

# 光栅成像反射莫尔干涉术

俞 信

(北京工业学院工程光学系)

## 提 要

利用光栅成像效应可构成一种光栅成像反射干涉仪。配合莫尔技术,在自成像平面可获得表征镜状表面试件离面位移一阶偏导等值线的反射莫尔条纹。并给出了这种干涉术的理论分析及实验例证。

关键词: 光栅成像效应, 自成像, 反射型干涉仪, 反射莫尔法。

## 一、引 言

光栅成像效应是一种光学自成像效应。如一个扩展光源照明两个相互分离的衍射栅,当满足一定条件时,在一些确定的成像平面位置将有栅状的自成像(傅里叶像)出现。此种现象即称为光栅成像效应。1948年由 E. Lau 首先在无穷远处观察到<sup>[1]</sup>,近年来,一些科学家对此用不同途径作出了较详细的理论分析<sup>[2~4]</sup>,引起了各国科学家广泛的兴趣。

本文用多光束干涉的分析方法,提出并讨论了光栅成像反射莫尔干涉术的工作原理,导出了自成像平面干涉条纹的表达式。与莫尔技术结合,所获之莫尔条纹为表征被测镜状表面试件一阶偏导的等值线。与熟知的 Lightenberg 反射莫尔方法<sup>[5]</sup>比较,其优点是可进行实时测量,装置简单,不须要使用高质量的照相系统。

## 二、理论分析

### 1. 同轴布置,被测试件无变形

为简明起见,本文中讨论一维情况,其结果可很容易地推广到二维。光学布置见图1。图1中,  $S$  为一设置于透镜  $L$  焦平面处的扩展光源,  $G_1$ 、 $G_2$  为栅线间距分别为  $d_1$ 、 $d_2$  的两线

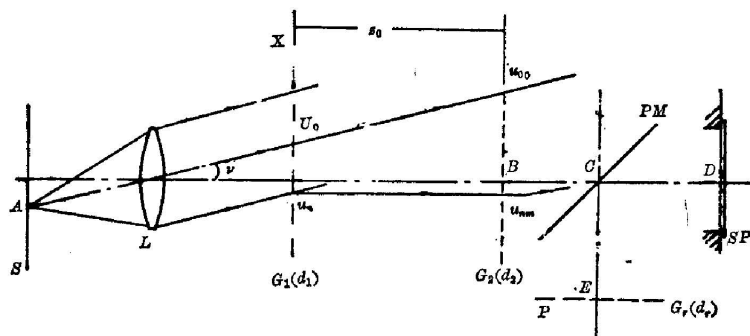


Fig. 1 In-axis setup with specimen not deformed

收稿日期: 1986年7月21日; 收到修改稿日期: 1986年11月20日

状栅,其栅线均沿垂直  $x$  轴方向,  $PM$  为一部分反射镜,试件  $SP$  是一个周边固置的镜状表面平板,此试件可由中心加载。观测面为  $P$ ,  $G_r$  为一位于  $P$  平面,栅线间距为  $d_r$  的参考栅。

图 1 可用多光束干涉的方法分析。参考文献[3],考虑扩展光源  $S$  上任一点光源  $A$  照明双光栅系统  $G_1, G_2$  的情况。由点源  $A$  发出的光波经透镜  $L$  成为平面波,此平面波投射于  $G_1$ ,由光栅衍射面分成级次  $n$  不同的平面衍射波,其复振幅标记为  $u_n$ 。对每一束  $u_n$  波,当它投射于  $G_2$  时,又由  $G_2$  之衍射分成级次  $m$  不同的一系列衍射波,其中每一束标记为  $u_{nm}$ ,观测面  $P$  之光场即由  $P$  处各  $u_{nm}$  波之干涉相加得到。设光栅  $G_1, G_2$  的振幅透射率分别为:

$$t_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(i2\pi n f_1 x), \quad (1)$$

$$t_2(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \exp(i2\pi m f_2 x)。 \quad (2)$$

