

计算多层膜电场分布的新矩阵方法

郑 舒 颖

(北京光电技术研究所)

韩 丽 瑛

(清华大学应用物理系)

提 要

引入一种新的薄膜特征矩阵,用以计算多层膜中的电场分布,得到了TE和TM波电场的简单表达式。计算并绘制了薄膜偏振器和感应反射滤光片的内部电场分布曲线。应用新的薄膜特征矩阵,也可以很容易推导出多层膜的表面等离子激光波的色散关系。

关键词: 多层薄膜; 特征矩阵。

一、新的薄膜特征矩阵

传统的光学薄膜特征矩阵将膜层两个边界的电场强度和磁场强度的切向分量联系起来,这种矩阵方法可以直接在当地求出TE波的电场分布。但是,表述多层膜性质的矩阵的

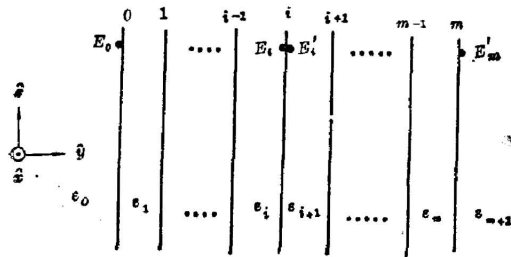


Fig. 1 Schematic representation of a multilayer

形式不是唯一的。本文引入的新薄膜特征矩阵表达了薄膜边界上电磁场的法向分量和切向分量的递推关系。用新矩阵方法得到的光斜入射时多层膜内部的电场表达式比现有的结果^[1,2]要简单得多。

假定一个多层膜堆(图1)的界面是无限延伸的和平行于 $x-z$ 坐标平面的;并且,在膜层的界面上,自由的面电荷密度和自由的面电流密度均等于零。在膜层内部,折射波和

反射波的波矢量 $\mathbf{K}^{\pm} = \pm k_y \mathbf{y} + k_z \mathbf{z}$ 。对于TM波,折射波和反射波的电场(下称分电场)在 y 和 z 两个方向上的分量之间关系为

$$E_y^{\pm} = \mp k_z E_z^{\pm} / k_y, \quad (1)$$

式中正负符号分别用以表征折射波和反射波。于是膜层内部电位移矢量的法向分量 D_y 和电场强度的切向分量 E_x 的关系可由下式表示:

$$\begin{pmatrix} D_y \\ E_x \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} E_z^+ \\ E_z^- \end{pmatrix}, \quad (2)$$

式中

$$V = \begin{pmatrix} -gk_x & gk_x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{\text{TM}}, \quad (3)$$

以及 $g = \varepsilon/k_y^+$, ε 是膜层的介电常数。

现在具体讨论第 i 层内部的电场。在第 i 层的内部, 靠近两个边界上的分电场的切向分量可用该层的相位矩阵 Φ_i 联系起来。所以, 膜层的第一边界 ($i-1$) 的 $D_{y,i-1}$ 和 $E_{s,i-1}$ 与第二边界 (i) 右侧的分电场的切向分量 $E_{z,i}^+$ 和 $E_{z,i}^-$ 的关系是:

$$\begin{pmatrix} D_{y,i-1} \\ E_{s,i-1} \end{pmatrix} = V_i \Phi_i \begin{pmatrix} E_{z,i}^+ \\ E_{z,i}^- \end{pmatrix}, \quad (4)$$

式中矩阵 V_i 由 (3) 式表示, 但要把 g 改为 g_i ; 另外, 若电磁场随时间 t 变化规律取为 $e^{j\omega t}$ (ω 是光波的角频率),

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} e^{j\delta_i} & 0 \\ 0 & e^{-j\delta_i} \end{pmatrix},$$

这里, $\delta_i = k_y d_i$, d_i 是膜层的物理厚度, j 代表单位虚数。接着, 从 (4) 式以及 (2) 式的反变换关系, 立即得出膜层 i 的两个界面的电位移和电场分量的递推公式:

$$\begin{pmatrix} D_{y,i-1} \\ E_{s,i-1} \end{pmatrix} = M_i \begin{pmatrix} D_{y,i} \\ E_{s,i} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

