

矩形芯介质波导色散关系及定向耦合器 耦合长度的加权余量法计算

余守宪

(北方交通大学应用数理系)

提 要

本文用加权余量法导出了用以计算各种条形介质波导色散关系, 矩形芯双沟道耦合器耦合长度以及条载型波导色散关系的数学表达式, 其精确度较其它近似方法高, 且简便易行。

关键词: 波导, 色散, 定向耦合器, 加权余量法。

一、引 言

矩形芯介质波导与定向耦合器是介质光波导器件的重要组成部分, 在实际集成光路中有广泛应用^[1]。本文作者及其合作者曾在文献[2, 3]中介绍了求解上述波导器件模式特性的微扰法和变分法。加权余量法(Weighted residual method, 简称为WRM)^[4, 5]已被用于求解电磁场本征值问题, 但通常仅限于数值计算。本文用加权余量法推导出各种矩形芯介质波导色散关系和双沟道定向耦合器耦合长度的表达式。其结果比 Marcatili^[6]法和有效介电常数法^[7]精确得多, 除在截止区附近外, 与精确的计算机数值解法结果相符。

二、条形介质波导

条形介质波导如图1所示的波导结构。(a) $n_0 = n_3 = n_2$ 即埋入型; (b) $n_3 = n_2$ 即镶入型; (c) $n_3 = n_0$ 即凸条型。

考虑图2所示的条形介质波导。用 $\psi(x, y, z, t)$ 表示横向电场分量 E_x 或 E_y 。设

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y) \exp[j(\beta z - \omega t)], \quad (1)$$

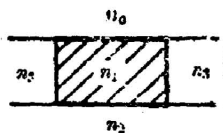


Fig. 1 Cross-section of strip waveguide

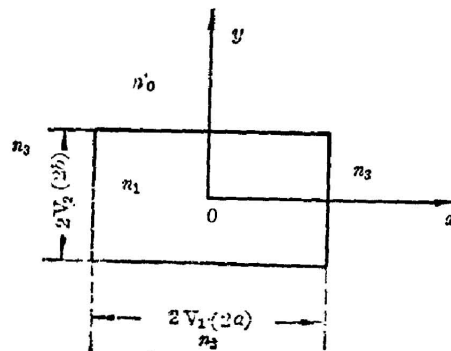


Fig. 2 Cross-section of strip waveguide

并定义归一化考量 $V_1 = ak_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$, $V_2 = bk_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$ 与 $P^2 = (\beta^2 - n_2^2 k_0^2) / (n_1^2 - n_2^2) k_0^2$, 其中 $k_0 = (\omega/C)$ 。将坐标尺度扩大到 $k_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$ 倍, 则场方程为

$$H\psi(x, y) = P^2\psi(x, y), \quad (2)$$

其中算符 H 定义为

$$H = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \begin{cases} 1, & |x| < V_1, & |y| < V_2 \\ -\Delta_1^2, & y > V_2 \\ 0, & y < -V_2 \\ -\Delta_3^2, & |x| > V_1, & |y| > V_2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\Delta_1^2 = \frac{n_2^2 - n_0^2}{n_1^2 - n_2^2}, \quad \Delta_3^2 = \frac{n_2^2 - n_0^2}{n_1^2 - n_2^2}, \quad (4)$$

在标量近似下 $\psi(x, y)$ 和 $\nabla\psi(x, y)$ 在 $x = \pm V_1$ 及 $y = \pm V_2$ 处连续。场方程(2)及边界条件构成了条形介质波导导模的本征值问题。

对于 $|x| < V_1$ 的区域, 寻求场分布函数取下列形式

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y), \quad (5)$$

的解。将(5)式代入方程(2), 容易求得

$$X(x) = A \cos(\alpha_1 x - \delta_1), \quad |x| < V_1 \quad (6)$$

$$Y(y) = B \begin{cases} \cos[\alpha_2(V_2 - y_0) - \delta_2] e^{-\gamma_2(y - V_2)}, & y > V_2 \\ \cos[\alpha_2(y - y_0) - \delta_2], & |y| < V_2 \\ \cos[\alpha_2(V_2 + y_0) + \delta_2] e^{P_2(\gamma + V_2)}, & y < -V_2 \end{cases} \quad (7)$$

以上各式中

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 &= P_2^2 - P^2, \quad \alpha_2^2 = 1 - P_2^2, \quad \gamma_2^2 = P_2^2 + \Delta_0^2, \\ \delta_1 &= (m-1)\frac{\pi}{2}, \quad \delta_2 = (n-1)\frac{\pi}{2}, \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

