

# 对用空间扩展宽谱光源再现的 彩虹全息像的分析

蔡履中

张幼文

(山东大学光学系) (上海交通大学应用物理系)

## 提 要

用空间扩展宽谱光源再现的彩虹全息像时, 整个光源只在一定的光谱的和空间的“有效宽度”内起作用, 本文在此概念的基础上, 研究了光源的光谱扩展和空间扩展在其单独作用和联合作用时对全息像的影响。发现当两者联合作用时, 对像质的总影响几乎与它们单独作用时一样。给出了用宽谱空间扩展光源所再现的彩虹全息像的分辨率, 从而提出了一个实用的狭缝宽度。

关键词: 白光源; 彩虹全息; 全息像质; 彩色全息。

## 一、引 言

彩虹全息术无论在理论上和实际应用上都有许多成功的报道<sup>[1~13]</sup>。我们在实验中用某种接收器观察彩虹全息像时, 发现只要接收器的集光孔径不是太大, 即使用有一定空间展宽的光源, 在一定条件下仍可得到较为满意的像质。这一现象, 以往无人从理论上加以解释。本文所讨论的, 正是这种再现光源同时具有光谱扩展和空间扩展的普遍情况。考虑到物光限制孔径和接收孔径的影响, 我们首次引入了空间扩展宽谱光源的“有效宽度”的概念, 并进而考虑两种展宽分别作用和共同作用的效果, 得出了接收器在不同位置观察时宽谱面光源的再现像的分辨率近似表达式, 使彩虹全息这种复杂的物理过程从本质上得到了定量的描述, 并为合理选择狭缝和光源的大小, 提出理论依据, 建议了一个实用的狭缝宽度。

## 二、宽谱面光源再现像的点扩散函数

文献[10]中单色点光源照明下的彩虹全息成像过程的点扩散函数为:

$$h(\alpha, \beta, \lambda) = \mathcal{F}\{\rho(\xi, \eta)\} \Big|_{f_x = \frac{d}{\lambda g d_t}(\alpha - \alpha_0), f_y = \frac{d}{\lambda g d_t}(\beta - \beta_0)} \quad (1)$$

式中参数见文献[10], 参见图1。

如再现点光源光谱展宽时, 则像点的弥散是各单色像强度的叠加所致, 多色点扩散函数为<sup>[13]</sup>

$$h(\alpha, \beta) = \int_{\Delta\lambda} c(\lambda) |h(\alpha, \beta; \lambda)|^2 d\lambda, \quad (2)$$

$$c(\lambda) = S(\lambda) F(\lambda) V(\lambda), \quad (3)$$

其中  $S(\lambda)$ 、 $F(\lambda)$  和  $V(\lambda)$  分别为光源的光谱强度分布，全息片的光谱透过率和接收器的光谱响应。

若光源同时具有空间展宽(设在与全息片平面平行的  $(x_0, y_0)$  平面上扩展)，则其再现像点的强度应为光源上不同点所产生的像强度的叠加，即

$$h'(\alpha, \beta) = \iint_{\Sigma(x_0, y_0)} \int_{d\sigma} S'(x_0, y_0) c(\lambda) \cdot |h(\alpha, \beta; \lambda)|^2 d\lambda dx_0 dy_0, \quad (4)$$

式中， $S'(x_0, y_0)$  为面光源强度的空间分布， $\Sigma(x_0, y_0)$  为面光源上对再现该像有贡献的区域。(4) 式可作为宽谱面光源再现彩虹全息过程的点扩散函数，一般得不到解析表达式。由于  $h'(\alpha, \beta)$  的计算包含了在光谱域和空间域的两次综合，很易使人感到其最终结果的弥散度大为增加，但实际上由于彩虹全息过程中狭缝和瞳孔两种孔径的限制，在适当条件下，可以用空间扩展光源得到像质较好的彩虹全息像。

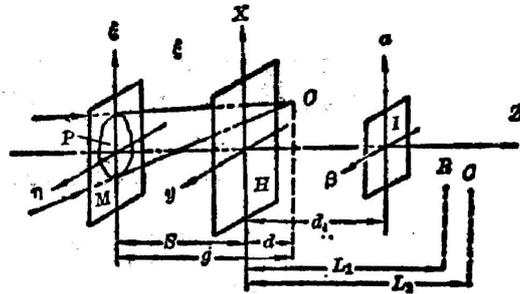


Fig. 1 The geometric diagram of rainbow holographic process;  $M$ —master holographic plate;  $H$ —rainbow holographic plate;  $P(\xi, \eta)$ —limiting aperture of objective light;  $O$ —object point,  $I$ —image point,  $R$ —reference light source,  $C$ —reconstruction light source

