

从相关测量的数据恢复 超短激光脉冲的波形

朱 振 和

(中央民族学院物理系)

提 要

本文证明了, 只要测量了脉冲光强的二阶相关函数 $G^{(2)}(\tau)$ 和单延迟的三阶相关函数 $G^{(3)}(\tau)$, 便可以恢复超短激光脉冲的强度波形。并提出一种恢复脉冲波形的计算方法, 编制了计算机程序, 对实验数据作了处理, 证实这种计算方法是可行的。在此基础上建议一种通过相关测量确定超短激光脉冲波形的新型仪器。

关键词: 超短激光脉冲; 相关测量; 非线性积分方程。

一、引 言

超短激光脉冲已经广泛地应用于物理学、化学、生物学中各种超快过程的研究^[1]。准确地测定超短光脉冲的脉宽及波形对于发展锁模技术及超短脉冲技术是很有意义的, 对于可靠地分析研究超快过程的实验数据也是十分必要的。

虽然人们可以用条纹照相机直接测量超短光脉冲的波形及脉宽, 但是条纹照相机价格昂贵, 而且它的时间分辨率是有限的, 对于短到 1 ps 左右的光脉冲, 它就无能为力了。所以比较普遍地采用的方法是通过相关测量推知超短光脉冲的脉宽。

目前, 人们一般是通过测量二阶相关函数 $G^{(2)}(\tau)$ 来推知超短光脉冲的脉宽^[2,3]。但是, 只测得 $G^{(2)}(\tau)$ 并不能确定超短光脉冲的形状, 对于脉宽也只能作一个大致的估计, 准确的脉宽数值是不知道的。E. I. Blount 和 J. R. Klauder^[4] 曾经证明, 在测得了二阶相关函数 $G^{(2)}(\tau)$ 和双延迟三阶相关函数 $G^{(3)}(\tau_1, \tau_2)$ 以后, 足以完全确定光脉冲的强度特性, 求出光脉冲的波形。也有人建议了(例如, 文献[5]) 测量 $G^{(3)}(\tau_1, \tau_2)$ 的实验技术。由于这种实验技术太复杂, 需要测量的数据太多, 因此至今没有见到通过这种测量来恢复光脉冲波形的报道。

我们在此证明, 只要测量了二阶相关函数 $G^{(2)}(\tau)$ 和单延迟的三阶相关函数 $G^{(3)}(\tau)$, 便可以恢复光脉冲的波形。 $G^{(3)}(\tau)$ 的测量早就有人做过^[6], 所以用这种方法来恢复光脉冲的波形是切实可行的。

二、理 论

假设 $I(t)$ 是傅里叶变换极限超短脉冲光强的时间函数, 它的傅里叶变换是

$$\tilde{I}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = |\tilde{I}(\nu)| e^{i\alpha(\nu)}. \quad (1)$$

收稿日期: 1986年8月25日; 收到修改稿日期: 1986年11月25日

因为 $I(t)$ 是实函数, 所以 $|\tilde{I}(\nu)|$ 是偶函数, $\alpha(\nu)$ 是奇函数,

$$\alpha(0) = 0, \quad (2)$$

$$\alpha(-\nu) = -\alpha(\nu). \quad (3)$$

光强的二阶相关函数为

$$G^{(2)}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t)I(t+\tau)dt, \quad (4)$$

其傅里叶变换为

$$\tilde{G}^{(2)}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^{(2)}(\tau)e^{-2\pi i\nu\tau}d\tau = |\tilde{I}(\nu)|^2. \quad (5)$$

所以从 $G^{(2)}(\tau)$ 只能导出 $|\tilde{I}(\nu)|$, 不能导出 $\alpha(\nu)$, 而 $\alpha(\nu)$ 对于恢复 $I(t)$ 是必需的。从(5)式可知,

$$|\tilde{I}(\nu)| = \sqrt{\tilde{G}^{(2)}(\nu)}. \quad (6)$$

单延迟的三阶相关函数为

$$G^{(3)}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I^2(t)I(t+\tau)dt, \quad (7)$$

其傅里叶变换为

$$\tilde{G}^{(3)}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^{(3)}(\tau)e^{-2\pi i\nu\tau}d\tau. \quad (8)$$