$f_1 = 1/d_1, f_2 = 1/d_2$ 。取任意两束平面衍射波  $u_{nm}$  和  $u_{n'm'}$  的相干结果分析,此时  $P$  平面处光强为

$$\begin{aligned} I_P &= |u_{nm} + u_{n'm'}|^2 \\ &= a_n^2 b_m^2 + a_{n'}^2 b_{m'}^2 + 2a_n b_m a_{n'} b_{m'} \cos\{2\pi[(n-n')f_1 + (m-m')f_2]x \\ &\quad - 2\pi\lambda f_0[(n-n')z_0 f_1 + (n-n')z f_1 + (m-m')z f_2] \\ &\quad - \pi\lambda[(n^2 - n'^2)z_0 f_1^2 + z(f_1 n + f_2 m)^2 - z(f_1 n' + f_2 m')^2]\}。 \end{aligned} \quad (3)$$

(3)式中,设入射平面波振幅为 1 单位,  $f_0 = \sin\theta/\lambda$ ,  $z = BC + 2CD + CE$ 。注意(3)式中  $\cos$  函数相位第二项随  $\lambda f_0 = \sin\theta$  变化,即随点源  $A$  的位置变化。当此项的系数为 0,即满足条件:

$$(n-n')z_0 f_1 + (n-n')z f_1 + (m-m')z f_2 = 0。 \quad (4)$$

由扩展光源  $S$  上各点光源在  $P$  平面所产生的条纹互相重叠,可由扩展光源照明而获得确定的干涉条纹。(4)式即为此时双栅系统获得自成像的条件。(4)式又可写作

$$z = -z_0/[1 + f_2(m-m')/f_1(n-n')]。 \quad (5)$$

将(5)式代入(3)式,可得

$$\begin{aligned} I_P &= a_n^2 b_m^2 + a_{n'}^2 b_{m'}^2 + 2a_n b_m a_{n'} b_{m'} \cos\{2\pi[(n-n')f_1 + (m-m')f_2]x \\ &\quad + \pi\lambda z_0 f_1 f_2 (n-n')(m+m')\}。 \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式所示干涉条纹为栅状分布,即为光栅像,其空间频率为:

$$f' = (n-n')f_1 + (m-m')f_2 = 1/d'。 \quad (7)$$

$d'$  为栅像之栅线间距,(6)式中  $\cos$  函数相位第二项随  $\lambda$  变化。如扩展光源为宽光谱光源,所获干涉条纹为彩色条纹。当同时满足(5)式以及  $n=n'$  或  $m=-m'$  时,即可由扩展宽光谱光源照明获得消色条纹,以上自成像条件(4)或(5)式为一般表达式,对不同的  $u_{nm}$  与  $u_{n'm'}$  的组合,由于  $n, m, n', m'$  不同,所得  $z$  值不同,由(7)式,  $f'$  亦不同。由文献[2]可知,当满足条件:

$$z_0 = 2Md_1 d_2 / \lambda \quad M \text{ 为正整数}, \quad (8)$$

$$z = z_0 d_2 / d_1 - d_2, \quad (9)$$

$$d' = d_1 d_2 / d_1 - d_2。 \quad (10)$$

所获得自成像为基本的的一个像,其反差最大。由于在实际工作中总希望在观测平面  $P$  所获得干涉条纹反差最大,故  $P$  面的位置应由(9)式决定。本文所提出光栅成像反射莫尔干涉仪即利用由(8)、(9)、(10)式决定的此自成像工作。联立式(5)、(7)、(9)、(10),经简单

Table 1. Combinations which satisfy  $n - n' = m' - m$ ,  $n - n = -1$ 

combination No.	$n$	$m$	$n'$	$m'$	$(n - n')$	$(m - m')$
1	0	0	+1	-1	-1	+1
2	-1	+1	0	0	-1	+1
3	0	+1	+1	0	-1	+1
4	-1	0	0	-1	-1	+1

计算可得:

$$n - n' = m - m', \quad (11)$$

$$n - n' = -1. \quad (12)$$

如仅考虑光栅  $G_1$ 、 $G_2$  最重要的三个衍射级, 零级和  $\pm 1$  级, 则仅有七束平面衍射波构成的四种组合可满足(11)及(12)式的要求, 见表 1 及图 2。

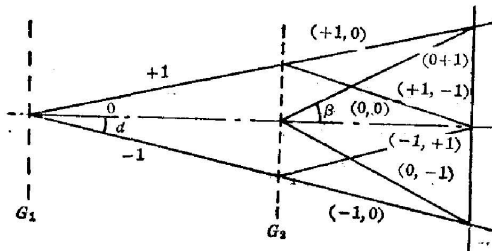


Fig. 2 Seven diffraction wavefront with which the self image on plane  $P$  is formed