P_2 值及 y_0 值可由边界条件定出, 正整数 m, n 为 E_{mn} 模的下标。(6)、(7)式中略去了 $X(x)$ 与 $Y(y)$ 的下标记号 m, n 。由 $y = \pm V_2$ 处的连续性条件得到

$$\left. \begin{aligned} \tan[\alpha_2(V_2 - y_0) - \delta_2] &= \gamma_2/\alpha_2, \\ \tan[\alpha_2(V_2 + y_0) + \delta_2] &= P_2/\alpha_2, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

于是 P_2 及 y_0 可由以下两式解得:

$$2\alpha_2 V_2 = \arctan \frac{\gamma_2}{\alpha_2} + \arctan \frac{P_2}{\alpha_2}, \quad (10)$$

$$2\alpha_2 y_0 = \arctan \frac{P_2}{\alpha_2} - \arctan \frac{\gamma_2}{\alpha_2}. \quad (11)$$

应指出, $Y(y)$ 其实就是三层平板波导导模的场分布函数, P_2^2 则为相应的传播常数, 而相应的本征值方程为:

$$\mathcal{H}_y Y = P^2 Y, \quad (12)$$

中式算符
$$\mathcal{H}_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \begin{cases} -\Delta_0^2, & y > V_2, \\ 1, & |y| < V_2, \\ 0, & y < -V_2, \end{cases}$$

对于 $|x| > V_1$ 的区域, 我们不能求出形如(5)式而且同时满足场方程与边界条件的精确

解。按照加权余量法^[4,5]的思路, 寻求满足边界条件但不满足场方程的近似解。为使近似解 $\psi(x, y)$ 尽量逼近精确解, 令近似解在加权余量法的意义下满足场方程, 也就是说, 使近似解的余量 $(H - P^2)\psi(x, y)$ 的加权平均值等于零, 由此求得近似解所满足的方程。这里, 取由(7)式给出的 $Y(y)$ 为权函数(其物理意义是明显的, 场强大处权重重大), 令 $Y(y)$ 与余量的乘积在由 $y = -\infty$ 到 $y = +\infty$ 的整个区间内的积分等于零:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(y) (H - P^2)\psi(x, y) dy = 0, \quad (13)$$

这里, 我们设 $\psi(x, y)$ 可以写成(5)式的形式, 其中 $Y(y)$ 由(7)式给出, 而(13)式则给出 $X(x)$ 所满足的微分方程。于是, 在 $|x| \geq V_1$ 区, $X(x)$ 应满足的微分方程为:

$$X''(x) - \tau^2 X(x) = 0, \quad (14)$$

其中

$$\tau^2 = P^2 - P_2^2 + K^2, \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} K^2 &= (1 + \Delta_3^2) \frac{I_1}{I_1 + I_2 + I_3}, \\ I_1 &= \int_{-V_1}^{V_1} Y^2 dy, \quad I_2 = \int_{V_1}^{\infty} Y^2 dy, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{-V_1} Y^2 dy. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

进行积分计算利用本征值方程(8)、(9), 即得

$$K^2 = (1 + \Delta_3^2) \frac{2V_2 + P_2 + \frac{\gamma_2}{1 + \Delta_3^2}}{2V_2 + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{\gamma_2}}, \quad (17)$$

由微分方程(14)解得

$$X(x) = c \exp[-\tau(|x| - V_1)], \quad |x| > V_1 \quad (18)$$

由 $|x| = V_1$ 处 $X(x)$ 及 $X'(x)$ 连续的条件得到本征值方程

$$\tan(\sqrt{P_2^2 - P^2} V_1 - \delta_1) = \frac{\sqrt{K^2 - P_2^2 + P^2}}{\sqrt{P_2^2 - P^2}}. \quad (19)$$

于是, 寻模的色散关系即可由本征值方程(10)及(19)求得, 而场分布函数则由(5)~(7)式和(18)式给出。

作为特例, 对于埋入型, 镶入式及凸条型波导, 在计算 K 值所用的(17)式中应分别取: $\Delta_0^2 = \Delta_3^2 = 0$, $\Delta_3^2 = 0$ 及 $\Delta_0^2 = \Delta_3^2 \neq 0$ 。对于埋入型波导, 我们得到

Table 1 P^2 for E_{11} mode of buried strip ($b/a=0.5$)

$V_1 \backslash P^2$	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
Marcattili	0.011	0.106	0.189	0.261	0.325	0.382	0.432	0.476
E. D. C.	0.155	0.210	0.265	0.318	0.368	0.414	0.456	0.495
Perturbation	0.077	0.151	0.220	0.284	0.342	0.394	0.440	0.483
W. R. M.	0.095	0.162	0.227	0.288	0.344	0.395	0.442	0.484
Goell	0.120	0.180	0.240	0.300	0.350	0.400	0.450	0.490

$$\tau^2 = P^2 - P_2^2 + K^2 = P^2 + \frac{P_2 V_2 (1 - P_2^2)}{P_2 V_2 + 1} \quad (20)$$