### 三、有限接收孔径下光源的空间展宽对再现像的影响

设彩虹全息记录和再现过程分别如图 2(a)、(b) 所示。

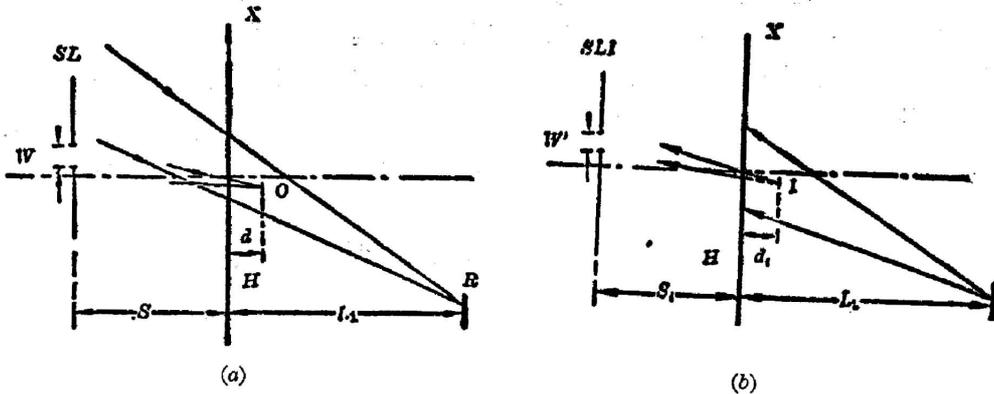


Fig. 2 Construction process (a) and reconstruction process (b) of rainbow hologram

为简单起见，考虑一维情况( $x$  方向)，取限制物光的孔径为宽度为  $W$  的狭缝  $SL$ ， $O$  为物点， $R$  为参考波会聚点， $C$  为再现波源(发散波)， $I$  为再现的理想像点， $SLI$  为再现的狭缝实像。其它参数的意义如图所示。

经计算<sup>[13,14]</sup>，可得  $I$  点和  $SLI$  中心点的坐标分别为：

$$d_i = \frac{\lambda_1 d L_1 L_2}{\lambda L_1 L_2 - \lambda d L_2 + \lambda_1 d L_1}$$

$$X_i = \frac{\lambda X_0 L_1 L_2 - \lambda X_r d L_2 + \lambda_1 X_c d L_1}{\lambda L_1 L_2 - \lambda d L_2 + \lambda d L_1},$$

$$Y_i = \frac{\lambda y_0 L_1 L_2}{\lambda L_1 L_2 + \lambda S L_2 - \lambda_1 S L_1}; \quad (5)$$

$$S_i = \frac{\lambda_1 S L_1 L_2}{\lambda L_1 L_2 + \lambda S L_2 - \lambda_1 S L_1},$$

$$X_{si} = \frac{\lambda x_s L_1 L_2 + \lambda x_r S L_2 - \lambda_1 x_c S L_1}{\lambda L_1 L_2 + \lambda S L_2 - \lambda S L_1},$$

$$Y_{si} = \frac{\lambda y_s L_1 L_2}{\lambda L_1 L_2 + \lambda S L_2 - \lambda_1 S L_1}. \quad (6)$$

式中,  $\lambda_1$  和  $\lambda$  分别为记录和再现光的波长。

由于物像坐标及狭缝像坐标均与  $x_0$  有关, 故光源的不同点在空间产生一系列物像与狭缝像, 它们分别在与  $H$  平面平行的两条直线上沿  $x$  方向交错排列。图 3 示出了光源上坐标为  $x_{c1}$  和  $x_{c2}$  的两点各自所产生的物像  $I_1, I_2$  和狭缝像  $SLI_1, SLI_2$ 。

