层中有比较多的能量。

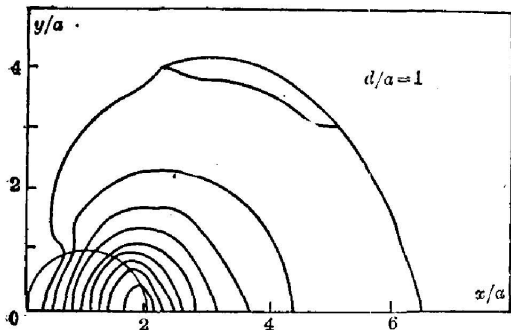


Fig. 12 Field plot of HE_1^{ms} mode in isotropic optical fiber coupler (E_z field) with $\bar{\beta}=1.5001$

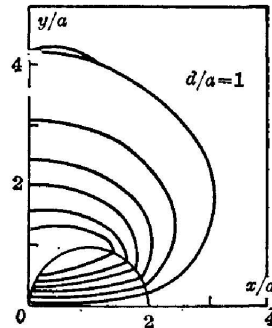


Fig. 13 Field plot of HE_1^{em} mode in isotropic fiber coupler (E_z field) with $\bar{\beta}=1.5001$

由图 12, 13 可见, 当二光纤纤芯互相接触时, 芯层中许多场延伸到耦合区, 场形已不同于孤立时单根光纤的场形, 因此基于孤立时单根光纤场的各种近似法将变得不再适用。

最后, 考虑如图 14 所示的各向异性光纤耦合器, 其中 $n_x = n_y$ 。这种类型耦合器可由高双折射光纤构成。选择芯层折射率 $n_{x1}=1.4585$, $n_{y1}=1.4579$, 芯层外面无限大包层的折射率 $n_{x2}=1.455$, $n_{y2}=1.4548$, 剖分方式与图 12 相同。为了求复合光波导耦合区传输模的色散关系, 归一化频率 ka 中的 a 就取为单根光纤的纤芯半径。图 15 是复合光波导最低阶四个模色散特性曲线, 其中 $(d/a)=4$ 。图 16(a)、(b) 分别是 $(d/a)=4$ 和 $(d/a)=2$ 时 HE_1^{ms}

* 即文献[6]中的 I_{π} 模。

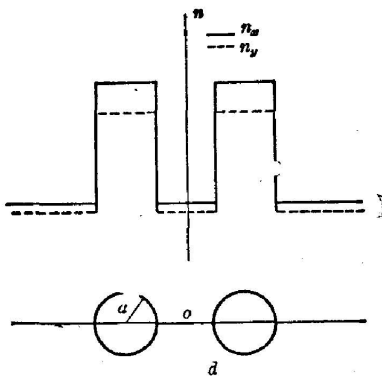


Fig. 14 Coupler structure and index-profile of anisotropic optical fiber

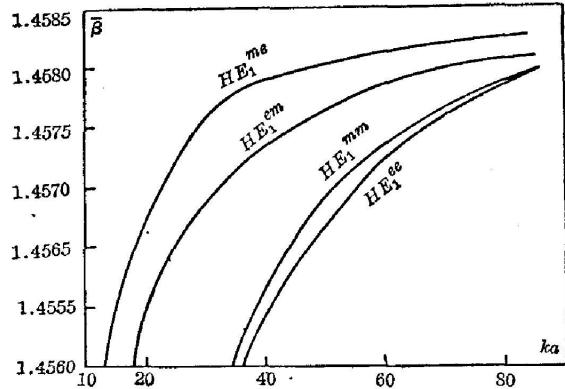


Fig. 15 Dispersion characteristics of the first four modes in anisotropic optical fiber coupler

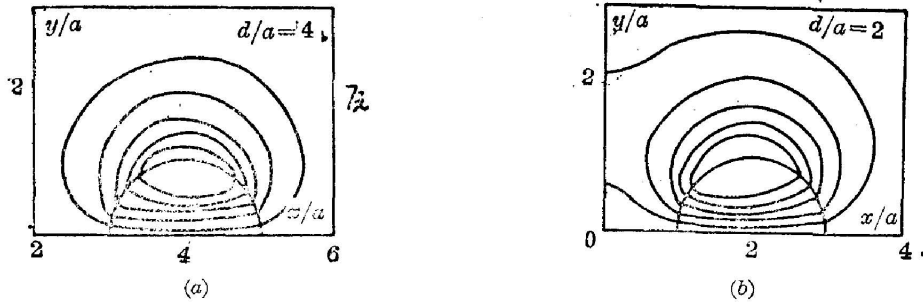


Fig. 16 Field plot of HE_{1m} mode in anisotropic optical fiber coupler (E_z field) with $\bar{\beta}=1.4555$
(a) for $d/a=4$ and (b) for $d/a=2$

模 E_z 的等线图 ($\bar{\beta}=1.4555$)。从图 16(a) 可见, $(d/a)=4$ 时, 二光纤纤芯之间距离较远, 场主要集中在芯层, 与孤立时单根光纤的场形极为相似。当 $(d/a)=2$ 时, 从图 16(b) 可见, 此时大部分场还是集中在芯层, 但也有部分场延伸到耦合区, 这描述了迟衰场之间的耦合。

四、结 论

本文用等参元方法分析了阶跃型光纤、渐变型光纤及光耦合器。结果表明, 等参元方法能以较少的单元得到较高的精度, 与其它各种精度较高的方法相比较, 相对误差为 10^{-8} 数量级。这种精度已能满足一般的工程设计计算。若需要更高的精度, 则可通过增加剖分单元的数目来达到。

本文描述的等参元法能精确求解任意截面形状的各向同性或各向异性光波导的传播特性场分布等。因此这一方法特别适用于研究各种解析法难以解决的复杂光波导问题以及研究由这些复杂光波导组成的器件的特性。

参 考 文 献

- [1] C. Yeh et al.; *J. Appl. Phys.*, 1975, **46**, No. 5 (May), 2125~2130.
[2] N. Mabaya et al.; *IEEE Trans Microwave Theory & Tech.*, 1981, **MTT-29**, No. 6 (Jun), 600~605.

- [3] D. Welt *et al.*; *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, 1985, **MTT-33**, No. 7 (Jul), 576~585.
[4] O. C. Zienkiewicz; *The Finite Element Method in Engineering Science* (New York, McGraw-Hill, 1971),
[5] G. L. Yip *et al.*: *Appl. Opt.*, 1982, **21**, No. 23 (Dec), 4308~4315.
[6] W. Wijngaard; *J. O. S. A.*, 1973, **63**, No. 8 (Aug), 944~950.

Isoparametric element analysis of optical waveguides

YAO HUIHAI AND CHEN ZHIHAO

(*Institute of Optical Fiber Communication, Shanghai University of Science and Technology*)

(Received 8 September 1986; revised 27 November 1986)

Abstract

An isoparametric element method for the analysis of arbitrary dielectric optical waveguides is described. This technique is based on the rigorous E_z-H_z variational formulation. The eight-node curve-sided quadrilateral element has been used. This type of isoparametric element is especially suited to the study of the complex optical waveguides and optical waveguide devices with curved boundaries. As numerical examples, the step-index fiber, the graded-index fiber, the isotropic fiber coupler and anisotropic fiber coupler have been studied in this paper.

Key Words: optical waveguide; isoparametric element method; fiber coupler.