

# 湍流大气中反射光束的扩展

冯岳忠 宋正芳

(中国科学院安徽光学精密机械研究所)

## 提 要

本文基于推广的惠更斯-菲涅耳原理,利用“平方近似”假设,导得湍流大气中被反射激光束扩展的表达式,并对反射光束的扩展特性作了讨论。证实了平面镜反射光束的扩展存在放大效应,角反射器反射光束的扩展存在自补偿效应。理论公式还表明,利用长波长激光及使用较大的发射、反射孔径,可以减小反射光束的扩展。

关键词: 湍流大气,反射光束的扩展。

## 一、引 言

随着激光在大气中应用领域的扩大,光束经反射后出现的新的湍流效应规律的研究日益受到人们的重视。最近几年来,已有大量的理论和实验工作对湍流大气中反射场的起伏,发射和反射孔径对反射场强度起伏的影响,望远镜中反射光束像点的抖动以及无限平面波、球面波反射场的振幅起伏时间谱、空间相关函数等等进行了研究,但至今对反射光束的扩展问题尚缺乏了解。本文的目的在于对反射光的扩展作一探讨。

## 二、反射激光束扩展公式的推导

在许多激光工程中常使用角反射器作为合作目标,激光经发射望远镜反射到反射器上,反射后返回接收望远镜,往返过程中两次通过同一层湍流大气。假设湍流大气是一种无损耗介质,根据推广的惠更斯-菲涅耳原理<sup>[1]</sup>,角反射器上点 $(L, \mathbf{p})$ 处的入射场为

$$\left. \begin{aligned} u_i(\mathbf{p}) &= \frac{k}{2\pi i} \int u_0(\mathbf{x}) G(\mathbf{p}, \mathbf{x}) d^2\mathbf{x}, \\ G(\mathbf{p}, \mathbf{x}) &= G_0(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \exp[\psi_i(\mathbf{p}, \mathbf{x})], \\ G_0(\mathbf{p}, \mathbf{x}) &= [\exp(ik|\mathbf{p}-\mathbf{x}|)]/|\mathbf{p}-\mathbf{x}|, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $k = (2\pi/\lambda)$ 是波数, $\lambda$ 为激光波长, $u_0(\mathbf{x})$ 是发射端初始场分布, $G(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ 是湍流大气中的格林函数, $G_0(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ 是真空中格林函数, $\psi_i(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ 是从点 $(0, \mathbf{x})$ 处发出的球面波在点 $(L, \mathbf{p})$ 处由湍流引起的相位起伏。利用近轴近似<sup>[2]</sup>后(1)式可改写为

$$u_i(\mathbf{p}) = -\frac{ik}{2\pi L} \exp(ikL) \int d^2\mathbf{x} u_0(\mathbf{x}) \exp\left[\frac{ik}{2L} |\mathbf{p}-\mathbf{x}|^2 + \psi_i(\mathbf{p}, \mathbf{x})\right]. \quad (2)$$

经角反射器反射后的场满足<sup>[3]</sup>

$$u_r(\mathbf{p}) = r(\mathbf{p})u_i^*(\mathbf{p}), \quad (3)$$

式中  $r(\mathbf{p})$  为角反射器有效振幅反射系数,  $u_i^*(\mathbf{p})$  为入射场的复共轭。对反射场再次运用推广的惠更斯-菲涅耳原理, 得到接收器上点  $(0, \mathbf{y})$  处的反射场为

$$u_r(\mathbf{y}) = -\frac{ik}{2\pi L} \exp(ikL) \int d^2\mathbf{p} r(\mathbf{p}) u_i^*(\mathbf{p}) \exp\left[\frac{ik}{2L} |\mathbf{y}-\mathbf{p}|^2 + \psi_r(\mathbf{y}, \mathbf{p})\right], \quad (4)$$

式中  $\psi_r(\mathbf{y}, \mathbf{p})$  是点  $(L, \mathbf{p})$  处的球面波在点  $(0, \mathbf{y})$  上由湍流引起的复位相起伏。将(1)式的复共轭代入(4)式, 得

$$u_r(\mathbf{y}) = \left(\frac{ik}{2\pi L}\right)^2 \int d^2\mathbf{x} d^2\mathbf{p} u_0^*(\mathbf{x}) r(\mathbf{p}) \exp\left[\frac{ik}{2L} (|\mathbf{y}-\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{p}-\mathbf{x}|^2)\right] \times \exp[\psi_r(\mathbf{y}, \mathbf{p}) + \psi_i^*(\mathbf{p}, \mathbf{x})]. \quad (5)$$

