第7卷 第6期
1987年6月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 7, No 6
June, 1987

迭合栅云纹在相干滤波系统中的倍增

顾 杰 沈永昭 姜锦虎 陈炳泉
(苏州大学物理系)

提 要

本文用傅里叶光学原理讨论了迭合栅云纹倍增问题,得出了光强随位移连续变化的公式。讨论了相干滤波系统中试件均匀变形和非均匀变形问题。云纹栅可以是振幅型或位相型或振幅兼位相型的。所得公式具有普遍意义,并和 Post 的实验符合。

关键词: 形变,云纹,栅,倍增。

一、引 言

云纹法在小位移测量中灵敏度较差,可用倍增技术来改进。有关文献[1~9]仅得到一些特殊结论。本文根据傅里叶光学原理,运用空间滤波概念,求得了云纹倍增的一般公式。

二、均匀形变时的云纹倍增

如图1所示,相干光照明两迭合的云纹栅。试件均匀变形时试件栅的节距发生变化,并相对基准栅有一转角,但仍保持为直线栅。因此均匀变形可以看作两直线异距栅斜交迭合问题。设试件栅和基准栅的节距分别为 p_s 和 p_r,其交角为 θ; 两栅各自在一个节距内的复透率为 $f_1(X_1)$ 和 $f_2(x_1)$,则栅复透率为

$$\left.\begin{aligned} t_1(X_1,\ Y_1) &= f_1(X_1) \circledast \frac{1}{p_s}\operatorname{comb}\left(\frac{X_1}{p_s}\right), \\ t_2(x_1,\ y_1) &= f_2(x_1) \circledast \frac{1}{p_r}\operatorname{comb}\left(\frac{x_1}{p_r}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

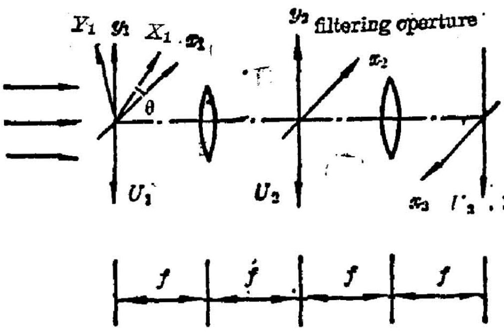

Fig. 1 Optical system for spatial filtering

式中 $\circledast$ 表示卷积。迭合栅的通光孔为

$$s(x,\ y) = \begin{cases} 1, & 孔内 \\ 0, & 孔外 \end{cases} \tag{2}$$

则 x_1y_1 平面上的出射光场为

$$U_1 = st_1t_2, \tag{3}$$

作傅里叶变换得谱面左的复振幅

收稿日期: 1986年6月10日; 收到修改稿日期: 1986年9月16日

$$U_2(x_2,\ y_2)=\sum_l\sum_m F_1\left(\frac{l}{p_s}\right)F_2\left(\frac{m}{p_r}\right)S\left(x_2-\lambda f\frac{l}{p_s}\cos\theta-\lambda f\frac{m}{p_r},\ y_2-\lambda f\frac{l}{p_s}\sin\theta\right), \tag{4}$$

式中大写字母表示小写字母的傅里叶变换。通常 S 是 δ 函数的很好近似，(4)式表示谱面光场由无穷多光点组成，各点位置是

$$x_2=\lambda f\frac{l}{p_s}\cos\theta+\lambda f\frac{m}{p_r},\quad y_2=\lambda f\frac{l}{p_s}\sin\theta。 \tag{5}$$

