

# 模糊函数和任何光学系统 中的 Talbot-Lau 效应

刘 立 人

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

## 提 要

本文用模糊函数处理了光栅的 Talbot 和 Lau 效应,并推广到任何光学系统中。得到了十分简洁的通用表达式,它能够直接描述干涉条纹的空间分布,并只与系统的传递矩阵有关。同时也讨论了 Talbot 和 Lau 效应中的相位关系。

关键词: 模糊函数,光栅,Lau 效应,Talbot 效应,传递矩阵。

## 一、引 言

光栅在相干光照明下自成像的现象称作为 Talbot 效应<sup>[1]</sup>,其中精确成像还称为 Fourier 像,而非精确成像称作 Fresnel 像<sup>[2]</sup>。用空间非相干光照明一光栅,通过另一光栅在透镜焦面上产生干涉条纹的现象称为 Lau 效应<sup>[3]</sup>。有人用菲涅尔衍射理论对 Talbot 效应作过详细的分析<sup>[4,5]</sup>。用衍射理论<sup>[6]</sup>,部分相干理论<sup>[7,8]</sup>,光栅衍射干涉仪模型<sup>[9]</sup>,光学传递函数<sup>[10]</sup>以及 Bloch 函数<sup>[11]</sup>,反向脉冲传递法<sup>[12]</sup>,互联强度<sup>[13]</sup>,交叉谱密度<sup>[14]</sup>,虚夫琅和费衍射和波像差原理<sup>[15]</sup>,以及 Wigner 分布函数<sup>[16]</sup>等理论,对光栅的 Lau 效应作了解释。其中有些还讨论了 Talbot 效应和 Lau 效应之间的内在联系。无透镜时的 Lau 效应装置也称为光栅成像<sup>[9,12]</sup>。Lau 效应甚至能扩展到任何平面物体<sup>[17]</sup>。

模糊函数是从雷达中为同时测量运动目标的距离和速度的测不准原理引出的<sup>[18]</sup>。这种相位空间表达法用于光学<sup>[19,20]</sup>,能简化部分相干光学系统的处理,同时可用几何光学的矩阵运算方法简单的处理衍射和透射过程。

本文用模糊函数处理 Talbot 和 Lau 效应,并推广到任何结构的光学系统,这是至今尚未系统地讨论过的问题。由于模糊函数具有几何光学传递优点,可以得到适用于任何光学系统的 Talbot 和 Lau 效应的通用表达式,它在数学上十分简单而且能直接描述在观察面上的干涉条纹的强度分布。文中还讨论了振幅光栅 Talbot 成像中的相位关系和相位光栅的自成像问题,以及相位光栅的 Lau 效应的可能性。

## 二、模糊函数及其 Ronchi 光栅表达式

模糊函数定义为解析函数  $V(x)$  的互联强度的傅里叶积分<sup>[19]</sup>,它是空间频率差和位置

差的函数

$$A(\Delta\nu, \Delta x) = \int_{-\infty}^{\infty} J(x, \Delta x) \exp(-2\pi i x \Delta\nu) dx. \quad (1)$$

这里互相关强度用中心及位置差坐标表示, 即

$$J(x, \Delta x) = \left\langle V\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) V^*\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right\rangle. \quad (2)$$

因此光强分布  $I(x) = J(x, 0)$ , 即

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\Delta\nu, 0) \exp(2\pi i x \Delta\nu) d\Delta\nu. \quad (3)$$

可见输入  $A_0$  通过薄扰动介质  $A_T$  后的模糊函数为卷积积分

$$A(\Delta\nu, \Delta x) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\Delta\nu - \Delta\nu', \Delta x) A_T(\Delta\nu', \Delta x) d\Delta\nu'. \quad (4)$$

如同几何光学中的矩阵理论一样<sup>[10]</sup>, 可用矩阵来表达模糊函数的传递, 常用的传递矩阵如距离  $z$  的自由空间传播,  $D(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda z & 1 \end{bmatrix}$ . 透镜,  $L(f) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda f} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . 透镜前后焦面间的傅里叶变换,  $F(f) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda f} \\ -\lambda f & 0 \end{bmatrix}$ . 因此一个由透镜和自由空间间隔组成的光学系统可用总的传递矩阵  $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  表示, 它为各透镜和间隔的传递矩阵以次序相连乘, 其中行列式  $ad - bc = 1$ . Ronchi 光栅是开口为  $h$  周期为  $T$  的两元周期性函数, 光强和振幅均为 1 或 0. 即

$$g(x) = |g(x)|^2 = \sum_n \text{rect}\left(\frac{x - nT}{h}\right). \quad (5)$$

相应

$$J_g(x, \Delta x) = \sum_n \sum_m \left\{ \text{rect}\left[\frac{x - nT}{h\Delta}\left(\frac{\Delta x - 2mT}{h}\right)\right] + \text{rect}\left[\frac{x - \left(n + \frac{1}{2}\right)T}{h\Delta}\left(\frac{\Delta x - (2m+1)T}{h}\right)\right] \right\}. \quad (6)$$