由此,  $P$  面的光强分布为:

$$I_P = I_0 + u_{0,0} u_{+1,-1}^* + u_{0,0}^* u_{+1,-1} + u_{-1,+1} u_{0,0}^* + u_{-1,+1}^* u_{0,0} + u_{0,+1} u_{+1,0}^* + u_{0,+1}^* u_{+1,0} + u_{-1,0} u_{0,-1}^* + u_{-1,0}^* u_{0,-1} \quad (13)$$

(13) 式中,  $I_0$  为直流分量。利用公式(6)

$$I_P = I_0 + 8a_0 b_0 a_1 b_1 \cos[2\pi(f_2 - f_1)x] \times \cos \pi \lambda z_0 f_1 f_2 \quad (14)$$

(14) 式为栅状分布的干涉条纹, 栅线间距为  $d' = d_1 d_2 / (d_1 - d_2)$ 。当满足(8)式时, (14) 式成为:

$$I_P = I_0 + 8a_0 b_0 a_1 b_2 \cos[2\pi(f_2 - f_1)x] \quad (15)$$

由以上分析可得结论, 当满足(8), (9)式时, 在扩展光源照明下, 利用光栅成像反射干涉仪, 在  $P$  平面可获得高反差的线栅状干涉条纹(光栅成像), 栅线间距等于  $d_1 d_2 / (d_1 - d_2)$ 。

## 2. 同轴布置, 试件变形

见图 3, 试件由中心加载而变形。平面衍射波  $u_{0,0}$  与  $u_{+1,-1}$ ,  $u_{0,0}$  与  $u_{-1,+1}$ ,  $u_{0,1}$  与  $u_{-1,0}$ ,  $u_{0,1}$  与  $u_{1,0}$  传播方向间的夹角为  $\beta - \alpha$ , 而  $u_{+1,-1}$  与  $u_{-1,0}$ ,  $u_{-1,+1}$  与  $u_{1,0}$  传播方向间的夹角为  $2\alpha - \beta$ 。

设  $u_{0,0}$  波由试件表面变形而变形, 变形量为  $2g(x_s, z_s)$ ,  $g(x_s, z_s)$  为试件在坐标  $x_s$  处沿  $z$  轴的变形量。 $g$  值沿  $x$  方向变化缓慢, 衍射角  $\alpha$ ,  $\beta$  (见图 2) 均不大时,  $P$  面的光强可由以下过程求得<sup>[3, 6]</sup>

$$u(x_p, z_p) = a_0 b_0 \exp \left[ i2\pi f_0 x - i\pi \lambda z_0 f_0^2 - i\pi \lambda z_p f_0^2 - \frac{2\pi i}{\lambda} 2g(x_s, z_s) \right] + a_1 b_1 \exp \left[ i2\pi(f_0 + f_1 - f_2)x - i\pi \lambda z_0 (f_1 + f_0)^2 - i\pi \lambda z_p (f_1 - f_2 + f_0)^2 - \frac{2\pi i}{\lambda} 2g(x_s + b, z_s) \right] + a_1 b_0 \exp \left[ i2\pi(f_0 - f_1)x - i\pi \lambda z_0 (-f_1 + f_0)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& -i\pi\lambda z_p(-f_1+f_0)^2 - \frac{2\pi i}{\lambda} 2g(x_s+b+\Delta, z_s) \Big] \\
& + a_1 b_0 \exp \left[ i2\pi(f_0+f_1)x - i\pi\lambda z_0(f_1+f_0)^2 \right. \\
& \left. - i\pi\lambda z_p(f_1+f_0)^2 - \frac{2\pi i}{\lambda} 2g(x_s-b-\Delta, z_s) \right] \\
& + a_1 b_1 \exp \left[ i2\pi(f_0-f_1+f_2)x - i\pi\lambda z_0(-f_1+f_0)^2 \right. \\
& \left. - i\pi\lambda z_p(-f_1+f_2+f_0)^2 - \frac{2\pi i}{\lambda} 2g(x_s-b, z_s) \right] \\
& + a_0 b_1 \exp \left[ i2\pi(f_0+f_2)x - i\pi\lambda z_0 f_0^2 \right. \\
& \left. - i\pi\lambda z_p(f_2+f_0)^2 - \frac{2\pi i}{\lambda} 2g(x_s-2b-\Delta, z_s) \right] \\
& + a_0 b_1 \exp \left[ i2\pi(f_0-f_2)x - i\pi\lambda z_0 f_0^2 \right. \\
& \left. - i\pi\lambda z_p(-f_2+f_0)^2 - \frac{2\pi i}{\lambda} 2g(x_s+2b+\Delta, z_s) \right] \Big]_0. \quad (16)
\end{aligned}$$