这一结果与 Payne^[8]用严格理论导出的一级近似表达式(文献[8]中的(35)式)相同,但用本法导出则远为简捷。

表 1、表 2 及表 3 分别给出各种近似方法计算结果的比较。由表可见,用本文采用的加权余量法(简称为 WRM)计算所得结果与精确的 Goell 圆谐函数法或 Yeh 等的有限元法^[9]的结果较好地吻合(所引各法可参考文献[1]、[2])。

Table 2 P^2 for E_{21} mode of buried strip ($b/a=0.5$)

V_1	2.8	3.0	3.2	3.4	3.8	4.0	4.4
P^2							
Marcatili	0.031	0.051	0.125	0.191	0.304	0.352	0.435
E. D. C.	0.097	0.148	0.200	0.249	0.341	0.382	0.455
Perturbation	0.014	0.084	0.150	0.210	0.315	0.361	0.441
W. R. M.	0.020	0.088	0.152	0.212	0.316	0.362	0.441
Goell	0.040	0.090	0.160	0.210	0.320	0.360	0.450

Table 3 P^2 for E_{11} mode of embedded strip
($b/a=0.5$, $n_1=1.45$, $n_2=1.50$, $n_0=1$, see C. Yeh et al^[9])

V_1	2	2.2	2.3	2.4	2.6	2.8	3.0
P^2							
Marcatili	-0.039	0.059	0.103	0.146	0.223	0.291	0.351
Perturbation	-0.002	0.084	0.124	0.163	0.235	0.300	0.358
W. R. M.	0.006	0.088	0.127	0.165	0.236	0.300	0.358
C. Yeh	0.010	0.082	0.126	0.165	0.230	0.290	0.360

三、矩形芯双沟道定向耦合器

考虑如图 3 所示的矩形芯双沟道定向耦合器,波导边长分别为 $2a$ 、 $2b$,两波导之间的间隔为 $2c$ 。仿前,定义归一化参量: $V_1 = ak_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$, $V_2 = bk_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$, $V_3 = ck_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$, $P^2 = (\beta^2 - n_2^2 k_0^2) / (n_1^2 - n_2^2) k_0^2$,并将坐标尺扩大到 $k_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$ 倍,则场方程为

$$H\psi(x, y) = P^2\psi(x, y),$$

式中算符 H 的定义为:

$$H = \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 4b^2, & y > V_2 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 1, & |y| < V_2, V_3 < |x| < V_3 + 2V_1 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, & y < V_2, |x| < V_3 \text{ and } |x| > V_3 + 2V_1 \end{cases}$$

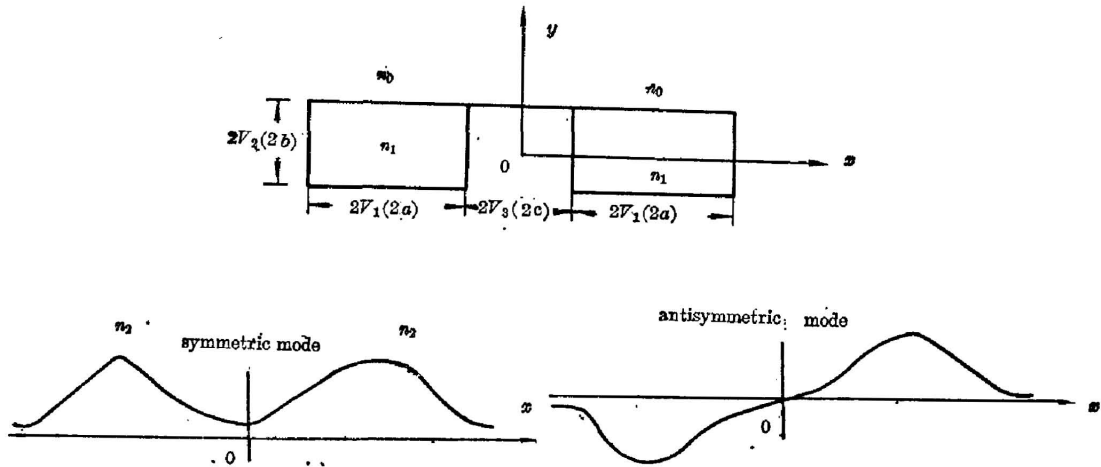


Fig. 3 Dielectric coupler consisting of two parallel channel waveguides

为求得耦合长度 L , 我们采用场型分析法, 分别求出对称模式和反对称模式的归一化传播常数 P_+^2 与 P_-^2 ^[2], 然后用下式计算

$$L = \frac{2\pi\beta a^2}{(P_+^2 - P_-^2)V_1^2} \quad (21)$$

由对称性, 可以只考虑图 3 中的右半平面 ($x > 0$ 区)。借用前面导出的关于嵌入型波导有关公式, 可求得以下结果 (为简便计, 只考虑最低阶模式):