所以 Ronchi 光栅的模糊函数为

$$\begin{aligned} A_g(\Delta\nu, \Delta x) &= \sum_n \sum_m \left\{ \frac{h}{T} \Lambda\left(\frac{\Delta x - 2mT}{h}\right) \text{sinc}\left[\Delta\nu h \Lambda\left(\frac{\Delta x - 2mT}{h}\right)\right] \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \frac{h}{T} \Lambda\left(\frac{\Delta x - (2m+1)T}{h}\right) \text{sinc}\left[\Delta\nu h \Lambda\left(\frac{\Delta x - (2m+1)T}{h}\right)\right] \right\} \\ &\quad \times \delta\left(\Delta\nu - \frac{n}{T}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

应当注意: 一种很有用的简化形式是采用无限窄开口的光栅, 即

$$g(x) = \sum_n g(x - nT).$$

这时

$$A_g(\Delta\nu, \Delta x) = \frac{1}{T} \sum_n \sum_m (-1)^{mn} \delta\left(\Delta\nu - \frac{n}{T}\right) \delta(\Delta x - mT). \quad (8)$$

图 1 给出了  $h < \frac{T}{2}$  时的光栅模糊函数的轨迹。

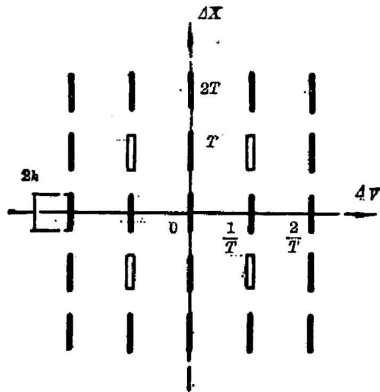


Fig. 1 Loci of the AF that represents a Ronchi grating

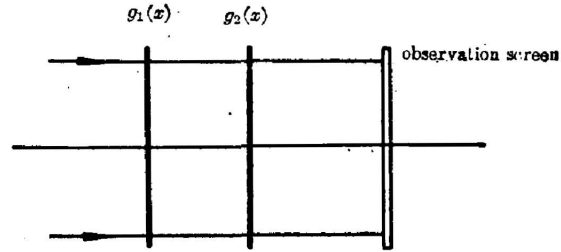


Fig. 2 Basic setup for observing the Talbot effect

### 三、光栅的基本 Talbot 效应

平行光照明下的 Talbot 效应(图 2)是一种最基本的 Talbot 效应。任何结构的光学系统中的 Talbot 和 Lau 效应都与之有密切的关联。

设从光栅到观察屏的传递矩阵为  $D(z)$ , 则观察屏处的模糊函数为

$$A_s(\Delta\nu, \Delta x) = A_g(\Delta\nu, \Delta x - \lambda z \Delta\nu).$$

为  $\Delta x = 0$  时,

$$\begin{aligned} A_s(\Delta\nu, 0) &= A_g(\Delta\nu, -\lambda z \Delta\nu) \\ &= \sum_n \sum_m \left\{ \frac{h}{T} A\left(\frac{-\lambda z \Delta\nu - 2mT}{h}\right) \text{sinc}\left[\Delta\nu h A\left(\frac{-\lambda z \Delta\nu - 2mT}{h}\right)\right] \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \frac{h}{T} A\left(\frac{-\lambda z \Delta\nu - (2m+1)T}{h}\right) \right. \\ &\quad \left. \times \text{sinc}\left[\Delta\nu h A\left(\frac{-\lambda z \Delta\nu - (2m+1)T}{h}\right)\right] \right\} \delta\left(\Delta\nu - \frac{n}{T}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

由(3)式可相应求得观察屏上的光强分布;

#### (1) Fourier 成像

显然当  $z = 2p \frac{T^2}{\lambda}$  时 ( $p$  为正整数),  $A_s(\Delta\nu, 0) = A_g(\Delta\nu, 0)$ 。因而观察屏上  $I(x) = g(x)$ , 光栅精确成像。

而当  $z = (2p+1) \frac{T^2}{\lambda}$  时,  $A_s(\Delta\nu, 0) = A_g(\Delta\nu, T)$ , 相应地  $I(x) = g\left(x - \frac{T}{2}\right)$ 。光栅也精确成像但中心平移  $\frac{T}{2}$ 。