将(7)式代入(8)式, 可导出

$$\tilde{G}^{(3)}(\nu)e^{-i\alpha(\nu)} = |\tilde{I}(\nu)| \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{I}(\nu-\nu')| |\tilde{I}(\nu')| e^{-i[\alpha(\nu')+\alpha(\nu-\nu')]} d\nu', \quad (9)$$

这是一个非线性的积分方程, $\tilde{G}^{(3)}(\nu)$ 和 $|\tilde{I}(\nu)|$ 为已知函数, $\alpha(\nu)$ 是待求解的函数。

在数学上严格证明这个方程的解的存在性是没有必要的, 因为方程中的各个函数都是有物理意义的, 只要 $\tilde{G}^{(3)}(\nu)$ 和 $|\tilde{I}(\nu)|$ 是从实际测得的 $G^{(3)}(\tau)$ 和 $G^{(2)}(\tau)$ 推导出来的, 那么它们必定是从某个客观存在的 $I(t)$ 导出来的, 所以必定存在函数 $\alpha(\nu)$ 满足方程(9)。

证明方程(9)的解的唯一性是必要的, 如果方程的解不是唯一的, 那就不能从 $G^{(2)}(\tau)$ 和 $G^{(3)}(\tau)$ 唯一地确定 $I(t)$ 。我们证明了, 如果 $\alpha_1(\nu)$ 和 $\alpha_2(\nu)$ 都是方程(9)的解, 则 $\alpha_1(\nu)$ 和 $\alpha_2(\nu)$ 必定有以下关系: $\alpha_2(\nu) - \alpha_1(\nu) = c\nu$, 其中 c 是任意常数。设 $|\tilde{I}(\nu)|e^{i\alpha_1(\nu)}$ 的反傅里叶变换为 $I_1(t)$, 则 $|\tilde{I}(\nu)|e^{i\alpha_2(\nu)}$ 的反傅里叶变换为 $I_1\left(t + \frac{c}{2\pi}\right)$ 。所以从 $\alpha_2(\nu)$ 和 $\alpha_1(\nu)$ 导出的光脉冲强度函数只是在时间轴上有一个相对位移, 其形状是完全一样的。这就证明了从 $G^{(2)}(\tau)$ 和 $G^{(3)}(\tau)$ 可以唯一地确定 $I(t)$ 。如果我们对 $\alpha(\nu)$ 的特性再加上一个限制, 假定

$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \alpha(\nu)$ 和 $\lim_{\nu \rightarrow -\infty} \alpha(\nu)$ 均为有限值, 不趋于无穷大, 则 $\alpha(\nu)$ 也是唯一确定的。我们在此选择的限制条件不同于 Blount 和 Klauder 选用的限制条件^[4], 他们提出的限制条件是: $\int_{-\infty}^{+\infty} tI(t)dt = 0$ 。由此得出

$$\alpha'(0) = 0. \quad (10)$$

如果选用(10)式这个条件, 则 $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \alpha(\nu) \rightarrow \pm\infty$; $\lim_{\nu \rightarrow -\infty} \alpha(\nu) \rightarrow \mp\infty$ 。这样, 在采用下面将要说明的叠代法时, 无法得到收敛的解。

现在我们讨论如何从方程(9)解出 $\alpha(\nu)$ 。取 $\alpha(\nu)$ 的零级近似为 $\alpha_0(\nu) = 0$, 将 $\alpha_0(\nu)$ 代

入方程(9)的右边,则右边为一个实函数。所以我们取方程左边这个复变函数的辐角等于零,这样求出 $\alpha(\nu)$ 的一级近似 $\alpha_1(\nu)$ 。令 $\tilde{G}^{(3)}(\nu) = |\tilde{G}^{(3)}(\nu)| \exp ig(\nu)$, 则 $\alpha_1(\nu) = g(\nu)$ 。再将 $\alpha_1(\nu)$ 代入(9)式的右边,使方程两边复变函数的辐角相等,求出 $\alpha(\nu)$ 的二级近似 $\alpha_2(\nu)$ 。依次类推,反复叠代下去,叠代的公式为

$$g(\nu) - \alpha_{n+1}(\nu) = \text{Arg} \left\{ \left| \tilde{I}(\nu) \right| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \tilde{I}(\nu') \right| \left| \tilde{I}(\nu - \nu') \right| e^{-i[\alpha_n(\nu') + \alpha_n(\nu - \nu')] } d\nu' \right\} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (11)$$