由此可求得反射场互相干函数

$$\begin{aligned} \Gamma_2(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) &= \langle u_r(\mathbf{y}_1) u_r^*(\mathbf{y}_2) \rangle \\ &= \left(\frac{k}{2\pi L}\right)^4 \int d^2\mathbf{x}_1 d^2\mathbf{x}_2 d^2\mathbf{p}_1 d^2\mathbf{p}_2 u_0^*(\mathbf{x}_1) u_0(\mathbf{x}_2) r(\mathbf{p}_1) r^*(\mathbf{p}_2) \\ &\quad \times \exp\left[\frac{ik}{2L} (|\mathbf{y}_1-\mathbf{p}_1|^2 - |\mathbf{p}_1-\mathbf{x}_1|^2 - |\mathbf{y}_2-\mathbf{p}_2|^2 + |\mathbf{p}_2-\mathbf{x}_2|^2)\right] \\ &\quad \times \langle \exp[\psi_r(\mathbf{y}_1, \mathbf{p}_1) + \psi_r^*(\mathbf{y}_2, \mathbf{p}_2) + \psi_i(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}_2) + \psi_i^*(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}_1)] \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

平均光强为

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{y}) \rangle &= \left(\frac{k}{2\pi L}\right)^4 \int d^2\mathbf{x}_1 d^2\mathbf{x}_2 d^2\mathbf{p}_1 d^2\mathbf{p}_2 u_0^*(\mathbf{x}_1) u_0(\mathbf{x}_2) r(\mathbf{p}_1) r(\mathbf{p}_2) M_L \\ &\quad \times \exp\left[\frac{ik}{2L} (|\mathbf{y}-\mathbf{p}_1|^2 - |\mathbf{p}_1-\mathbf{x}_1|^2 - |\mathbf{y}-\mathbf{p}_2|^2 + |\mathbf{p}_2-\mathbf{x}_2|^2)\right], \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $M_L$  为双源球面波相干函数。假设光的传播过程可应用“马尔柯夫近似”, 则有

$$M_L = \langle \exp[\psi_r(\mathbf{y}, \mathbf{p}_1) + \psi_r^*(\mathbf{y}, \mathbf{p}_2)] \rangle \langle \exp[\psi_i(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}_2) + \psi_i^*(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}_1)] \rangle. \quad (8)$$

若点  $(L, 0)$  及  $(L, \mathbf{p}_i)$  处于同一等晕域内<sup>[4]</sup>, 则从点  $(0, \mathbf{x})$  至点  $(L, \mathbf{p}_i)$  或至点  $(L, 0)$  的光波经历了相同的湍流, 这样可以忽略  $\psi_i$  对  $\mathbf{p}_i$  的依赖关系, 即成立

$$\psi_i(\mathbf{p}_j, \mathbf{x}_j) \simeq \psi_i(0, \mathbf{x}_j). \quad (j=1, 2) \quad (9)$$

一般而言等晕域的尺度约为湍流外尺度  $L_0$  或球面波相干长度  $\rho_0$  两者之中较小者的量级。这里球面波相干长度为

$$\rho_0 = (0.546 C_n^2 k L)^{-3/5}, \quad (10)$$

式中  $C_n^2$  为折射率结构常数。这样(8)式可改写为

$$M_L = \langle \exp[\psi_r(\mathbf{y}, \mathbf{p}_1) + \psi_r^*(\mathbf{y}, \mathbf{p}_2)] \rangle \langle \exp[\psi_i(0, \mathbf{x}_2) + \psi_i^*(0, \mathbf{x}_1)] \rangle. \quad (11)$$

假设湍流是统计平稳的, 复位相起伏是一高斯随机量, 则有<sup>[5]</sup>

$$M_L = \exp\left\{-\frac{1}{2} [D_\psi(0, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + D_\psi(0, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)]\right\}, \quad (12)$$