设试件栅节距近似是基准栅节距的 β(整数)倍[5,8,9]，即 $p_s\simeq\beta p_r$。θ 是个很小的量，(5)式说明光点都很靠近 x_2 轴。又 $\cos\theta\simeq1$，得 $x_2\simeq\frac{\lambda f}{p_r}\left(\frac{l}{\beta}+m\right)$，称满足条件

$$\frac{l}{\beta}+m=k \tag{6}$$

的各光点为 k 级光点集。当 l、m 的数值不太大时，这些光点靠得很近，可在同一滤波小孔中通过。当 l、m 的数值较大时，(4)式中的 F 变得很小，这些光点可略去不计。从(6)式解出 l 代入(4)式，并取出 k 级光点集得谱面右的复振幅

$$U_{2,k}(x_2,\ y_2)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_1\left(\frac{\beta_k-\beta_m}{p_s}\right)F_2\left(\frac{m}{p_r}\right)S\left(x_2-\lambda f\frac{\beta_k-\beta_m}{p_s}\cos\theta-\lambda f\frac{m}{p_r},\ y_2-\lambda f\frac{\beta_k-\beta_m}{p_s}\sin\theta\right)。 \tag{7}$$

对 $U_{2,k}$ 作傅里叶变换(取坐标方向)得象面复振幅，取复共轭平方得象面光强

$$\left.\begin{aligned}I_{3,k}(x_3,\ y_3)&=s(x_3,\ y_3)\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\exp\left\{-i2\pi n\beta\left[\left(\frac{\cos\theta}{p_s}-\frac{1}{\beta p_r}\right)x_3+\frac{\sin\theta}{p_s}y_3\right]\right\},\\ A_n&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_1\left(\frac{\beta_k-\beta_m}{p_s}\right)F_1^*\left(\frac{\beta_k-\beta_m-\beta_n}{p_s}\right)F_2\left(\frac{m}{p_r}\right)F_2^*\left(\frac{m+n}{p_r}\right),\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

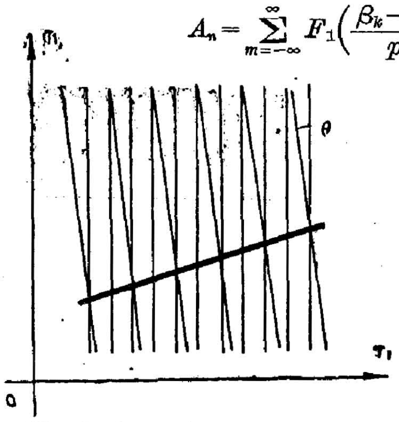

Fig. 2 Moire fringes formed by two gratings contacting to each other ($\beta=2$)

下面对(8)式作一些讨论：

(1) f 和 F 是实、纯虚、复函数分别表示所用栅是振幅、位相、振幅兼位相型的。

(2) $S(x_3,\ y_3)$是试件轮廓的像。

(3) 令 $I_{3,k}=\text{const}$ 得

$$\left(\frac{\cos\theta}{p_s}-\frac{1}{\beta p_r}\right)x_3+\frac{\sin\theta}{p_s}y_3=\text{const}, \tag{9}$$

又因为指数函数是周期函数，可知象面光强是周期性的明暗直条纹。

物面上两栅迭合的情况如图 2($\beta=2$)，粗线是云纹，容易证明其方程为

$$\left(\frac{\cos\theta}{p_s}-\frac{1}{\beta p_r}\right)x_1+\frac{\sin\theta}{p_s}y_1=L,\quad L=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{10}$$

比较(9)、(10)式可知，象面条纹与物面云纹取向一样。

(4) 由(8)式求得其频项的频率为

$$f_3=\beta\sqrt{\left(\frac{\cos\theta}{p_s}-\frac{1}{\beta p_r}\right)^2+\left(\frac{\sin\theta}{p_s}\right)^2}, \tag{11}$$

由(10)式求得物面上云纹的频率为

$$f_1=\sqrt{\left(\frac{\cos\theta}{p_s}-\frac{1}{\beta p_r}\right)^2+\left(\frac{\sin\theta}{p_s}\right)^2}。\tag{12}$$