当用孔径为  $D$  的接收器在狭缝像左方观察再现像时, 由于只有通过某一定区域的狭缝像才能看到对应像点, 故所见像点不是整个扩展光源的贡献。图中示出了“临界”状态,  $SLI_1$  和  $SLI_2$  之间的区域是接收器所能集光的狭缝像最大分布范围, 此时, 孔径  $D$  的上边缘  $P$  通过狭缝像  $SLI_2$  的下边缘  $A$  看到像点  $I_2$ , 而孔径  $D$  的下边缘  $Q$  通过狭缝像  $SLI_1$  的上边缘  $B$  看到像点  $I_1$ 。

因  $I_1, SLI_1$  和  $I_2, SLI_2$  分别为源点  $x_{c1}$  和  $x_{c2}$  所产生, 故尽管光源在  $x$  方向可以有很大扩展, 但孔径  $D$  只能接收到位于  $x_{c1}$  和  $x_{c2}$  之间光源点的贡献, 此区域  $\overline{x_{c1}x_{c2}} = \Delta x_0$  可称为光源的“有效区域”, 相应的像点位移量  $\overline{I_1 I_2} = \Delta x'_i$  为由光源空间展宽引起的像点弥散。

利用 (5), (6) 式可得  $\Delta x_0$  和  $\Delta x'_i$  (各位移量均取正值)

$$\Delta X_{si} = \frac{S_i}{L_2} \Delta x_0, \quad (7)$$

$$\Delta X'_i = \frac{d_i}{L_2} \Delta x_0, \quad (8)$$

$$\frac{\Delta X'_i}{\Delta X_{si}} = \frac{d_i}{S_i}. \quad (9)$$

所允许的最大狭缝像位移量为

$$\Delta X_{si} = D' + W', \quad (10)$$

其中  $D'$  的意义如图 3 所示, 而  $W'$  为再现的狭缝像宽度, 可得

$$\Delta X_{si} = S_i \left( \frac{D}{L} + \frac{\lambda W'}{\lambda_1 S} \right) \left[ 1 - \frac{\lambda W d_i (L - S_i)}{(D \lambda_1 S + L \lambda W) (S_i + d_i)} \right]. \quad (11)$$

注意到  $d_i \ll S_i$ ,  $L$  与  $(L - S_i)$  同数量级或远大于  $(L - S_i)$ , 因此

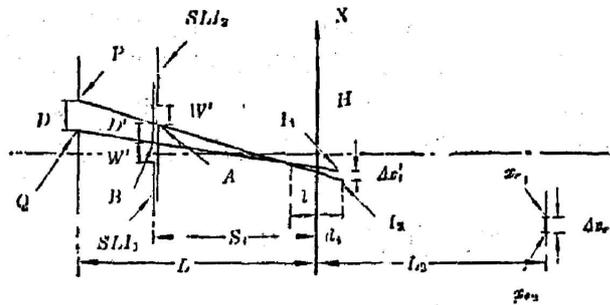


Fig. 3 Reconstruction using a monochromatic spatially extended light source

$$\Delta X_{s_1} = S_1 \left( \frac{D}{L} + \frac{\lambda W}{\lambda_1 S} \right), \quad (12)$$

所以

$$d_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda} d, \quad (13)$$

得到由于单色光源空间扩展所引起再现像的弥散量为:

$$\Delta X'_1 = d \left( \frac{\lambda D}{\lambda L} + \frac{W}{S} \right), \quad (14)$$

对应的光源有效宽度  $\Delta x_0$  为

$$\Delta X_0 = L_2 \left( \frac{D}{L} + \frac{\lambda W}{\lambda_1 S} \right). \quad (15)$$

如取  $D=W=2\text{ mm}$ ,  $d=10\text{ mm}$ ,  $S=400\text{ mm}$ ,  $L_2=10000\text{ mm}$ , 则  $\Delta X'_1=0.1\text{ mm}$ , 相应的光源有效宽度为  $\Delta X_0=10\text{ mm}$ 。

彩虹全息的这种性质, 与普通准像面全息使用空间扩展光源再现时有着本质的区别。普通准像面全息是光源上所有点都对像点弥散有影响, 而彩虹全息由于有狭缝存在且通过很小的瞳孔去观察, 因此将大光源的有效作用范围限制在一个很小的有效区域, 使彩虹全息像的质量比普通准像面全息有所改善, 而在大光源照明下仍可以观察到颇为满意的再现像。