(1) 在 $V_3 < x < V_3 + 2V_1$ 区, 场分布函数 $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$ 为

$$X(x) = A \cos[\alpha_1(x - V_3 - V_1 - x_0)],$$

$$Y(y) = B \begin{cases} \cos(\alpha_2 V_2 - \alpha_2 y_0) e^{-\gamma(y - V_2)}, & y > V_2 \\ \cos(\alpha_2 y - \alpha_2 y_0), & |y| < V_2 \\ \cos(\alpha_2 V_2 + \alpha_2 y_0) e^{P_1(y + V_2)}, & y < -V_2 \end{cases}$$

而由 $Y'(y)$ 在 $y = \pm V_2$ 处的连续性可得 P_2 及 y_0 仍满足方程 (10)、(11)。

(2) 在 $x > V_3 + 2V_1$ 区及 $0 < x < V_3$ 区, 场分布函数 $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$ 中 $Y(y)$ 仍由上式给出, 而 $X(x)$ 则分别由以下两式给出:

$$X(x) = A e^{-\tau x}, \quad x > V_3 + 2V_1$$

$$X(x) = B(e^{-\tau x} + Q e^{\tau x}), \quad x < V_3$$

其中 $Q = \pm 1$ 分别对应于对称场型与反对称场型, τ 值由 (15)、(17) 式给出 (取 $A_3^0 = 0$)。于是, 由 $X(x)$ 及 $X'(x)$ 在 $x = V_3$ 及 $x = V_3 + 2V_1$ 处的连续性可以求出

$$\begin{cases} 2\alpha_1 V_1 = \arctan\left(\frac{\tau}{\alpha_1} w\right) + \arctan\left(\frac{\tau}{\alpha_1}\right), \\ 2\alpha_1 x_0 = \arctan\left(\frac{\tau}{\alpha_1} w\right) - \arctan\left(\frac{\tau}{\alpha_1}\right), \\ w \equiv (e^{\tau V_2} - Q e^{-\tau V_2}) / (e^{\tau V_2} + Q e^{-\tau V_2}), \end{cases} \quad (22)$$

由以上公式求得 P_+^2 ($Q = +1$) 及 P_-^2 ($Q = -1$), 即可由 (21) 式求得耦合长度。表 4 是与其它

Table 4 Coupling length L as function of waveguide separation

$V_1 = 0.8\pi$

c/a $\log(L/\beta a^2)$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
Marcatili	1.10	1.49	1.89	2.28	2.67	3.06	3.45	3.84
Perturbation	1.06	1.40	1.75	2.11	2.47	2.83	3.19	3.55
W. R. M.	1.06	1.39	1.73	2.06	2.40	2.73	3.07	3.40
Variational	1.04	1.38	1.75	2.04	2.38	2.73	3.06	3.36

$V_1 = \pi$

c/a $\log(P/\beta a^2)$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
Marcatili	1.21	1.72	2.22	2.73	3.24	3.74	4.25	4.75
Perturbation	1.71	1.64	2.11	2.58	3.05	3.53	4.01	4.49
W. R. M.	1.16	1.62	2.08	2.54	3.00	3.46	3.92	4.38
Variational	1.16	1.58	2.04	2.49	2.94	3.36	3.86	4.26

方法计算结果的一个实例比较, 可见本法所得结果优于 Marcatili 法的结果, 与变分法^[3]的结果相符, 但本法较变分法简便。

四、条载型波导

用与条型介质波导相类似的方法可以分析如图 4 所示的条载型波导, 这里, 采用的权函数 $Y(y)$ 是四层平板波导 (折射率各为 n_0, n_3, n_1, n_2) 的场分布函数。为简便起见, 我们不再列出有关推算及所导出的公式, 仅在此给出用加权余量法计算的结果与 Marcatili 法及 Yeh 等用有限元法计算的结果的比较, 由表 5 可见, 在此实例中, 本法结果与有限元法的结果相符, 在近截止区, 本法结果比 Marcatili 法的结果精确。