#### (2) Fresnel 成像

在其它距离  $z$  位置上也能产生光栅状的像。称为 Talbot 成像条件, 它包括了 Fourier 成像条件, 即

$$z = \frac{\alpha}{\beta} \frac{T^2}{\lambda}. \quad (10)$$

这里  $\alpha/\beta$  为正有理数。设  $n = \beta p$ , 则

$$A_z(\Delta\nu, 0) = \sum_p \sum_m \left\{ \frac{h}{T} A\left(\frac{-\alpha p - 2m}{h} T\right) \operatorname{sinc}\left[\frac{p\beta h}{T} A\left(\frac{-\alpha p - 2m}{h} T\right)\right] \right. \\ \left. + (-1)^{p\beta} \frac{h}{T} A\left(\frac{-\alpha p - (2m+1)}{h} T\right) \right. \\ \left. \times \operatorname{sinc}\left[\frac{p\beta h}{T} A\left(\frac{-\alpha p - (2m+1)}{h} T\right)\right] \right\} \delta\left(\Delta\nu - \frac{p\beta}{T}\right). \quad (11)$$

为保证具有另点的高对比成像, 应使<sup>[7,8,17]</sup>

$$\beta < T/h. \quad (12)$$

这时

$$A_z(\Delta\nu, 0) = \begin{cases} \frac{h}{T} \sum_p \operatorname{sinc}\left(\frac{p\beta h}{T}\right) \delta\left(\Delta\nu - \frac{p\beta}{T}\right), & (\alpha \text{ 或 } \beta \text{ 至少一个为偶数}) \\ \frac{h}{T} \sum_p (-1)^{p\beta} \operatorname{sinc}\left(\frac{p\beta h}{T}\right) \delta\left(\Delta\nu - \frac{p\beta}{T}\right), & (\alpha, \beta \text{ 均为奇数}) \end{cases}$$

由(3)式可知, 适合于上述两种情况的光强统一为

$$I(x) = \frac{1}{\beta} \sum_p \operatorname{rect}\left(\frac{x - pT/\beta - \alpha T/2}{h}\right). \quad (13)$$

Fresnel 像仍为矩形脉冲串, 开口还是  $h$ , 但周期为  $T/\beta$ , 当高度降低  $\beta$  倍。比较(5)式, Fresnel 像和原光栅所包含的能量是完全相同的。因此可见那些  $n \neq \beta p$  的项将相互抵消, 事实上并不存在。由于  $\alpha T/2 = \alpha\beta T/2\beta$ , 当  $\alpha$  和  $\beta$  均为奇数时, Fresnel 像还平移半个周期, 即  $T/2\beta$ 。

#### 四、任意结构光学系统中的 Talbot 效应

任意结构光学系统中的 Talbot 效应可用一般性结构表示(如图 3)。点光源通过光学系统  $M_1$  照射光栅  $g$ , 然后再通过光学系统  $M_2$  到观察屏。

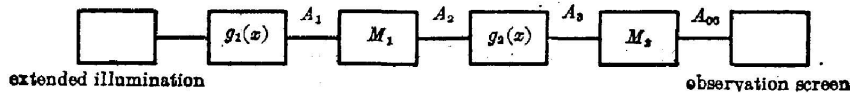


Fig. 3 Flow diagram of the Talbot effect in general optical system

显然准单色点光源的模糊函数为  $A_0(\Delta\nu, \Delta x) = \delta(\Delta x)$ 。到光栅面上为  $A_1(\Delta\nu, \Delta x) = \delta(\Delta x d_1 + c_1 \Delta\nu)$ 。通过光栅时利用(4)式有  $A_2(\Delta\nu, \Delta x) = A_g\left(\Delta\nu + \frac{d_1}{c_1} \Delta x, \Delta x\right)$ 。因此照明部分等效于光栅模糊函数经过传递矩阵  $M'_1 = \begin{bmatrix} 1 & d_1/c_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。到达观察屏上的模糊函数相当于光栅模糊函数经过总的等效传递矩阵

$$M \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = M'_1 \begin{bmatrix} 1 & d_1/c_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M_2 \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} a_2 + \frac{d_1 c_2}{c_1} & b_2 + \frac{d_1 d_2}{c_1} \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

所以观察屏上

$$A_{0b}(\Delta\nu, \Delta x) = A_g(a\Delta\nu + b\Delta x, d\Delta x + c\Delta\nu),$$

即

$$A_{0b}(\Delta\nu, 0) = A_g(a\Delta\nu, c\Delta\nu). \quad (15)$$

与基本 Talbot 效应 [(9)式] 和 Talbot 条件 [(10)式] 相比较, 可知  $A_{0b}(\Delta\nu, 0)$  表示  $g$  光栅经过等效距离  $\frac{c}{a} = \frac{c_2}{a_2 + \frac{d_1 c_2}{c_1}}$  传播后放大  $\alpha = a_2 + \frac{d_1 c_2}{c_1}$  倍的衍射自成像。

当满足广义 Talbot 条件

$$\left| \frac{c_1 c_2}{c_1 a_2 + d_1 c_2} \right| = \frac{\alpha}{\beta} T^2, \quad (16)$$