#### 四、有限接收孔径下光源的光谱展宽对再现像的影响

宽谱点光源再现时的情况如图 4 所示。  $\lambda_a$  和  $\lambda_b$  ( $\lambda_b > \lambda_a$ ) 为通过孔径  $D$  能看到像点的由同一点光源 ( $x_0, 0, L_2$ ) 所发出的两个极端波长, 即从  $D$  的上边缘  $P$  通过  $\lambda_a$  再现的狭缝像下端  $A$  能看到像点  $I_a$ , 而从  $D$  的下边缘  $Q$  通过  $\lambda_b$  再现的狭缝像上端  $B$  能看到像点  $I_b$ 。孔径可看到的光谱扩展范围内  $\Delta\lambda = \lambda_b - \lambda_a$ , 相应的狭缝像及物像点在  $x$  方向的位移量分别为  $\Delta x_{s_1}$  和  $\Delta x'_1$  (均取正值)。注意到  $L \gg S_1$ ,  $S \gg d$ ,  $S_1 \gg d_1$ , 得:

$$D' = \frac{S_1}{L} D - \frac{d_1 W (L - S_1)}{L S_1}. \quad (16)$$

一般  $\frac{\lambda S_1}{\lambda_1 S} \sim 1$ ,  $\frac{d_1}{L} \ll 1$ , 故不难证明

$$\frac{\Delta X'_1}{\Delta X_{s_1}} = \frac{S d_1^2}{d_{s_1}^2}. \quad (17)$$

一般情况下,

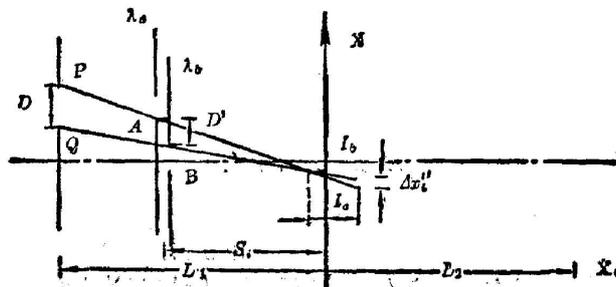


Fig. 4 Reconstruction using a chromatic point light source

$$\Delta X'_i = \Delta X''_i = d \left( \frac{\lambda_1 D}{\lambda L} + \frac{W}{S} \right). \quad (18)$$

这说明由光源的空间展宽和光谱展宽所引起的像点弥散是差不多的。

## 五、空间扩展宽谱光源所再现的彩虹全息像的分辨率

当光源同时存在波长扩展和空间扩展时,有

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= \left| \frac{\partial X_i}{\partial X_o} \Delta X_o + \frac{\partial X_i}{\partial \lambda} \Delta \lambda \right| \\ &= \left| \frac{\lambda_1 d L_1}{\lambda L_1 L_2 - \lambda d L_2 + \lambda d L_1} \Delta X_o - \frac{\lambda_1 d L_1 [L_1(x_o - x_0) - d(x_c - x_r)]}{(\lambda L_1 L_2 - \lambda d L_2 + \lambda_1 d L_1)^2} \Delta \lambda \right|, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Delta X_{si} &= \left| \frac{\partial X_{si}}{\partial X_o} \Delta X_o + \frac{\partial X_{si}}{\partial \lambda} \Delta \lambda \right| \\ &= \left| -\frac{\lambda_1 S L_1}{\lambda L_1 L_2 + \lambda S L_2 - \lambda_1 S L_1} \Delta X_o + \frac{\lambda_1 S L_1 L_2 [L_1(x_o - x_0) + S(x_c - x_r)]}{(\lambda L_1 L_2 + \lambda S L_2 - \lambda_1 S L_1)^2} \Delta \lambda \right|, \end{aligned} \quad (20)$$

显然,此时所允许的最大狭缝像位移仍为(10)式。

由于  $\Delta X_i$  和  $\Delta X_{si}$  的关系相当复杂,为简化问题采用下述条件:

$$\left. \begin{aligned} L_1, L_2 \gg d, |x_r|, |x_0| \gg |x_o|, |x_s|, \\ |L_1 x_o| \gg S |x_c - x_r|, \\ \lambda L_1 L_2 \gg |\lambda S L_2 - \lambda_1 S L_1|. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

这时,

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= \frac{\lambda_1 d}{\lambda L_2} \left| \Delta x_o - \frac{x_o}{\lambda} \Delta \lambda \right|, \\ \Delta X_{si} &= \frac{\lambda_1 S}{\lambda L_2} \left| \frac{x_o}{\lambda} \Delta \lambda - \Delta x_o \right|. \end{aligned}$$