式中  $D_\psi(\theta, \theta') = D_x(\theta, \theta') + D_s(\theta, \theta')$  是湍流大气中双源球面波的结构函数,  $D_x(\theta, \theta')$  与  $D_s(\theta, \theta')$  分别为对数振幅与相位结构函数。对于局部均匀各向同性湍流, 波结构函数为<sup>[6]</sup>

$$D_x(\theta, \theta') = 2.91 k^2 L \int_0^1 d\eta C_n^2(\eta L) [|\theta\eta + \theta'(1-\eta)|^{5/3}]. \quad (13)$$

一般来说方程(13)不可能得到分析解, 需要作某些近似, 其中效果较好的是“平方近似”<sup>[7, 8]</sup>, 则有

$$D_{\psi}(\theta, \theta') = 2\rho_0^{-2}(\theta^2 + \theta'^2 + \theta \cdot \theta'), \quad (14)$$

这样可得

$$M_L = \exp[-\rho_0^{-2}(|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|^2 + |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2)]. \quad (15)$$

此外, 假设初始发射场与角反射器有效振幅反射系数均具有高斯分布, 即

$$u_0(\mathbf{x}) = u_0 \exp[(-1/2)k\alpha x^2], \quad r(\mathbf{p}) = r_0 \exp(-p^2/2b^2), \quad (16)$$

式中  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = (1/k\alpha^2) + (i/F)$ ,  $a$  和  $b$  分别为发射孔径及反射器的有效半径,  $F$  为发射光束的曲率半径。将(15)式代入积分式(7), 经运算后得到

$$\langle I(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{32} \left( \frac{k}{L} \right)^4 u_0^2 r_0^2 \frac{\exp(-w\mathbf{y}^2)}{mnth}, \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{1}{2} k\alpha_1 + \rho_0^{-2} + i \left( \frac{1}{2} k\alpha_2 - \frac{k}{2L} \right), \\ n &= \frac{1}{2} k\alpha_1 + \frac{ik}{2L} + \rho_0^{-2} - \frac{4\rho_0^{-4}}{m}, \\ t &= \frac{1}{2b^2} + \rho_0^{-2} + \frac{k^2}{m^2 L^2} + \frac{16k^2 \rho_0^{-4}}{m^2 n L^2}, \\ h &= \frac{1}{2b^2} + \rho_0^{-2} + \frac{k^2}{n L^2} - \frac{A}{t}, \\ A &= 2\rho_0^{-2} + \frac{8k^2 \rho_0^{-2}}{mn L^2}, \\ w &= \frac{k^2}{L^2 t} - \left( \frac{k}{L} - \frac{2k}{Lt} A \right)^2 h^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

光束扩展可用均方半径  $\langle \rho_L^2 \rangle$  来表征, 其定义为

$$\langle \rho_L^2 \rangle = \int \rho^2 \langle I(\rho) \rangle d^2 \rho / \int \langle I(\rho) \rangle d^2 \rho, \quad (19)$$

将(17)式代入(19)式, 可以得到经角反射器反射后光束的均方半径表达式

$$\langle \rho_L^2 \rangle_0 = \frac{8L^4}{k^4} \left\{ \left[ \frac{1}{2b^2} + \rho_0^{-2} + \frac{dk^2}{4L^2(d^2 + c^2 - \rho_0^{-4})} \right]^2 + \left[ \frac{ck^2}{4L^2(d^2 + c^2 - \rho_0^{-4})} \right]^2 \right. \\ \left. - \left[ \rho_0^{-2} + \frac{k^2 \rho_0^{-2}}{4L^2(d^2 + c^2 - \rho_0^{-4})} \right]^2 \right\} \left[ \frac{2L^2}{b^2 k^2} + \frac{d - \rho_0^{-2}}{d^2 + c^2 - \rho_0^{-4}} \right]^{-1}. \quad (20)$$

类似地, 对平面镜 ( $r(\mathbf{p}) = \text{常数}$ ) 情况

$$\langle \rho_L^2 \rangle_m = \frac{8L^4}{k^4} \left\{ \left[ \rho_0^{-2} + \frac{dk^2}{4L^2(d^2 + c^2 - \rho_0^{-4})} \right]^2 + \left[ \frac{k}{L} - \frac{ck^2}{4L^2(d^2 + c^2 - \rho_0^{-4})} \right]^2 \right. \\ \left. - \left[ \rho_0^{-2} + \frac{k^2 \rho_0^{-2}}{4L^2(d^2 + c^2 - \rho_0^{-4})} \right]^2 \right\} \left( \frac{d - \rho_0^{-2}}{d^2 + c^2 - \rho_0^{-4}} \right)^{-1}, \quad (21)$$