比较(11)、(12)式，$f_3=\beta f_1$。此结论与文献[8, 9]的实验结果一致。

(5) 公式(8)的求和形式表明象面光强是基频和高频分量的迭加。

三、非均匀形变云纹倍增

设物体的形变是坐标的缓变函数，把物面上迭合栅的通光孔划分成许多小区域 s_i

$$s_i=\begin{cases}1, & i\ \text{区内}\\ 0, & i\ \text{区外}\end{cases}\tag{13}$$

各小区中形变近似为常数[10]，(8)式对每个区域都适用。容易证明 A_n 与区域无关，得 i 区光强

$$I_{3,ki}=s_i(x_3,\ y_3)\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\exp\left\{-i2\pi n\beta\left[\left(\frac{\cos\theta_i}{p_i}-\frac{1}{\beta p_r}\right)x_3+\frac{\sin\theta_i}{p_i}y_3\right]\right\},\tag{14}$$

式中 p_i 是 i 区试件栅的节距。物面上 i 区的云纹直线族是

$$\left(\frac{\cos\theta_i}{p_i}-\frac{1}{\beta p_r}\right)x_1+\frac{\sin\theta_i}{p_i}y_1=L_i。\tag{15}$$

各小区域相互接界连成云纹曲线族，根据云纹理论为

$$\frac{u(x_1,\ y_1)}{\beta p_r}=L,\tag{16}$$

式中 u 是 x_1 方向的位移场。(16)式在 i 区特例就是(15)式。(14)式的中括号内量是物面上 i 区云纹(15)式在象面上的表述，可用(16)式在象面上的对应式子

$$\frac{u(x_3,\ y_3)}{\beta p_r}=L\tag{17}$$

来代替，即

$$I_{3,ki}=s_i(x_3,\ y_3)\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\exp\left(-i2\pi n\frac{u}{p_r}\right)。\tag{18}$$

(18)式对每个小区域都成立，对全区域有

$$I_{3,k}(x_3,\ y_3)=\sum_i I_{3,ki}=s(x_3,\ y_3)\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\exp\left(-i2\pi n\frac{u}{p_r}\right)。\tag{19}$$

(19)式即云纹倍增的基本公式。它表明光强的等值线即位移的等值线，给出了光强随位移连续变化的关系，具有普遍意义。

两栅都是振幅栅时(19)和(8)式分别简化为

$$I_{3,k}(x_3,\ y_3)=s(x_3,\ y_3)\left(A_0+2\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{2\pi nu}{p_r}\right),\tag{20}$$

$$A_n=\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_1\left(\frac{\beta_k-\beta_m}{p_s}\right)F_1\left(\frac{\beta_k-\beta_m-\beta_n}{p_s}\right)F_2\left(\frac{m}{p_r}\right)F_2\left(\frac{m+n}{p_r}\right)。\tag{21}$$

四、矩形振幅栅云纹倍增

设矩型振幅栅的节距是 p，节距内通光带宽为 a，并设 $d=(a/p)$，这时有

$$f_1(x_1)=\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{a_s}\right),\quad f_2(x_1)=\mathrm{rect}\left(\frac{x_1}{a_r}\right),\tag{22}$$

$$A_n=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sin C[d_s\beta(k-m)]\sin C[d_s\beta(k-m-n)]\sin C(d_r m)\sin C[d_r(m+n)]。\tag{23}$$

作为对本文结论的一个证明，下面讨论 $\beta=1$, $d_s=d_r=(1/2)$ 的情况。Guild 等人创导的理论指出，奇次(k 为奇数)倍增体现了双光束干涉，倍增准确；偶次倍增时倍增性能仍然是明显的，但由于高次波影响，条纹质量差一点。这些结论为 Post 的实验[8,9]证实。Guild 的理论没能给出定量描述。将 $\beta=1$, $d_s=d_r=(1/2)$ 代入(23)、(20)式，我们很容易得出这些结论。