如果 $\alpha_n(\nu)$ 是收敛的,并且在叠代过程中方程两边复变函数的模也自动地趋于相等,则求出了方程的解 $\alpha(\nu)$ 。再求 $\tilde{I}(\nu)$ 的反傅里叶变换,便得到 $I(t)$ 。

虽然我们还不能在数学上严格地证明这种叠代法的收敛性,但是我们证明了在叠代过程中 $\alpha_n(\nu)$ 始终满足(2)和(3)式这个基本要求,在一般情况下也始终满足 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha(\nu)$ 和 $\lim_{\nu \rightarrow -\infty} \alpha(\nu)$ 均为有限值的限制条件,而且估计了一下,在一般情况下这样叠代下去应该是收敛的。于是用这种叠代法尝试着处理了一组实验数据,结果表明这种叠代法是行得通的。

三、数据处理

首先取如下形式的一个光强函数:

$$I(t) = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{t}{T}\right)^2\right], & (t \geq 0) \\ \exp\left\{-4.2\left[\left(\frac{t}{T}\right)^2 + 2.5\left(\frac{t}{T}\right)^3\right]\right\}, & (-0.2 \leq \frac{t}{T} < 0) \\ \exp\left(0.42 \frac{t}{T}\right), & (-5 \leq \frac{t}{T} < -0.2) \\ \exp\left[0.42 \frac{t}{T} - \left(\frac{t}{T} + 5\right)^2\right], & \left(\frac{t}{T} < -5\right). \end{cases} \quad (12)$$

然后按(4)和(7)式求出 $G^{(2)}(\tau)$ 和 $G^{(3)}(\tau)$ 。再从这样求出的 $G^{(2)}(\tau)$ 和 $G^{(3)}(\tau)$ 出发,求出它们的傅里叶变换,再按上节所述的叠代法进行计算,结果表明 $\alpha_n(\nu)$ 是收敛的。在叠代过程中,对每次求得的 $\alpha_n(\nu)$,我们都算出 $|\tilde{I}(\nu)| e^{i\alpha_n(\nu)}$ 的反傅里叶变换 $I_n(t)$,当 n 足够大的时候, $I_n(t)$ 非常接近于(12)式表示的 $I(t)$,这样的恢复了脉冲波形 $I(t)$ 。在计算过程中需要作傅里叶变换和反傅里叶变换,还要计算卷积,我们均采用快速傅里叶变换法^[7]进行计算。我们采用不同的参数作了尝试,其中三次的计算结果是这样的:

- (1) 叠代 47 次以后, $|I(t) - I_n(t)| < 0.0085$;
- (2) 叠代 489 次以后, $|I(t) - I_n(t)| < 0.0032$;
- (3) 叠代 6970 次以后, $|I(t) - I_n(t)| < 0.00077$ 。

然后作另一个例子的运算。我们用(12)式,按(7)式算出 $G^{(3)}(\tau)$;另取一个很不相同的光强函数: $I(t) = \exp[-(5t/T)^2]$,按(4)式求出 $G^{(2)}(\tau)$ 。从这样求出的 $G^{(2)}(\tau)$ 和 $G^{(3)}(\tau)$ 出发,求出它们的傅里叶变换,再按上节所述的叠代法进行计算。这时发现 $\alpha_n(\nu)$ 并不收敛,在叠代过程中(9)式两边的复变函数的模也总是不相等。

这两个例子说明,对任意给出的 $G^{(2)}(\tau)$ 和 $G^{(3)}(\tau)$ 函数,方程(9)不一定有解。但是对

于有物理意义的 $G^{(2)}(\tau)$ 和 $G^{(3)}(\tau)$ 函数, 方程(9)是有解的, 解是唯一的, 并且可以用上节所述的叠代法来求解。

接着我们对以前用非共线二次谐波法测量 YAG 锁模激光器产生的锁模脉冲光强的二阶相关函数以及用非共线和频法测量同一台激光器产生的锁模脉冲光强的单延迟三阶相关函数的实验数据^[8] 进行处理, 得出光脉冲波形 $I(t)$ 。测得的二阶相关函数 $G^{(2)}(\tau)$ 和单延迟三阶相关函数 $G^{(3)}(\tau)$ 如图 1 和图 2 所示。