观察屏上的 Talbot 像光强分布为

$$I(x) = \frac{1}{|a|\beta} \sum_p \text{rect} \left( \frac{x - \frac{pT}{\beta} - \frac{\alpha T}{2}}{h} \right), \quad (17)$$

可见复杂的光学系统可用 (14)、(16) 和 (17) 式简单而统一地表示。

文献 [21] 分析了带有单片透镜的光学系统中的广义 Talbot 效应。由于采用近似菲涅耳衍射理论, 对复杂的系统, 计算上就十分麻烦。而采用本文的公式, 令  $M_1 = D(z_1)$  和  $M_2 = D(z_2)L(f)D(z_3)$ , 则可以极容易地导出与该文一致但更为直观的结果。还可以求出该文未涉及的 Fresnel 成像。

## 五、任何结构光学系统中的 Lau 效应

任意结构光学系统中的 Lau 效应可用一般性结构表示 (见图 4)。空间非相干准单色光照明下的第一光栅  $g_1$  通过光学系统  $M_1$  后再通过第二光栅  $g_2$ , 最后经光学系统  $M_2$  到观察屏。

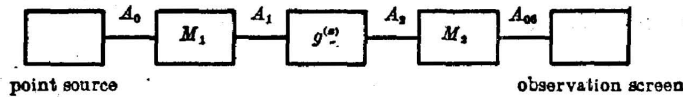


Fig. 4 Flow diagram of the Lau effect in a general optical system

用空间非相干光照明第一光栅  $g_1$ , 相当于产生一个光栅状函数的空间非相干照明光源, 其光强分布为  $g_1(x)$ 。因此互联强度为  $J_1(x, \Delta x) = g_1(x)\delta(\Delta x)$ 。这时第一光栅的模糊函数为  $A_1(\Delta\nu, \Delta x) = A_{g1}(\Delta\nu, 0)\delta(\Delta x)$ 。通过光学系统  $M_1$  后  $A_2(\Delta\nu, \Delta x) = A_{g1}(a_1\Delta\nu + b_1\Delta x, 0)\delta(d_1\Delta x + c_1\Delta\nu)$ 。

经过  $g_2$  时使用 (4) 式, 有

$$A_3(\Delta\nu, \Delta x) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{g2}(\Delta\nu - \Delta\nu', \Delta x) A_{g1}(a_1\Delta\nu' + b_1\Delta x, 0)\delta(d_1\Delta x + c_1\Delta\nu')d\Delta\nu'.$$

再通过  $M_2$  后在观察屏上

$$A_{0b}(\Delta\nu, \Delta x) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{g2}(a_2\Delta\nu + b_2\Delta x - \Delta\nu', d_2\Delta x + c_2\Delta\nu) \times A_{g1}(a_1\Delta\nu' + b_1d_2\Delta x + b_1c_2\Delta\nu, 0)\delta(d_1d_2\Delta x + d_1c_2\Delta\nu + c_1\Delta\nu')d\Delta\nu'. \quad (18)$$

利用  $g$  函数的性质, 相应

$$A_{0b}(\Delta\nu, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{g2}(a_2\Delta\nu - \Delta\nu', c_2\Delta\nu) A_{g1}(a_1\Delta\nu' + b_1c_2\Delta\nu, 0)\delta(d_1c_1\Delta\nu + c_1\Delta\nu')d\Delta\nu' = A_{g1}(s_1\Delta\nu, 0)A_{g2}(s_2\Delta\nu, c_2\Delta\nu). \quad (19)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= (b_1 c_1 c_2 + a_1 d_1 c_2) / c_1, \\ s_2 &= (c_1 a_2 + d_1 c_2) / c_1. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

显然  $A_{g1}(s_1 \Delta\nu, 0)$  表示  $g_1(x)$  放大  $s_1$  倍, 同时由上节分析可见  $A_{g2}(s_2 \Delta\nu, c_2 \Delta\nu)$  表示放大  $s_2$  倍的  $g_2(x)$  经过等效距离  $c_2/s_2$  传播后的衍射像。上式展开后

$$\begin{aligned} A_{00}(\Delta\nu, 0) &= \sum_k \frac{h_1}{T_1} \operatorname{sinc}(\Delta\nu h_1) \delta\left(s_1 \Delta\nu - \frac{K}{T_1}\right) \\ &\quad \times \sum_n \sum_m \left\{ \frac{h_2}{T_2} A\left(\frac{c_2 \Delta\nu - 2mT_2}{h_2}\right) \operatorname{sinc}\left[\Delta\nu h_2 A\left(\frac{c_2 \Delta\nu - 2mT_2}{h_2}\right)\right] \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \frac{h_2}{T_2} A\left(\frac{c_2 \Delta\nu - (2m+1)T_2}{h_2}\right) \right. \\ &\quad \left. \times \operatorname{sinc}\left[\Delta\nu h_2 A\left(\frac{c_2 \Delta\nu - (2m+1)T_2}{h_2}\right)\right] \right\} \delta\left(s_2 \Delta\nu - \frac{n}{T_2}\right). \quad (19)' \end{aligned}$$