则:

$$\frac{\Delta X_i}{\Delta X_{si}} = \frac{d}{S}. \quad (22)$$

不管是何种原因引起狭缝像位移,其允许的位移量总是由观察条件决定的。把(12)式代入得:

$$\Delta X_i = \frac{d}{S} S_i \left( \frac{D}{L} + \frac{\lambda W}{\lambda_1 S} \right). \quad (23)$$

在  $\lambda S_i / \lambda_1 S \sim 1$  的条件下,

$$\Delta X_i = d \left( \frac{\lambda_1 D}{\lambda L} + \frac{W}{S} \right), \quad (24)$$

可见此时

$$\Delta X_i \doteq \Delta X'_i \doteq \Delta X''_i. \quad (25)$$

此结果似乎出人意料,但它是合理的。

若同时考虑在单色点光源照明时也存在的由于狭缝  $W$  的衍射所引起的像点弥散<sup>[10]</sup>,并考虑到(18)式,则

$$\Delta X''_i = \frac{\lambda(S+d)d_i}{Wd} = \frac{\lambda_1(S+d)}{W}. \quad (26)$$

在(21)的近似下,我们有

$$\Delta X_i = d \left( \frac{\lambda_1 D}{\lambda L} + \frac{W}{S'} \right) + \frac{\lambda_1 (S+d)}{W}. \quad (27)$$

现在让我们来考察用平行光记录与再现时的情况,如图5所示。由此可知<sup>[14]</sup>:

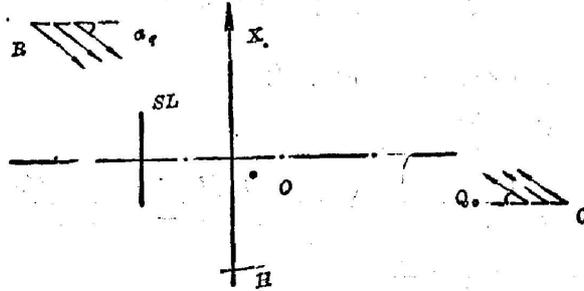


Fig. 5 Construction and reconstruction using a collimated light source

$$\Delta X_i = \left| -d \frac{\lambda_1}{\lambda} \cos \theta_c \Delta \theta_c + d \frac{\lambda_1}{\lambda^2} \sin \theta_c \Delta \lambda \right|,$$

$$\Delta X_{s_i} = \left| S \frac{\lambda_1}{\lambda} \cos \theta_c \Delta \theta_c - S \frac{\lambda_1}{\lambda^2} \sin \theta_c \Delta \lambda \right|,$$

故

$$\frac{\Delta X_i}{\Delta X_{s_i}} = \frac{d}{S'}$$

前面所作的各种分析此时精确成立,当  $L = S_i = \frac{\lambda_1}{\lambda} S$  时, (27) 式进一步化简为:

$$\Delta X_i = \frac{d}{S} (D + W) + \frac{\lambda_1 (d + S)}{W}. \quad (28)$$

该式在瞳孔位于缝像处观察时精确成立,它与  $\theta_c$  和  $\lambda$  均无关,因此像点弥散并不随再现光波长的变化和入射角度的变化而变化,这与使用面光源时孔径对光源宽度的限制相类似。

## 六、结论与讨论

(1) 只要接收器孔径  $D$  与狭缝宽度  $W$  足够小(毫米数量级),彩虹全息不仅可以用多色点光源再现,也可以用单色面光源再现,用单色面光源再现时,对光源宽度实际上是没有限制的,同样用多色点光源再现时,对光源的光谱宽度也没有限制,其物理实质是由于两种孔径的综合作用不仅限制了多色点光源的有效范围  $\Delta \lambda$ ,也同样限制了单色面源的有效范围  $\Delta X_0$ 。不过用单色面光源所再现的像不是彩色的,而用多色点光源所再现的像色彩鲜艳。

(2) 由于上述孔径对空间扩展宽谱光源的两种限制作用,使再现的彩虹全息像仍有较好的质量。只是白度显著增加,其清晰度也不如多色点光源所再现的像。

(3) 光源的空间展宽、光谱展宽、以及联合作用对彩虹全息像点弥散的影响,在一定条件下基本上是相同的。

(4) 对于用平行光记录和再现的情况,光源的光谱展宽、空间展宽、以及联合作用所引起的像点弥散完全相等,因此对位于产生再现用的平行光的透镜前焦点上的光源的大小的要求是不严格的(如果不考虑像差的话)。