式中

$$M_i = V_i \Phi_i V_i^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \delta_i & -jk_x g_i \sin \delta_i \\ -j \frac{\sin \delta_i}{k_x g_i} & \cos \delta_i \end{pmatrix}. \quad (6)$$

我们称 M_i 为 TM 波的薄膜特征矩阵, M_i 的矩阵元仅与膜层的介电常数 (或折射率) 和厚度有关, M_i 的行列式等于 1。

对于 TE 波, 膜层内部磁感应强度和磁场强度的有关分量 (B_y , H_z) 和分电场的切向分量 (E_x^+ , E_x^-) 之间关系为

$$\begin{pmatrix} B_y \\ H_z \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} E_x^+ \\ E_x^- \end{pmatrix}, \quad (7)$$

为了使 TE 和 TM 波的矩阵符号统一, 上式中 TE 波的 V 矩阵重新定义如下:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{k_x}{\omega} & \frac{k_x}{\omega} \\ -\frac{k_y}{\omega\mu} & \frac{k_y}{\omega\mu} \end{pmatrix}_{\text{TE}}, \quad (8)$$

这里 μ 是材料的磁导率。 B_y 和 H_z 在膜层的边界两侧是连续的, 它们的递推关系和 (5) 式在形式上完全相同, 亦即 TE 波的薄膜特征矩阵的形式与 (6) 式一样, 但此时 $g_i = \mu_i/k_{y,i}$ 。

总之, 对于任何一种偏振的波, 单层膜两个边界上电磁场的递推关系都可写成

$$\begin{pmatrix} A_{y,i-1} \\ B_{s,i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta_i & -jk_x g_i \sin \delta_i \\ -j \frac{\sin \delta_i}{k_x g_i} & \cos \delta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{y,i} \\ B_{s,i} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

式中, 对于 TM 波

$$\begin{pmatrix} A_{y,i} \\ B_{s,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{y,i} \\ E_{s,i} \end{pmatrix}, \quad \text{以及} \quad g_i = \varepsilon_i/k_{y,i} \quad (10)$$

对于 TE 波

$$\begin{pmatrix} A_{y,i} \\ B_{z,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{y,i} \\ H_{z,i} \end{pmatrix}, \quad \text{以及 } g_i = \mu_i/k_{y,i_0} \quad (11)$$

我们注意到,在正入射时 $k_x=0$, 特征矩阵(6)的矩阵元 m_{21} 的分母等于零。但是,这并不妨碍(9)式对于正入射情况的适用性,因为这时电磁场的法向分量消失,在多层膜矩阵 M (多个薄膜特征矩阵的乘积)的四个矩阵元 m_{kl} 中,只有矩阵元 m_{22} 是我们所需要的,而且, m_{22} 不含有 k_x 。所以,在涉及多层膜特征矩阵的副对角线上元素运算时,可以把 g_i 撇开。我们甚至可以把 g_i 中的常数(如 ϵ_0, μ_0 等)也先撇开不计。这样,有关特征矩阵的运算就简单了。

二、应 用

1. 多层膜中电场分布。用新的薄膜特征矩阵计算多层膜的电场分布十分方便,现以 TM 波为例,简叙多层膜中归一化电场的计算方法。

如果多层膜中第一层至第 i 层之间分膜系的特征矩阵用 M_{1i} 表示,并假定

$$M_{1i} = \begin{pmatrix} a_{11} & jk_x a_{12} \\ j \frac{a_{21}}{k_x} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

那末,第 i 个界面的电场可用第一界面的电场表示:

$$\begin{pmatrix} D_{y,i} \\ E_{z,i} \end{pmatrix} = M_{1i}^{-1} \begin{pmatrix} D_{y,0} \\ E_{z,0} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