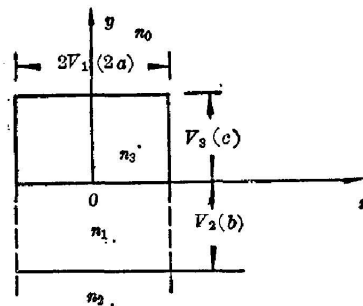


Fig. 4 Strip-loaded waveguide ($n_1^2=2.5, n_2^2=n_3^2=2.375, n_0=1$
 $a=2b, b=c$, from C. Yeh et al^[9])

Table 5 Dispersion relation for E mode of strip waveguide
 ($n_1^2=2.5$, $n_2^2=n_3^2=2.175$, $n_0=1$, $a=2b$, $b=c$, see C. Yeh^[9])

V_2	1.3	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8
Marcatili	0.131	0.169	0.267	0.343	0.406	0.458	0.505	0.544	0.580
W. R. M.	0.139	0.188	0.274	0.347	0.408	0.461	0.506	0.546	0.580
Finite Element	0.150	0.195	0.280	0.350	0.415	0.464	0.510	0.548	0.580

五、结 论

通过上面对于条形介质波导、条载型波导以及双沟道定向耦合器的分析和计算结果与其它方法结果之比较,可以看出,本文采用的加权余量法,不仅比 Marcatili 法有效介电常数法及其它近似方法精确,与精确的计算机数值解较好地吻合,而且所导出的数学表达式比较简单,只须借助袖珍计算机求解一些简单的超越方程,便于设计工作者采用。由各数学表达式的推导过程可以看到,本文所采用的加权余量法可以向其它矩形芯波导结构推广,例如推广到折射率渐变、各向异性媒质和周期波导等等。有关结果拟另文报道。

参 考 文 献

- [1] R. C. Hunsperger; *Integrated Optics: Theory and Technology*, (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, Second Edition, 1984), 108~118.
- [2] 乔力,余守宪;《光学学报》,1986, **6**, No. 10 (Oct), 930~935.
- [3] 余守宪,乔力,王敬益;《光学学报》,1987, **7**, No. 5 (May), 420.
- [4] B. A. Finlayson, L. E. Scriven; *Appl. Mechanics Rev.*, 1966, **19**, No. 9 (Sep), 735~748.
- [5] R. F. Harrington; *Field Computation by Moment Method*, (Macmillan, New York, 1968), Chap. 1.
- [6] E. A. J. Marcatili; *Bell Syst. Tech. J.*, 1969, **48**, No. 7 (Sep), 2071~2101.
- [7] R. M. Knox, P. P. Toullos; "Proceedings of the MRI Symposium on Submillimeter Waves", Edited by J. Fox (Polytechnic Press, Brooklyn, 1970).
- [8] F. P. Payne; *Optical and Quantum Electronics*, 1982, **14**, No. 6 (Nov.), 525~537.
- [9] C. Yeh, K. Ha, S. B. Dong, W. P. Brown; *Applied Optics*, 1979, **18**, No. 10 (May), 1490~1504.

Calculations of dispersion for Rectangular-core dielectric waveguides and of coupling length for directional couplers by weighted Residual method

SHE SHOUXIAN

(Department of Applied Mathematics and Physics, Northern Jiaotong University, Beijing)

(Received 18 August 1986; revised 26 September 1986)

Abstract

In this paper, using the weighted residual method (WRM), we derive mathematical formulas for calculation of dispersion characteristics and field distributions of guided modes of the strip dielectric waveguides and strip-loaded dielectric waveguides, and formulas for calculation of coupling length of rectangular-core dual channel directional couplers. The derived formulas are simple and easy to use, and the results are more accurate than those of other approximate analysis.

Key Words: waveguide; dispersion; directional coupler; weighted residual method.



'88 年激光材料及激光光谱学国际专题会议将在上海召开

由中国光学学会主办, 美国光学学会和美国激光和电子光学协会支持召开的“激光材料及激光光谱学”国际专题会议, 将于 1988 年 7 月 25 日到 27 日, 在我国上海市召开。会议的主要议题为激光材料和激光光谱, 非线性光学材料, 量子阱结构, 非线性光学, 以及激光在物理学、化学、材料和表面研究、生物学和医学上的应用。

国际量子电子学会议是国际上该学科的主要会议, 起着引导学科发展的作用, 召开这次卫星会议, 将有助于促进国际间学术交流, 扩大我国在国际上的影响。

会议将附设一小型非贸易性展览。

欢迎踊跃投稿, 请注意进一步的有关信息。会议筹备组秘书组, 设在上海市 8211 信箱《光学学报》编辑部。

(乙 民供稿)