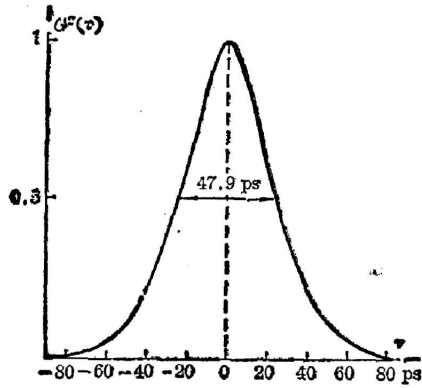


Fig. 1 Measured second-order correlation $G^{(2)}(\tau)$

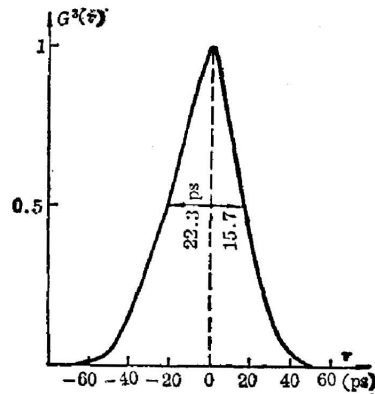


Fig. 2 Measured third-order correlation $G^{(3)}(\tau)$

在数据处理之前必须说明 $G^{(2)}(\tau)$ 和 $G^{(3)}(\tau)$ 的零点取在何处以及如何归一化的问题。在光学延迟的机械装置上很难确定延迟零点在什么位置上, 但是我们可以证明,

$$\left. \frac{dG^{(2)}(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (13)$$

$$\left. \frac{dG^{(3)}(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (14)$$

所以 $G^{(2)}(\tau)$ 曲线和 $G^{(3)}(\tau)$ 曲线的峰值点应取作 $\tau=0$ 。 $G^{(2)}(\tau)$ 可以按照 $G^{(2)}(0)=1$ 的条件来归一化。在这样归一化以后可以求出 $\tilde{G}^{(2)}(\nu)$, 再从(6)式求出 $|\tilde{I}(\nu)|$ 。而对于 $G^{(3)}(\tau)$ 必须按照

$$\tilde{G}^{(3)}(0) = |\tilde{I}(0)| \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{I}(\nu)|^2 d\nu \quad (15)$$

的要求来归一化, 这个要求可以从(9)式立即推导出来。

按上述要求归一化以后, 便可以计算 $G^{(2)}(\tau)$ 和 $G^{(3)}(\tau)$ 的傅里叶变换, 再用上节所述的叠代法进行计算。对每次叠代求得的 $\alpha_n(\nu)$, 都算出 $|\tilde{I}(\nu)| e^{i\alpha_n(\nu)}$ 的反傅里叶变换 $I_n(t)$, $I_n(t)$ 的二阶相关函数 $G_n^{(2)}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_n(t) I_n(t+\tau) dt$ 必定与 $G^{(2)}(\tau)$ 一致; $I_n(t)$ 的单延迟三阶相关函数 $G_n^{(3)}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_n^2(t) I_n(t+\tau) dt$ 则与 $G^{(3)}(\tau)$ 不一样。我们把每次叠代算出的 $G_n^{(3)}(\tau)$ 与 $G^{(3)}(\tau)$ 作比较, 作为收敛的判据。因为实验数据有误差, 所以不能期望在叠代时 $\alpha_n(\nu)$ 能够严格地收敛, 即不能期望 $|G^{(3)}(\tau) - G_n^{(3)}(\tau)|$ 趋近于零, 必须降低收敛判据的要求。我们的实验数据, 可以达到 $|G^{(3)}(\tau) - G_n^{(3)}(\tau)| < 0.004$, 取达到这一要求时的 $I_n(t)$

作为待求的 $I(t)$ 。

我们编制了从读入 $G^{(2)}(\tau)$ 和 $G^{(3)}(\tau)$ 的实验数据开始,直到算出 $I(t)$ 的全部计算机程序。恢复的 $I(t)$ 波形如图 3 所示,可以看出脉冲是不对称的,脉冲的半宽度为 21.4 ps (5.5 + 15.9 ps)。恢复的脉冲波形不大规则,这可能有两个原因:(1)在测量时没有选取单脉冲,所以测得的数据并不代表一个超短脉冲的二阶相关函数和单延迟三阶相关函数,而是一个脉冲序列中各个脉冲的相关函数的平均值(求平均时需考虑各个脉冲的强度权重因子)。在一个脉冲序列中各个脉冲的波形略有差异,这可能使恢复的脉冲波形有畸变。(2)锁模激光器的稳定性不是很好,有时候锁模并不十分完善,测得的数据也被选取了。还有,激光器各次发射的脉冲波形也会略有差异。这可能是使恢复的脉冲波形不规则的主要原因。