另外,从(2)式得到

$$\begin{pmatrix} D_{y,0} \\ E_{z,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_x g_0 (1-r) \\ 1+r \end{pmatrix} E_{z,0}^+, \quad (14)$$

其中 r 是多层膜的振幅反射率,定义为 $r = E_{z,0}^-/E_{z,0}^+$ 。如果入射光束的平均功率密度为 W , 根据(1)式即可得出

$$E_{z,0}^+ = \sqrt{2Y_0 N_0 W / \left(1 + \left|\frac{k_x}{k_{y0}}\right|^2\right)}, \quad (15)$$

式中 N_0 是入射媒质的折射率, Y_0 是自由空间光学导纳。将(14)、(15)代入(13),并将电场对 $\sqrt{2Y_0 N_0 W}$ (即入射光电场的振幅)作归一化,就得到了第 i 界面上的电场表达式:

$$\begin{pmatrix} D_{y,i} \\ E_{z,i} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Omega} \begin{pmatrix} -k_x g_0 a_{22} (1-r) - jk_x a_{12} (1-r) \\ a_{11} (1+r) + jg_0 a_{21} (1-r) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

式中, $\Omega = (1 + |k_x/k_{y0}|^2)^{1/2}$ 。由(16)式立即得出界面 i 上 TM 波的归一化的电场强度表达式

$$E_{i,j} = \frac{D_{y,i}}{\epsilon_i} \mathbf{y} + E_{z,i} \mathbf{z}_0. \quad (17)$$

对于 TE 波,界面 i 的磁感应强度和磁场强度的有关分量 $B_{y,i}$ 和 $H_{z,i}$ 也可表达为

$$\begin{pmatrix} B_{y,i} \\ H_{z,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -jk_z a_{12} \\ -j \frac{a_{21}}{h_z} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{y,0} \\ H_{z,0} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

考虑到(8)式的变换关系,我们由(18)式立即得到 TE 波的归一化电场

$$E_{i,\perp} = [(1+r)a_{22} + ja_{12}(1-r)/g_0] \alpha_0. \quad (19)$$

由(16)和(19)式可知,只要算出界面 i 之前的分膜堆的特征矩阵的矩阵元和多层膜的振幅反射率,即可求出界面 i 上的电场强度。和文献[2]比较,本文的方法是简单的。另外,在正入射时, $(a_{22})_{\perp} = (a_{11})_{\parallel}$, $(a_{12}/g_0)_{\perp} = (g_0 a_{21})_{\parallel}$, 于是从(16)和(19)得到的结果是一致的。

根据(9)和(2)式或(7)式,多层膜的两个外表面上分电场的切向分量的变换关系可以表示如下:

$$\begin{pmatrix} E_0^+ \\ E_0^- \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} E_m^+ \\ E_m^- \end{pmatrix},$$

式中, S 就是多层膜的传输矩阵^[9], 并且 $S = V_0^{-1} M_1 M_2 \cdots M_m V_{m+1}$ 。于是,多层膜的振幅反射率 r 可由 S 矩阵的矩阵元表示:

$$r = S_{21}/S_{11}.$$

我们用 FORTRAN 语言编写了多层膜光学性能和电场分布的计算和绘图程序。为了考验我们的方法与程序,我们采用文献[2]的数据,绘制了 56.4° 角入射时双半波薄膜偏振器的电场分布,结果和[2]是一致的(见图2)。另外还绘制了感应反射滤光片^[4]的电场分布(图3)。在膜层内部,感应反射滤光片和全电介质透射滤光片的电场分布很相像:在半波层内部,由于波的共振现象,电场很高;在半波层两侧的膜层中,电场逐渐衰减;在入射的和出射的媒质中,电场分布与多层高反膜相仿,在入射媒质中是驻波场,波节位于多层膜的外表面上。