(16)式中,

$$z_p = BC + 2CD + CE,$$

$$\begin{aligned}
b &= (\beta - \alpha)(CD + CE) = \left( \frac{\lambda}{d_2} - \frac{\lambda}{d_1} \right)(DC + CE) \\
&= \lambda \left( \frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2} \right)(DC + CE), \quad (17)
\end{aligned}$$

$$A = (2\alpha - \beta)(DC + CE) = \lambda \left( \frac{2d_2 - d_1}{d_1 d_2} \right)(DC + CE). \quad (18)$$

当满足(9), (10)式时,  $P$ 平面的光强分布为  $I(x_p, z_p) = u(x_p, z_p) \cdot u(x_p, z_p)^*$ ,

$$\begin{aligned}
I(x_p, z_p) &= I_0 + 8a_0 b_0 a_1 b_1 \cos \left[ 2\pi(f_2 - f_1)x + \frac{2\pi}{\lambda} 2 \frac{\partial g(x_s, z_s)}{\partial x} b \right] \\
&= I_0 + 8a_0 b_0 a_1 b_1 \cos \frac{2\pi}{d_1 d_2} \left[ x + 2(DC + CE) \frac{\partial g(x_s, z_s)}{\partial x} \right]. \quad (19)
\end{aligned}$$

公式(19)表示在  $P$ 平面所获得的干涉条纹为一原线间距为  $d' = d_2 d_1 / (d_1 + d_2)$  的变形栅状分布。此栅在  $(x_p, z_p)$  点的变形量为  $2(DC + CE) \cdot \partial g(x_s, z_s) / \partial x$ , 内中含有被测试件离面位移一阶偏导的信息。

为获取莫尔条纹, 在  $P$ 面设置一参考栅  $G_r$ , 其线间距为  $d_r = d' = d_2 d_1 / (d_1 - d_2)$ 。其光强透过率为

$$I_r(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{2\pi}{d_1 d_2} x \right]. \quad (20)$$

通过参考栅  $G_r$  后的光强分布  $F(x) = I(x_p, z_p) I_r(x)$ 。莫尔条纹的强度分布由  $F(x)$  中空间频率低于栅空同频率的低频分量  $F'(x)$  表征

$$F'(x) = I_0 + 2a_0 b_0 a_1 b_1 \cos \frac{2\pi}{d_2 d_1} \left[ 2(DC + CE) \frac{\partial g(x_s, z_s)}{\partial x} \right]. \quad (21)$$

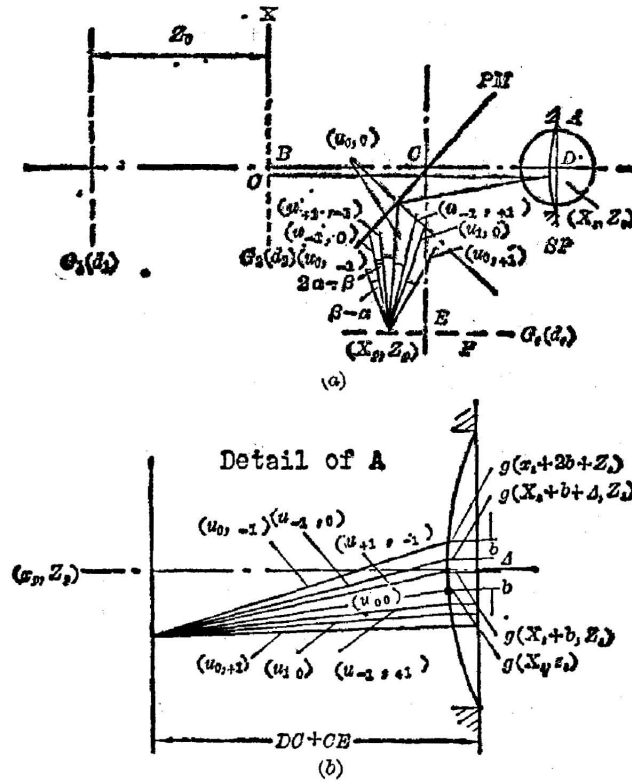


Fig. 3 In-axis setup and the coordinate system with the specimen deformed

当  $\frac{2\pi}{d_2 d_1} \times 2(DC + CE) \frac{\partial g(x_s, z_s)}{\partial x} = i2\pi$ ,  $i$  为正整数时, 莫尔条纹为亮纹。亮纹处的

$$\frac{\partial g(x_s, z_s)}{\partial x} = i \cdot [d_1 d_2 / (d_1 - d_2)] / 2(DC + CE) \quad (22)$$