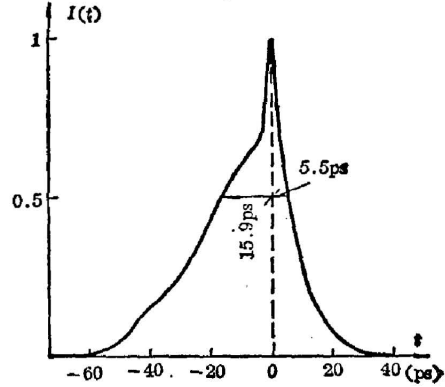


Fig. 3 Recovered laser intensity $I(t)$

如果只测得图 1 所示的 $G^{(2)}(\tau)$ 曲线,它的半宽度是 47.9 ps。假定脉冲是高斯形的,算出脉冲半宽度为 33.9 ps;假定脉冲是双曲正割形的,算出脉冲半宽度为 30.9 ps^[9]。

四、建 议

在原则上我们可以制造一台通过相关测量来测定超短激光脉冲波形的仪器。其原理是这样的:把超短激光脉冲分成两束,分别进入一个二阶相关函数测试装置和一个单延迟三阶相关函数测试装置。测量 $G^{(2)}(\tau)$ 可采用非共线二次谐波法。测量 $G^{(3)}(\tau)$ 对不同波段的超短脉冲用不同的方法:(1)红光到近红外波段,例如波长为 $1.06 \mu\text{m}$,采用 $1.06 \mu\text{m}$ 及其二次谐波 $0.53 \mu\text{m}$ 和频产生三次谐波 $0.353 \mu\text{m}$ 的方法;(2)可见波段,例如波长为 5800 \AA ,采用第二类相位匹配的差频产生法, 5800 \AA 激光与它的二次谐波 (2900 \AA) 差频产生另一偏振态的 5800 \AA 激光。用一台微计算机控制这两套测试装置并采集测得的两组数据,在微计算机的内存里贮存着必要的数据处理程序及我们编制的恢复脉冲波形的程序。微计算机能够自动地处理数据,迅速地在荧光屏上显示出脉冲波形或在绘图仪上画出脉冲波形。

参 考 文 献

- [1] *«Ultrafast Phenomena IV, Proceedings of the Fourth International Conference»*, Monterey California, 1984 ed. by D. H. Auston, K. B. Eisenthal (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984).
- [2] H. P. Weber, R. Dändliker; *IEEE J. Quantum Electron.*, 1968, QE-4, No. 12 (Dec), 1009~1013.
- [3] D. J. Bradley, G. H. C. New; *Proc. IEEE*, 1974, 62, No. 3 (Mar), 313~345.
- [4] E. I. Blount, J. R. Klauder; *J. Appl. Phys.*, 1969, 40, No. 7 (Jun), 2874~2875.
- [5] H. P. Weber, R. Dändliker; *Phys. Lett.*, 1968, 28A, No. 2 (Oct), 77~78.
- [6] R. G. Eckhardt, G. H. Lee; *Appl. Phys. Lett.*, 1969, 15, No. 12 (Dec), 425~427.
- [7] E. Oran Brigham; *«The Fast Fourier Transform, Englewood Cliffs»*, (New Jersey: Prentice-Hall, 1974).
- [8] 张肇源等;《物理学报》,1982, 31, No. 2 (Feb), 213~219.
- [9] A. W. Smith, A. J. Landon; *Appl. Phys. Lett.*, 1970, 17, No. 8 (Oct), 340~343.

Recovery of the intensity envelope of an ultrashort laser pulse from experimental correlation data

ZHU ZHENHE

(Department of Physics, Central Nationalities Institute)

(Received 25 August 1986; revised 25 November 1986)

Abstract

It is shown that the time-dependent intensity of an ultrashort laser pulse can be recovered from the second-order correlation $G^{(2)}(\tau)$ and the third-order correlation with single time-delay $G^{(3)}(\tau)$. A calculation method for recovering the intensity enveloped $I(t)$ is presented. The experimental data are successfully processed by a computer with novel programming. A new instrument is suggested on the basis of determining $I(t)$ of an ultrashort laser pulse from correlation measurements.

Key Words: ultrashort laser pulse; correlation measurement; nonlinear integral equation.