式中

$$d = (2a^2)^{-1} + \rho_0^{-2}, \quad c = (k/2F) - (k/2L).$$

### 三、反射光束的扩展特性

为简单起见, 引入反射光束扩展放大系数的概念, 其定义为反射路径与单程二倍距离上的光束有效半径之比, 即

$$G = (\langle \rho_L^2 \rangle_{o,m})^{1/2} / (\langle \rho_{2L}^2 \rangle_o)^{1/2}, \quad (22)$$

式中  $\langle \rho_L^2 \rangle_{o,m}$  可由(20)式或(21)式给出, 而  $\langle \rho_{2L}^2 \rangle_o$  由下式确定<sup>[5]</sup>

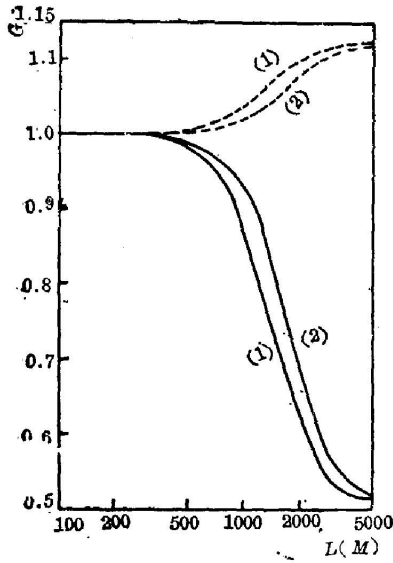


Fig. 1 Amplification coefficient  $G$  vs field range  $L$  for different wavelength  
 $C_n^2=10^{-13} \text{ m}^{-2/3}$ ,  $a=10 \text{ cm}$ ,  $b=20 \text{ cm}$   
 — corner cube reflector reflection,  
 - - - mirror reflection  
 1— $\lambda=0.6328 \mu\text{m}$ ; 2— $\lambda=3.3 \mu\text{m}$

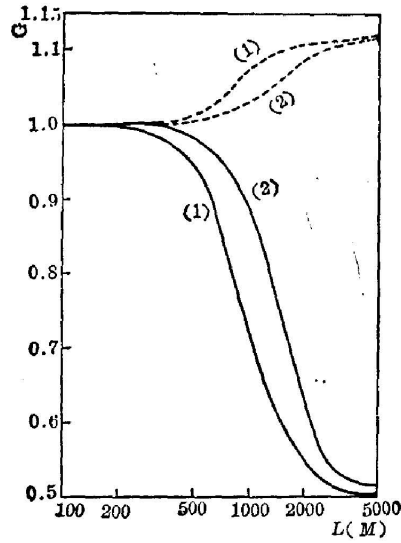


Fig. 2 Amplification coefficient  $G$  vs field range  $L$  for different aperture size  
 $C_n^2=10^{-13} \text{ m}^{-2/3}$ ,  $\lambda=1.06 \mu\text{m}$   
 — corner cube reflector reflection,  
 - - - mirror reflection  
 1— $a=5 \text{ cm}$ ,  $b=10 \text{ cm}$ ; 2— $a=10 \text{ cm}$ ,  $b=20 \text{ cm}$

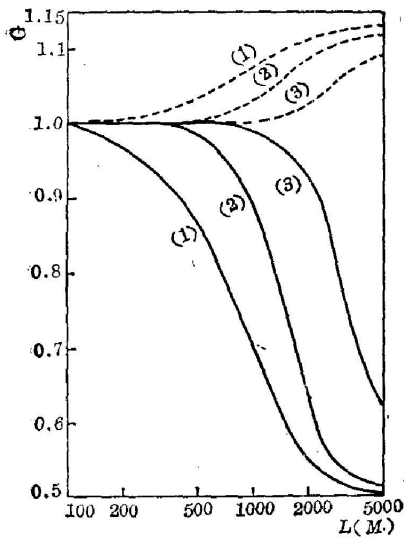


Fig. 3 Amplification coefficient  $G$  vs field range  $L$  for different turbulence intensity  
 $\lambda=1.06 \mu\text{m}$ ,  $a=10 \text{ cm}$ ,  $b=20 \text{ cm}$   
 — corner cube reflector reflection,  
 - - - mirror reflection  
 1— $C_n^2=10^{-12} \text{ m}^{-2/3}$ ; 2— $C_n^2=10^{-13} \text{ m}^{-2/3}$ ;  
 3— $C_n^2=10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$

