

含可饱和吸收体的单模驻波 激光系统的定态行为

李应刚 张纪岳

(西北大学物理系)

提 要

具体给出了含可饱和吸收体的单模驻波激光系统的哈密顿(Hamiltonian)量和序参量运动方程,并对序参量的定态解做了线性稳定性分析。结果表明,驻波系统在阈值附近的定态行为(非平衡相变行为、双稳行为、临界点附近的指数行为等)与行波系统定性类似,但具体细节有异。特别不同于行波的是,驻波情形下三个定态解中的 I_- 分支有可能实现。

关键词: 可饱和吸收体,单模驻波,定态行为。

一、引 言

激光系统是一个典型的远离平衡的非线性多体开放系统,对其辐射的描述本身就是一个非平衡统计力学问题。带有可饱和吸收体的激光系统一直是非平衡统计物理工作者感兴趣的对象之一。但是,对于这种激光系统,人们大都研究的是行波情形^[1~4],很少有人对含可饱和吸收体的驻波系统作具体分析。本文试图对含可饱和吸收体的单模驻波激光系统的定态跃迁行为(相变行为)、双稳性、以及临界指数行为作一探讨,以弄清驻波系统在上述诸方面与行波系统有什么异同点。

本文并非必须从量子处理入手,但为给以后对驻波系统做全量子处理提供一个出发点,我们还是从量子处理着手建立了序参量方程。

二、模型 哈密顿量 序参量运动方程

考虑由两个平行平面镜构成的单模驻波激光器,其长度为 L 、横截面积为 B 的腔内充满两种二能级均匀展宽型介质:一为激活物质(放大体),另一为损耗物质(吸收体)。两种原子均匀地分布于腔内,不考虑都普勒(Doppler)加宽和碰撞加宽。

采用文献[5]中的理论处理方法,将实际的激光系统视为纯粹(Proper)系统和热库两部分。纯粹系统的哈密顿量可写为

$$\left. \begin{aligned}
 H &= H_F + H_A + H_{\bar{A}} + H_{FA} + H_{F\bar{A}} \\
 &= \omega b^\dagger b + \frac{\omega_0}{2} \sum_{\mu=1}^N \sigma_{\mu} + \frac{\tilde{\omega}_0}{2} \sum_{\mu=1}^{\bar{N}} \bar{\sigma}_{\mu} + \sum_{\mu=1}^N (g_{\mu} \alpha_{\mu} b^\dagger + g_{\mu}^* \alpha_{\mu}^\dagger b) + \sum_{\mu=1}^{\bar{N}} (\bar{g}_{\mu} \alpha_{\mu} b^\dagger + \bar{g}_{\mu}^* \alpha_{\mu}^\dagger b), \\
 g_{\mu} &= 2ie(2\pi\omega)^{1/2} \cos kz \int \phi_{1\mu}^*(\mathbf{x}) \hat{x} \phi_{2\mu}(\mathbf{x}) d^3x,
 \end{aligned} \right\} (1)$$

收稿日期: 1986年7月26日; 收到修改稿日期: 1986年9月29日

式中 H_F 为自由光场的哈密顿量, $H_A(H_X)$ 为激活(吸收)介质的哈密顿量*, $H_{FA}(H_{FX})$ 为光场与激活(吸收)介质之间的相互作用哈密顿量。 g_μ 为驻波情形下的耦合常数, 这里 k 为光场的波矢, z 为第 μ 个原子沿腔纵向上的位置坐标(忽略光场的横向效应), $\phi_{i\mu}$ 为第 μ 个原子第 i 个电子态的本征波函数。

(1)式中的 ω 、 b^+ 、 b 分别为光子的频率、产生算子和湮灭算子。 ω_0 、 N 分别为激活物质原子的二能级之差和原子数, 而

$$\sigma_\mu = a_{\mu 2}^+ a_{\mu 2} - a_{\mu 1}^+ a_{\mu 1}, \quad \alpha_\mu = a_{\mu 1}^+ a_{\mu 2} (\alpha_\mu^+ = a_{\mu 2}^+ a_{\mu 1}), \quad (2)$$