由两个  $g$  函数相乘的性质可见, 当  $\Delta\nu = \frac{K}{s_1 T_1} = \frac{n}{s_2 T_2}$  时上式才不会为零。故必须满足

$$\frac{K}{n} = s_1 T_1 / s_2 T_2. \quad (21)$$

这称为广义 Lan 效应的聚焦条件, 类似于文献[9]中的定义。对于  $A_{g2}$ , 满足广义 Talbot 条件

$$|c_2/s_2| = \frac{\alpha}{\beta} T_2^2. \quad (22)$$

这时

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_{g2}(s_2 \Delta\nu, c_2 \Delta\nu) \exp(2\pi i \Delta\nu x) d\Delta\nu = \frac{1}{\beta |s_2|} \sum_n \operatorname{rect}\left(\frac{\frac{x}{s_2} - \frac{nT_2}{\beta} - \frac{\alpha T_2}{2}}{h_2}\right).$$

$$\text{而} \quad \int_{-\infty}^{\infty} A_{g1}(s_1 \Delta\nu, 0) \exp(2\pi i \Delta\nu x) d\Delta\nu = \frac{1}{|s_1|} \sum_k \operatorname{rect}\left(\frac{\frac{x}{s_1} - kT_1}{h_1}\right).$$

因此观察屏上的 Lau 条纹光强分布为

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} A_{00}(\Delta\nu, 0) \exp(2\pi i \Delta\nu x) d\Delta\nu \\ &= \frac{1}{|s_1| |s_2| \beta} \sum_k \operatorname{rect}\left(\frac{\frac{x}{s_1} - kT_1}{h_1}\right) \otimes \sum_n \operatorname{rect}\left(\frac{\frac{x}{s_2} - \frac{nT_2}{\beta} - \frac{\alpha T_2}{2}}{h_2}\right), \quad (23) \end{aligned}$$

其中  $\otimes$  表示一维卷积积分。这在空间直接描述。Lau 条纹是等效第一光栅与等效第二光栅衍射 Talbot 自成像之间的卷积积分。产生 Lau 条纹的必要条件之一是第二光栅必须满足 Talbot 自成像条件, 这清楚地表明了 Talbot 效应和 Lau 效应之间的内在联系, 因此 Talbot 成像条件也就是 Lau 条件。从上式还可以看到第一等效光栅的周期为  $s_1 T_1$ , 第二等效光栅的自成像周期为  $s_2 T_2 / \beta$ , 其比例为  $s_1 T_1 \beta / s_2 T_2$ 。因此(21)式意味着两等效光栅的周期具有整数对整数的比例, (23)式的卷积积分仍可得到周期性的光强分布, 即 Lau 条纹。所以聚焦条件是产生 Lau 效应的另一个必要条件。

分析 Talbot 效应可知: (12)式条件下能产生具有零点的高对比自成像。为了得到具有零点的高对比 Lau 条纹, 从卷积运算过程可以看到应使等效第一光栅的开口宽度  $s_1 h_1$  小于

等效第二光栅自成像的周期, 因此还需满足

$$\beta < \left| \frac{n}{K} \frac{T_1}{h_1} \right|. \quad (24)$$

下面根据通用公式分析三种最常见的结构:

### (1) 一般 Lau 效应

这是用两周期相同的光栅在透焦面上观察 Lau 条纹的结构, 也就是所有参考文献中所分析的结构。设光栅  $g_1$  到  $g_2$  的距离为  $z_{12}$ ,  $g_2$  到透镜的距离为  $z'$ , 透镜焦距  $f$ 。则  $M_1 = D(z_{12})$ ,  $M_2 = D(z' - f)F(f)$ 。所以(23)式的 Lau 条纹表达式中  $s_1 = -f/z_{12}$  和  $s_2 = f/z_{12}$ 。Lau 条件为  $z_{12} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{T_1^2}{\lambda}$ 。而  $\frac{n}{k} = -1$ , 与系统参数无关, 自然满足聚焦条件。