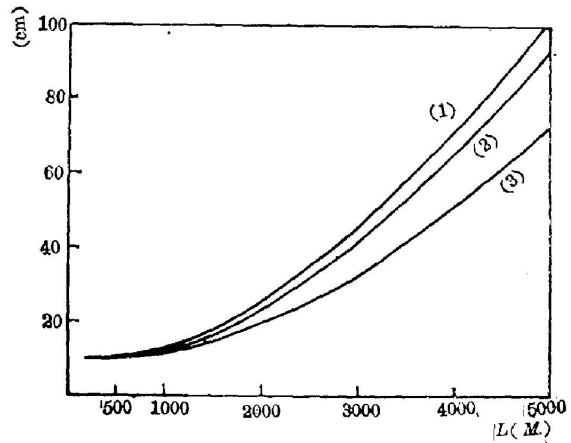


Fig. 4 Effective radius  $r_m$  vs field range  $L$  for different wavelength  
 $C_n^2=10^{-13} \text{ m}^{-2/3}$ ,  $a=10 \text{ cm}$   
 1— $\lambda=0.6328 \mu\text{m}$ ; 2— $\lambda=1.06 \mu\text{m}$ ;  
 3— $\lambda=3.8 \mu\text{m}$

$$\langle \rho_{2L}^2 \rangle_s = a^2 \left[ \left( -\frac{2L}{F} \right)^2 + 4 \left( 1 + \frac{4a^2}{\rho_0^2} \right) L^2 k^{-2} a^{-4} \right]. \quad (23)$$

图1~3是不同参数情况下聚焦光束( $F=2L$ )反射扩展放大倍数的计算结果。由这些图可知平面镜反射光束扩展放大系数 $G>1$ ,即平面反射镜反射后光束的有效半径 $r_m = (\langle \rho_{2L}^2 \rangle_m)^{1/2}$ 大于单程传播相同距离时光束的有效半径 $r_s = (\langle \rho_{2L}^2 \rangle_s)^{1/2}$ ,这就是所谓的放大效应。这种放大效应可以认为是反射场与入射场的相干引起的<sup>[9]</sup>。当距离较近时( $L<500$  m)放大效应很小,放大系数近似为1,在距离较远时,放大效应则趋于饱和。但总的来说,平面反射镜反射与直接传播的差别不大( $G \leq 1.1$ )。而对于角反射器场合,结果却相反,即反射光束的有效半径 $r_o = (\langle \rho_{2L}^2 \rangle_o)^{1/2}$ 小于单程传播时的有效半径,这种现象称为自补偿效应,由于角反射器具有能使反射光沿原入射方向返回的特性,降低了几何发散的作用,同时也使接收端的光束到达角起伏和光束漂移大为减小,从而使光束扩展得到“补偿”。这种效应已由 Kerr<sup>[10]</sup>的实验所证实。自补偿效应的强弱与各种参数有关,但主要因素是传播距离与湍流强度。最好情况下,角反射器反射的光束尺度可以比直接传播时改善一倍左右( $G \approx 0.5$ )。

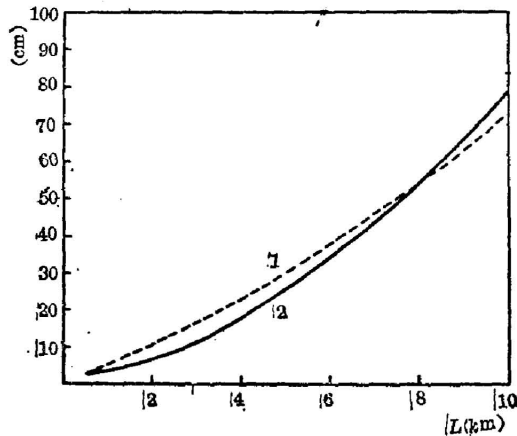


Fig. 5 Effective radius  $r_m$  vs field range  $L$  for different wavelength

$C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ ,  $a = 2.5 \text{ cm}$   
1— $\lambda = 3.8 \mu\text{m}$ ; 2— $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$