2. 表面等离子体激元波的色散关系。从多层膜的电场强度的矩阵表达式(4)或(9),可

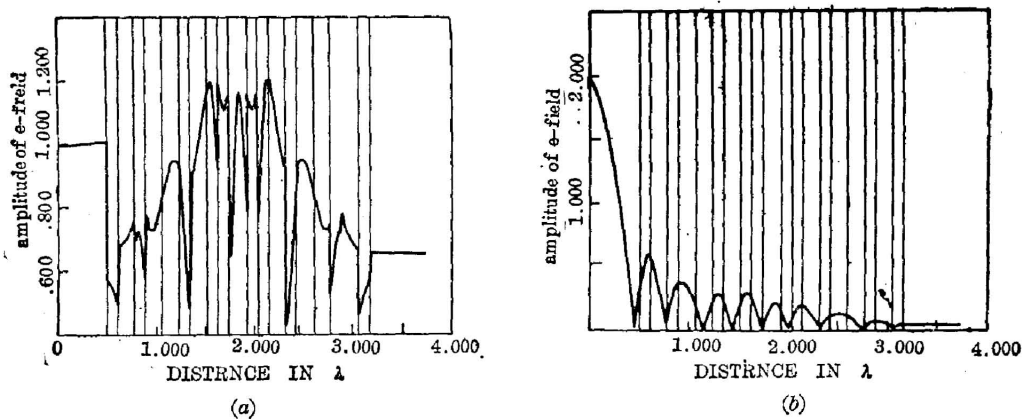


Fig. 2 Normalized E -field distribution inside the "double half-wave" polarizer^[5], Air/M2LMCM2LM/glass ($M=HLH$, $C=L'H'L'$, $L'=0.623L$, $H'=1.772H$, $n_H=2.30$, $n_L=1.45$, $n_G=1.51$), at an angle of incidence $\theta=56.4^\circ$ and $\lambda=1052$ nm for P -polarization (a) and S -polarization (b), respectively.

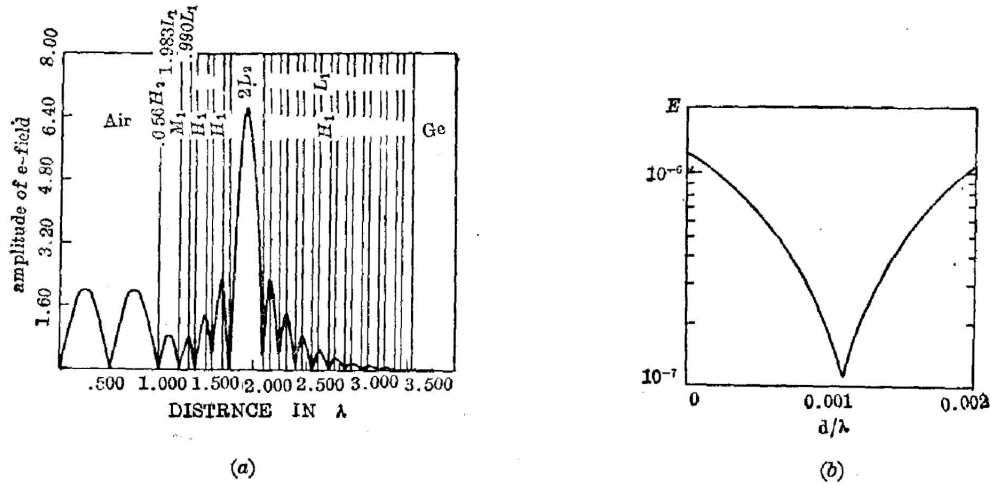


Fig. 3 (a) Normalized E -field inside an induced reflection filter [7], Air/0.056 H_2 1.983 L_1M_1 (Cr, (d/λ)=0.002)0.99 $L_1H_1(L_1H_1)2L_2(H_1L_1)9/S\cdots$ ($n_{H_1}=5.6$, $n_{L_1}=4.0$, N $n_{L_2}=2.4$, $n_{L_3}=1.4$, $n_S=4.3$), at normal incidence; (b) normalized E -field amplitude inside the Cr layer of the filter