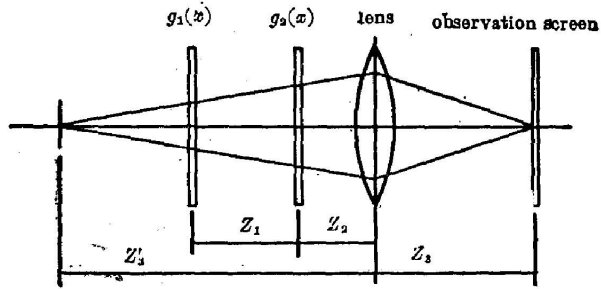


Fig. 5 A typical arrangement for diffraction correlation

### (2) 光栅成像<sup>[21]</sup>

周期为  $T_1$  的第一光栅  $g_1$  到周期为  $T_2$  的第二光栅  $g_2$  的距离为  $z_{12}$ ,  $g_2$  到观察屏的距离为  $z_2$ 。所以  $M_1 = D(z_{12})$  和  $M_2 = D(z_2)$ 。则  $s_1 = -\frac{z_2}{z_{12}}$  和  $s_2 = \frac{z_{12} + z_2}{z_{12}}$ 。Lau 条件为  $\frac{z_{12}z_2}{z_{12} + z_2} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{T_2^2}{\lambda}$ 。聚焦条件为  $z_2 = -z_{12} / \left( 1 + \frac{k}{n} \frac{T_1}{T_2} \right)$ 。

### (3) 衍射相关

带透镜的 Lau 装置事实上是一种衍射相关器<sup>[22]</sup>, 由几何光学中的离焦相关(卷积)器而来<sup>[23]</sup>。图 5 示出一种典型结构。显然  $M_1 = D(z_1)$  和  $M_2 = D(z_2)L(f)D(z_3)$ 。则  $s_1 = -(z_3 - f)(z'_3 - z_2)/fz_1$  和  $s_2 = (z_3 - f)(z'_3 - z_1 - z_2)/fz_1$ 。Lau 条件为  $z_1(z'_3 - z_2)/(z'_3 - z_1 - z_2) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{T_2^2}{\lambda}$ 。聚焦条件是  $\frac{k}{n} = \frac{-T_1(z'_3 - z_2)}{T_2(z'_3 - z_1 - z_2)}$ 。这里  $\frac{1}{z_3} + \frac{1}{z'_3} = \frac{1}{f}$ , 为观察面的共轭物面。我们已在文献[22]中给出了一些实验。该文中采用的是近似菲涅耳衍射理论。

上述三种结构中  $s_1$  为负值, 事实上 Lau 条纹是第二等效光栅自成像与第一光栅的相关积分。

应当注意, 因为光栅可作一维表示而本文采用了一维模糊函数, 但系统是两维的。因此在任何结构光学系统的 Talbot 效应分析中, 当放大倍数  $|\alpha| \neq 1$  时光强表达式(17)中  $|\alpha|$  应当修正为  $|\alpha|^2$ 。同样, 在任何结构光学系统的 Lau 效应分析中, 光强表达式(23)中的放大倍数  $|s_1|$  和  $|s_2|$  应当修正为  $|s_1|^2$  和  $|s_2|^2$ 。这种两维修正并不会产生其它任何影响。

## 六、Talbot-Ltu 效应中的相位问题

周期为  $T$  的振幅光栅产生周期为  $T/\beta$  的 Talbot 像。图 6(a) 是  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$  时的模糊函数分布。为简单起见取  $h \rightarrow 0$ , (参见(8)式)。横轴上  $\Delta v$  的间隔为  $\frac{2}{T}$ , 所以 Talbot 像的光强

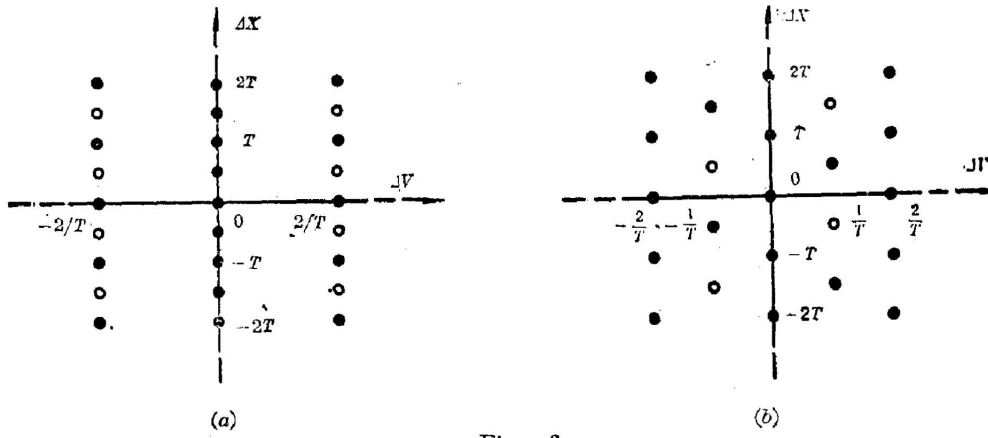


Fig. 6

- (a) Loci of the Talbot-image AF When  $\alpha/\beta=1/2$ ;
- (b) Loci of the grating AF with the period of  $T/3$