$g(x_s, z_s)$  为试件在坐标点  $(x_s, z_s)$  处的离面位移量。由于, 此光栅成像反射莫尔干涉仪在观测面  $P$  所获的莫尔条纹为试件离面位移一阶偏导的等值线族。与传统的获得试件离面位移一阶偏导的 Ligtenberg 反射莫尔法比较, 其优点是装置简单, 取消了 Ligtenberg 方法中必需的高质量照相系统, 还可以进行实时测量。

### 3. 离轴布置, 试件变形

在许多实际情况下, 光学系统须离轴布置, 如图 4。

由试件变形导致  $P$  面  $u_{0,0}$  平面衍射波的变形为:

$$2DE = 2g(x_s, z_s) \cos \theta \quad (23)$$

见图 4 的细节图 A,  $\theta$  为入射角。

$$b = \lambda [(d_1 - d_2) / d_2 \cdot d_1] \cdot BC / \cos^2 \theta \quad (24)$$

利用与二、2 节相似的推导, 可求得  $P$  面的光强分布为

$$I(x_p, z_p) = I_0 + 8a_0 b_0 a_1 b_1 \cos \frac{2\pi}{d_2 d_1} \left[ x + 2BC \frac{\partial g(x_s, z_s)}{\partial x} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \right] \quad (25)$$

透过设置于  $P$  面, 光强透过率为 (22) 式的参考栅  $G_r$  后, 所获得莫尔条纹的表达表式为:



$z_0/2=105\text{ mm}$ ,  $\theta=25^\circ$ 。此双衍射光栅系统由一普通投影机照明, 所用试件为一圆形周边固置的有机玻璃平板, 表面真空镀铝,  $\phi=76\text{ mm}$ , 厚度  $t=1.6\text{ mm}$ , 由中心加载变形。参考栅  $G_r$  之栅线间距为  $d_r=d_1=0.4792\text{ mm}$ 。

当试件变形时, 表征试件离面位移一阶偏导等值线的光栅成像反射莫尔条纹在  $P$  面形成。此条纹可直接在  $P$  面用底片记录或摄下。图 5 为所获光栅成像反射莫尔条纹之一例。此时试件中心的变形量为  $0.3\text{ mm}$ , 固置条件介于简支和固定支之间。

本文工作大部完成于纽约州立大学石溪分校实验力学实验室并得到该校姜复本教授 (F. P. Chiang) 指导, 特此致谢。

### 参 考 文 献

- [1] E. Lau; *Ann. Phys.*, 1948, **6**, 417.
- [2] K. Paturski; *Optica Acta*, 1983, **30**, No. 6 (Jun), 745.
- [3] G. J. Swanson, E. N. Leith; *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**, No. 5 (May), 552.
- [4] R. Sudol, B. J. Thompson; *Appl. Optics*, 1981, **20**, No. 6 (Jun), 1107.
- [5] F. K. Ligtnerberg; *Proc. SEEA*, 1954, **12**, 83~98.
- [6] S. Yokozeki, T. Suzuki; *Appl. Opt.*, 1971, **10**, No. 7 (Jul), 1575.

## Grating imaging reflection Moiré interferometry

YU XIN

(Department of Optical Engineering, Beijing Institute of Technology)

(Received 21 July 1986; revised 20 November 1986)

### Abstract

By using grating imaging effect, a grating imaging reflection interferometer can be formed. Combining Moiré method, reflection moiré fringes which represent partial slope contours of out-of-plane displacement of a mirrored surface specimen will be gotten on the self imaging plane of the interferometer.

Comparing with conventional reflection moiré method, this new method is a real time one and it no longer needs a high quality camera required by the conventional method. Both theoretical analyses and experimental results are presented.

**Key Words:** grating imaging effect; self imaging; reflection interferometer; reflection moiré method.