以非常容易推导出表面等离子体激元波的色散关系。为了简单起见, 我们将从(4)式推导出单层膜的表面激元波的色散方程。

根据(4)式, 单层膜的第一界面的边界条件:

$$\begin{aligned} -g_0 E_{z,0}^+ + g_0 E_{z,0}^- &= -g_1 e^{j\delta_1} E_{z,1}^+ + g_1 e^{-j\delta_1} E_{z,1}^-, \\ E_{z,0}^+ + E_{z,0}^- &= E_{z,1}^+ e^{j\delta_1} + E_{z,1}^- e^{-j\delta_1}; \end{aligned}$$

第二界面的边界条件:

$$\begin{aligned} -g_1 E_{z,1}^+ + g_1 E_{z,1}^- &= -g_2 E_{z,2}^+, \quad (E_{z,2}^- = 0); \\ E_{z,1}^+ + E_{z,1}^- &= E_{z,2}^+. \end{aligned}$$

若将反射波和折射波的电场表示为入射波电场的函数, 以上四式可以归纳成矩阵的形式:

$$\mathcal{D} \begin{pmatrix} E_{z,0}^- \\ E_{z,1}^+ \\ E_{z,1}^- \\ E_{z,2}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 E_{z,0}^+ \\ -E_{z,0}^+ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

其中,

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 e^{j\delta_1} & -g_1 e^{-j\delta_1} & 0 \\ 1 & -e^{j\delta_1} & -e^{-j\delta_1} & 0 \\ 0 & -g_1 & g_1 & g_2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

从激励的电磁波和表面等离子体激元波发生共振的条件, 亦即 $|\mathcal{D}| = 0$, 得到表面激元波波矢的色散方程^[5]:

$$1 + \frac{g_2 - g_1}{g_2 + g_1} \cdot \frac{g_1 - g_0}{g_1 + g_0} e^{-2j\delta_1} = 0$$

三、小 结

根据电位移矢量的法向分量和电场强度的切向分量 (D_n, E_t), 或磁感应强度的法向分量和磁场强度的切向分量 (B_n, H_t) 在膜层边界的连续性, 得到了光学薄膜新的特征矩阵 (6), 和电磁场的递推公式 (9)。用这种新矩阵方法得到的斜入射的多层膜内部电场分布的表达式 (16) 和 (19) 是非常简明的。两种多层膜的电场分布计算例子表明, 本文的计算方法和程序是正确的。最后, 举例说明了如何用新的薄膜特征矩阵推导出多层膜的表面等离子体激元波的色散方程。

参 考 文 献

- [1] J. H. Apfel; *Applied Optics*, 1976, 15, No. 10 (Oct), 2339~2343.
- [2] P. H. Lissberger; *Optica Acta*, 1981, 28, No. 2 (Feb), 187~200.
- [3] Z. Knittl, «*Optics of Thin Films*», (Wiley, 1976), 43.
- [4] S. Y. Zheng and J. W. Y. List; *Can. J. Phys.*, 1983, 61, No. 2 (Feb), 361~386.
- [5] H. Reather, «*Physics of Thin Films*», (G. Hass et al., Academic press, Inc., New York, 1977), 143.

Calculation of electric fields inside multilayers by using a new thin-film characteristic matrix method

ZHEN SHUYIN

(Beijing Institute of Opto-Electric Techniques)

HAN LIYING

(Department of Applied Physics, Qinhua University)

(Received 8 October 1986; revised 8 January 1987)

Abstract

A new thin-film characteristic matrix, with which the relationship between the normal component of D and the tangential component of E for TM wave or between the normal component of B and the tangential component of H for TE wave at the two boundaries of a layer can be described, is presented and used for calculation of electric field distributions inside multilayers. As a consequence, very simple expressions for the electric fields of TM and TE waves at any angle of incidence are obtained. The electric field distributions of a thin film polarizer and an induced reflection filter are calculated and plotted for illustration of the new matrix method. It is also shown that the dispersive equation of surface polaritons on multilayers may easily be derived by using this method.

Key Words: multilayer thin film; characteristic matrix.