1．k 是奇数

经计算得 $A_0=(8/\pi^2k^2)$, $A_k=(4/\pi^2k^2)$, $A_n=0(n\neq0,\ k)$，将它们代入(20)式得

$$I_{3,k}(x_3,\ y_3)=s(x_3,\ y_3)\left(1+\cos\frac{2\pi ku}{p_r}\right)。\tag{24}$$

当

$$\frac{ku}{p_r}=N,\quad N=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\tag{25}$$

时，象面上为亮纹。物面上云纹方程为

$$\frac{u}{p_r}=N,\quad N=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\tag{26}$$

比较(25)和(26)式可看出象面条纹数目是物面上条纹准确的 k 倍。另一方面可求得谱面右的光场为

$$U_{2,k}=S\left(x_2-\lambda f\frac{k}{p_s}\cos\theta,\ y_2-\lambda f\frac{k}{p_s}\sin\theta\right)+S\left(x_2-\lambda f\frac{k}{p_r},\ y_2\right),\tag{27}$$

(27)式说明 k 级光点集只有两个光点，它们在后半个系统中形成双光束干涉。

2．k 是偶数

经计算得 $A_0=(\pi^2/2k^2)$, $A_k=-(\pi^2/4k^2)$, $A_n=0(n\neq0,\ k)$，于是得到

$$I_{3,k}(x_3,\ y_3)=s(x_3,\ y_3)\left(1-\cos\frac{2\pi ku}{p_r}\right),\tag{28}$$

上式说明 k 为偶数时也能准确倍增。谱面右的光场为

$$U_{2,k}=\sum_{m(奇)=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k}{2}-1}}{m(k-m)}S\left(x_2-\lambda f\frac{k-m}{p_s}\cos\theta-\lambda f\frac{m}{p_r},\ y_2-\lambda f\frac{k-m}{p_s}\sin\theta\right),\tag{29}$$

级光点集由无数光点组成，滤波孔的有限大小使实际取项数有限，所以偶倍增条纹质量较差。但光点的强度系数按 m 的平方律衰减，大光点的贡献较小，倍增性能仍然是明显的。

3．$k=0$

这时没有倍增。

参 考 文 献

[1] D. Post; *Exper. Mech.*, 1965, **5**, No. 11 (Nov), 368～377.
[2] F. P. Chiang, V. J. Parks *et al.*; *Exper. Mech.*, 1968, **8**, No. 12 (Dec), 554～560.
[3] F. P. Chiang, R. Juang; *Exper. Mech.*, 1973, **13**, No. 5 (May), 209～211.
[4] D. Post; *Exper. Mech.*, 1967, **7**, No. 4 (Apr), 154～159.
[5] J. Guild; *«The interference Systems of Crassed Diffraction Gratings»*, (Clarendon Press, Oxford, 1956), Chap

2～3.
[6] C. A. Sciammarella, N. J. Lurowist; *Appl. Mech.*, 1967, **34**, No. 2 (Jun), 425～430.
[7] D. Post; *Exper. Mech.*, 1968, **8**, No. 2 (Feb), 63～68.
[8] D. Post; *Appl. Opt.*, 1967, **6**, No. 11 (Nov), 1938～1942.
[9] 顾杰等;《苏州大学学报》, 1986, **2**, No. 2 (Jun), 161～169.

Moiré fringe multiplication of superimposed gratings in coherent filtering system

GU JIE, SHEN YONGZHAO, JIANG JINHU AND CHEN BINQUAN
(*Physics Department, Suzhou University*)

(Received 10 June 1986; revis ed 16 September 1986)

Abstract

In this paper, the principle of Fourier optics is used in treating the problem of moiré fringe multiplication formed by two contact gratings. A continuous relationship between displacement and light intensity is obtained. The gratings may be amplitude type, phase type, or amplitude and phase type. Moiré fringe multiplication under coherent illumination for both homogeneous and inhomogeneous deformation-field is considered. The resulting formulas have universal significance and agree fairly well with the experimental results obtained by D. Post.

Key Words: deformation; Moiré; grating; multiplication.