(5) 减小  $d$  和  $D$  (不考虑其衍射效应), 对提高彩虹全息像的分辨率总是有益的, 但  $D$  只需小到与缝宽  $\bar{W}$  相近即可, 当  $D$  较大时, 增大  $L$  也会使分辨率有所改善。至于  $\bar{W}$  的大小, 在用宽谱空间扩展光源再现时, 要折衷选取。实用中, 可选取  $\bar{W}$ , 使  $\Delta X_i$  为极小。由 (28) 式可知, 此时的缝宽应为

$$\bar{W} = \left[ \frac{\lambda S(d+S)}{d} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

在远离我们文中所作的近似条件 (21) 时, 情况比较复杂, 仍可进一步讨论, 但本文作为对空间扩展宽谱光源所再现的彩虹全息像质的首次探讨, 其结果无论在理论上或实践上, 也许均是有意义的。

对上海光学仪器研究所庄松林同志于 1982 年在美国宾州大学时, 与张幼文的有益讨论表示感谢, 对上海交通大学应用物理系研究生蒋知行, 给本文的某些整理工作表示谢意。

### 参 考 文 献

- [1] S. A. Benton; *J. Opt. Soc. Am.*, 1969, **59**, No. 11 (Nov), 1545A~1546A.
- [2] H. Chen and F. T. S. Yu; *Opt. Lett.*, 1978, **2**, No. 4 (Apr), 85~87.
- [3] F. T. S. Yu and H. Chen; *Opt. Comm.*, 1978, **25**, No. 2, 173~177.
- [4] F. T. S. Yu and H. Chen; *Opt. Comm.*, 1978, **27**, No. 3 (Mar), 307~311.
- [5] H. Chen *et al.*; *Appl. Opt.*; 1978, **17**, No. 10 (May), 1490~1491.
- [6] F. T. S. Yu, *et al.*; *Opt. Eng.*, 1980, **19**, No. 5 (Oct), 666~678.
- [7] H. Chen; *Appl. Opt.*; 1978, **17**, No. 20 (Oct), 3290~3293.
- [8] F. T. S. Yu 等;《上海交通大学学报》, 1980, No. 4 (Apr), 1~11.
- [9] 张幼文等;《物理学报》, 1982, **31**, No 4 (Apr), 427~436.
- [10] 蔡履中, 张幼文;《物理学报》, 1982, **31**, No. 8 (Aug), 1020~1029.
- [11] S. L. Zhuang, *et al.*; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, No. 5 (May) 872~878.
- [12] Y. W. Zhang, *et al.*; *Appl. Opt.*, 1983, **22**, No. 1 (Jan), 164~169.
- [13] Y. W. Zhang and L. Z. Cai; *Appl. Opt.*, 1984, **23**, No. 10 (May), 1493~1498.
- [14] 蔡履中;《山东大学学报》, 1982, No. 2 (Feb), 135~143.

## Rainbow holographic image reconstructed by spatially extended white light source

CAI LIZHONG

(Department of Optics, Shandong University, Jinan)

ZHANG YOUWEN

(Department of Applied Physics, Shanghai Jiao Tong University)

(Received 7 January 1986; revised 16 February 1987)

### Abstract

It is well known that rainbow holograms can be reconstructed by a spatially extended (rather than a point) white light source. But this fact could not be explained by available theories<sup>[1~6]</sup>. In this paper, we propose a new concept "the effective width

of extended source" that can explain the above fact successfully. The effective width comes from two limiting apertures, the skut and the viewer's pupil. These two apouertisc make a rainbow hologram different from other holograms.

The effects of spattal and spectral extensions on the image point of the rainbow hologram were studied and proved to be approximately equivalent whether they exist separately or simultaneously. The resolution of the rainbow holographic image is derived for the spatial and spectral extended reconstruction source. Some reasonable conclusions are given. Obviotusly, these analyses are useful for further understanding the physical meaning of rainbow holograms, explaining some experimental phenomena, reducing temperal and spatial coherence requiments, and chosing reasonable optical parameters in practice.

**Key Words:** white light source; rainbow hologram; holographic image quality; color hologram.