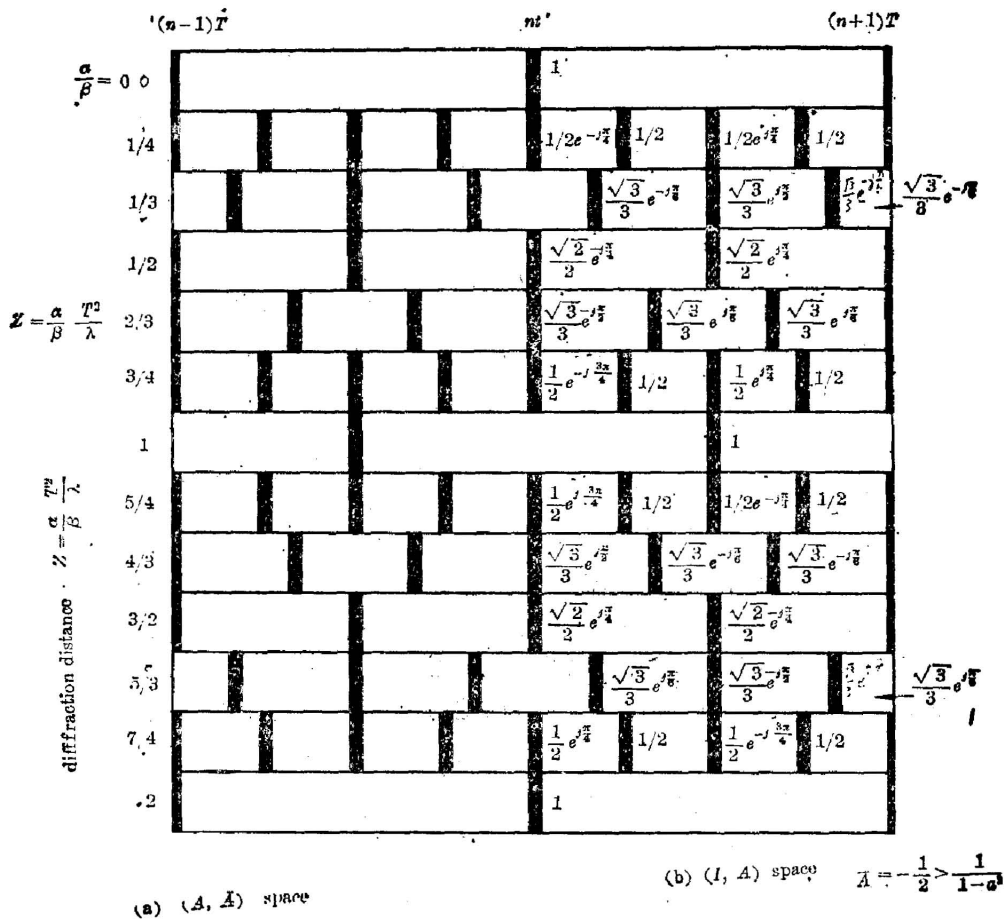


Fig. 7 Phase distribution of Talbot imaging with different  $\alpha/\beta$



周期为  $T/2$ 。事实上周期为  $\frac{T}{2}$  的振幅光栅的模糊函数如图 6(b) 所示。除了横轴上分布相同外,其它是很不一致的。这说明该 Talbot 像不是纯振幅型的,而具有一定的相位分布。可以证明此时 Talbot 像的复振幅为

$$g_T(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \left[ e^{-j\frac{\pi}{4}} \delta(x-nT) + e^{j\frac{\pi}{4}} \delta\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right)T\right) \right].$$

根据计算,图 7 表示  $\delta$  函数光栅在  $\frac{\alpha}{\beta} = 0$  到 2 之间的一些 Talbot 像的复振幅分布 ( $\frac{\alpha}{\beta} > 2$  后保持相同的周期性变化)。可以看出振幅光栅的 Fourier 像仍为振幅型而 Fresnel 像有附加相位因子。如  $\beta = T/h$ , 则 Fresnel 像为纯相位分布。同样可以推论,若光栅具有与某个  $\frac{\alpha}{\beta}$  值相应的相位分布,那么随距离增加将产生与图 7 排列次序相同的振幅型或带相位因子的 Talbot 像。

Lau 条纹为两等效光栅光强的卷积(相关)积分。显然第一光栅不能是相位光栅,因为  $|g(x)|^2 = 1$  将使卷积积分为均值。但是第二光栅可以是相位光栅,只要它的 Talbot 像能转化为振幅型,例如相位差为  $\frac{\pi}{2}$  的相位光栅。