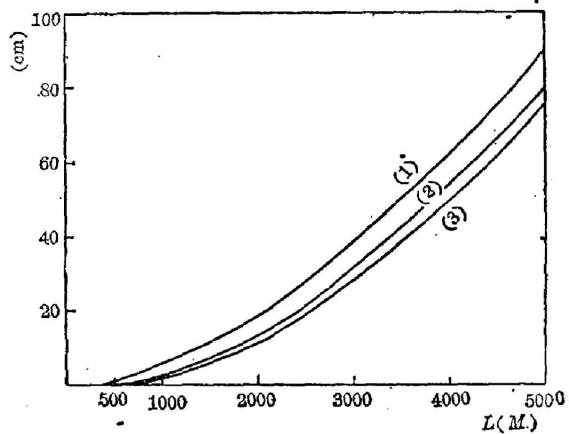


Fig. 6 Relative effective radius  $r_m$  vs field range  $L$  for different aperture size

$C_n^2 = 10^{-13} \text{ m}^{-2/3}$ ,  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$   
1— $a = 2.5 \text{ cm}$ ; 2— $a = 10 \text{ cm}$ ; 3— $a = 15 \text{ cm}$

图4~6描述了在平面镜反射聚焦光束的情况下,波长及发射孔径对有效半径 $r_m$ 的影响。可以看出波长及发射孔径对有效半径的影响与描述光直接传播过程中光束扩展的(23)式所反映的相一致。

#### 四、小 结

上面我们对湍流大气中被反射激光束的扩展作了理论分析。本文的主要结果是:

- (1) 使用平面镜反射时,光束扩展存在放大效应,而使用角反射器反射则存在自补偿效应。
- (2) 使用大的发射和反射孔径以及长波长激光可以减小反射光束的扩展。

我们在推导过程中引用了“平方近似”，曾证明这种近似在通常情况下是合理的<sup>[11]</sup>。另外马尔柯夫近似适用于几乎所有的光波传播过程。但“等晕域”近似使得本文结果仅适用于弱起伏区和中等强度起伏区。

### 参 考 文 献

- [1] R. F. Lutomirski, H. T. Yura; *Appl. Opt.*, 1971, **10**, No. 7 (Jul), 1652~1663.
- [2] M. Born, E. Wolf; *«Principles of Optics»* (中译本) (科学出版社, 1978) 上册 7 章第 3 节。
- [3] R. F. Lutomirski; *Appl. Opt.*, 1975, **14**, No. 4 (Apr), 840~846.
- [4] G. C. Valloy; *JpO. S. A.*, 1979, **69**, No. 5 (May), 712~717.
- [5] R. L. Fante; *Proc. IEEE*, 1975, **63**, No. 12 (Dec), 1669~1692.
- [6] A. E. Kon *et al.*; *Radiophys. Quant. Electron.*, 1970, **23**, No. 1 (Jan), 51~
- [7] J. C. Leader; *J. O. S. A.*, 1978, **68**, No. 2 (Feb), 175~185.
- [8] S. C. H. Wang *et al.*; *J. O. S. A.*, 1979, **69**, No. 9 (Sep), 1297~1304.
- [9] V. P. Aksenov *et al.*; *J. O. S. A. (A)*, 1984, **1**, No. 3 (Mar), 263~274.
- [10] J. R. Kerr; *Propagation of multiwavelength laser Radiation through Atmospheric Turbulence*, RADG-TR-73-322(1923)
- [11] R. L. Fante; *J. O. S. A.*, 1981, **71**, No. 12 (Dec), 1446~1451.

## Beam spread induced by atmospheric turbulence in a folded path

FENG YUEZHONG AND SOMG ZHENG FANG

(*Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Hefei*)

(Received 14 July 1986; revised 21 November 1986)

### Abstract

On the basis of extended Huygens-Fresnel principle and quadratic approximation, general expressions of the beam spread reflected from a target in a turbulent atmosphere are derived. The properties of reflected beam spread are investigated. It is found that there exist “amplification” and “self-compensation” of beam spread in the reflection from a mirror and a corner cube reflector, respectively. Calculations show that the spread can be reduced by using a long-wavelength laser as well as large transmitting and reflection radii.

**Key Words:** atmospheric turbulence; reflected beam spread.