### 参 考 文 献

- [1] F. Talbot; *Phil. Mag.*, 1836, **9**, 401.
- [2] J. M. Cowley, A. F. Moodie; *Proc. Phys. Soc. (London)*, 1962, **B157**, 53.
- [3] E. Lau; *Annals. Phys.*, 1948, **6**, 417.
- [4] J. T. Winthrop, C. R. Worthington; *J. O. S. A.*, 1965, **55**, No. 4 (Apr), 373~381.
- [5] W. D. Montgomery; *J. O. S. A.*, 1967, **57**, No. 6 (Jun), 772~778.
- [6] J. Jahns, A. W. Lohmann; *Opt. Comm.*, 1979, **28**, No. 3 (Mar), 263~267.
- [7] F. Gori; *Opt. Comm.*, 1979, **31**, No. 1 (Oct), 4~8.
- [8] S. Sudal, B. J. Thompson; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, No. 6 (Mar), 1107~1116.
- [9] G. J. Swanson, E. N. Leith; *J. O. S. A.*, 1982, **72**, No. 5 (May), 552~555.
- [10] K. H. Brenner, A. W. Lohmann, et al.; *Opt. Comm.*, 1983, **46**, No. 1 (Jun), 14~17.
- [11] J. Sethuraman; *Opt. Comm.*, 1985, **52**, No. 6 (Jan), 377~379.
- [12] 刘立人;《光学学报》, 1985, **5**, No. 6 (6月) 481~487.
- [13] A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castaneda; *Opt. Acta*, 1983, **30**, No. 4 (Apr), 475~479.
- [14] G. Indebetouw; *Opt. Acta*, 1984, **31**, No. 5 (May), 531~539.
- [15] J. Jahns, A. W. Lohmann, J. Ojeda-Castaneda; *Opt. Acta*, 1984, **31**, No. 3 (Mar), 313~324.
- [16] J. Ojeda-Castaneda, E. E. Sicre; *Opt. Acta*, 1985, **32**, No. 1 (Jan), 17~26.
- [17] 刘立人;《光学学报》, (即将发表)。
- [18] P. M. Woodward; *Probability and Information Theory with Application to Radar*, (Oxford, Pergamon Press, 1953), 118~120.
- [19] A. Papoulis; *J. O. S. A.*, 1974, **64**, No. 6 (Jun), 779~788.
- [20] J. -P. Guigay; *Opt. Comm.*, 1978, **26**, No. 2 (Aug), 136~138.
- [21] 廖红江, 顾去吾;《光学学报》, 1985, **5**, No. 4 (4月), 331~335.
- [22] 刘立人, 待发表。
- [23] J. W. Goodman; *Introduction to Fourier Optics*, (McGraw-Hill, 1968), 163~165.

## Ambiguity function and general Talbot-Lau effects

LIU LIREN

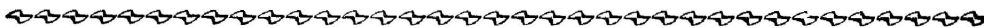
(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 23 April 1986; revised 18 August 1986)

### Abstract

The Talbot and Lau effects of Ronchi gratings are treated by the ambiguity function in this paper. Furthermore, both effects are developed as fit any optical systems. Because of quasi-ray-optical operation of the AF, two general formulas directly describing the patterns of the Talbot and Lau fringes respectively are derived in a quite simple form. All the variables in the formulas depend only on the transfer matrices of the optical system used. The Talbot and Lau effects of complex gratings are also discussed.

**Key Words:** Ambiguity function; Ronchi gratings; Talbot-Lau effects; Transfer matrices.



### 《剪切干涉仪及其应用》

徐德衍编著; 机械工业出版社出版, 1987年3月, 410页, 估价2.95元

近二十年来, 光干涉计量技术的重要分支——剪切干涉仪理论、技术和应用的研究非常活跃, 其应用已远远超过初期在大镜面光学元件的检验。特别是激光技术和计算机技术的飞速发展, 为剪切干涉技术的发展和应创造了良好条件。本书是剪切干涉术的系统总结和作者二十年来工作的结晶。

《剪切干涉仪及其应用》是一本专门阐述剪切干涉术的国内外第一本专著。该书由王之江教授和张以谟教授审定目录、指导。全书共八章, 分三大部分。第一部分(第一、二、三章)对光干涉、剪切干涉的概况、基本理论和技术等作全面叙述; 第二部分(第四、五、六章)详尽描述了各种棱镜式、平板式和光栅式三类常用剪切干涉仪的基本原理, 使用方法和实例解析; 第三部分(第七和八章)概述应用及发展动向。书末附录为制作及应用剪切干涉仪提供了必要的资料。

该书内容丰富, 叙述深入浅出, 章节编排合理。此书必将对我国光学干涉技术及计量的发展及推广应用起着极为重要的推动作用。该书适合于光学工厂有一定文化水平的技术工人、技术人员; 从事光学和激光技术的研究单位的科技人员; 高等院校光数专业的大学生、研究生和教师; 从事实验力学等领域的工程技术人员等都有一定的实用价值。

(邹海兴)