分别为第 μ 个原子的粒子数反转算子和偶极矩湮灭(产生)算子。 $a_{\mu i}^+$ 、 $a_{\mu i}$ 分别为第 μ 个原子第 i 个电子态上的产生和湮灭算子。

由于我们只考虑单光子过程, 特别只考虑调谐情况, 所以在(1)式中已经做了旋波近似。

可以证明^[6], 热库对纯粹系统的全部影响是给它带来阻尼和涨落, 考虑到这一点, 由(1)式及海森堡运动方程可得:

$$\left. \begin{aligned} \dot{b} &= -\kappa b - i\omega b - i \sum_{\mu=1}^N g_\mu \alpha_\mu - i \sum_{\mu=1}^N \bar{g}_\mu \bar{\alpha}_\mu + F(t), \\ \dot{\alpha}_\mu &= \gamma_\perp \alpha_\mu - i\omega_0 \alpha_\mu + i g_\mu^* \sigma_\mu b + \bar{\Gamma}_\alpha(t), \\ \dot{\sigma}_\mu &= \gamma_\parallel (d_0 - \sigma_\mu) + 2i g_\mu \alpha_\mu b^+ - 2i g_\mu^* \alpha_\mu^+ b + \bar{\Gamma}_\sigma(t), \\ \dot{\bar{\alpha}}_\mu &= -\bar{\gamma}_\perp \bar{\alpha}_\mu - i\bar{\omega}_0 \bar{\alpha}_\mu + i \bar{g}_\mu^* \sigma_\mu^+ b + \bar{\Gamma}_\alpha(t), \\ \dot{\bar{\sigma}}_\mu &= \bar{\gamma}_\parallel (\bar{d}_0 - \bar{\sigma}_\mu) + 2i \bar{g}_\mu \bar{\alpha}_\mu b^+ - 2i \bar{g}_\mu^* \bar{\alpha}_\mu^+ b + \bar{\Gamma}_\sigma(t), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中各方程右边的首项和末项分别为热库引起的阻尼项和涨落项。 特别是 $d_0 > 0$, $\bar{d}_0 < 0$ 为热库中泵浦引起的“阻尼”。

为分析系统的定态行为, 我们

- (1) 对运动方程实行平均操作, 忽略场与原子变量间的关联, 并假定涨落为高斯型。
- (2) 考虑有实际意义的完全调谐情况^[1], 即令 $\omega = \omega_0 = \bar{\omega}_0$ 。
- (3) 消去序参量对时间的指数依赖因子^[6]。
- (4) 在“好腔”条件下做绝热近似^[6]。

在上述条件下, 由(3)式及 b 的共轭方程可得如下的序参量运动方程

$$\dot{I} = 2 \left\{ -1 + \frac{d_0 g^2}{\gamma_\perp \kappa} \sum_{\mu=1}^N \frac{\cos^2(kz)}{1 + \cos^2(kz) I} + \frac{\bar{d}_0 \bar{g}^2}{\bar{\gamma}_\perp \kappa} \sum_{\mu=1}^N \frac{\cos^2(kz)}{1 + a \cos^2(kz) I} \right\} I, \quad (4)$$

式中 $I = S b^+ b = S |b|^2$, $S = (4g^2/\gamma_\perp \gamma_\parallel)$, $a = (\bar{S}/S)$, 而 g^2 满足 $g_\mu^* g_\mu = g^2 \cos^2 kz$ 。 考虑到 $N(\bar{N}) \gg 1$, 把求和换为积分

$$\sum_{\mu=1}^N \frac{\cos^2(kz)}{1 + I \cos^2(kz)} \rightarrow \left(\frac{N}{V} \right) E \int_0^L \frac{\cos^2(kz)}{1 + I \cos^2(kz)}, \quad (V = LE)$$

积分中利用了驻波条件 $k = (n\pi/L)$, 且令

$$A = \frac{g^2 N}{2\kappa \gamma_\perp} d_0, \quad \bar{A} = \frac{\bar{g}^2 \bar{N}}{2\kappa \bar{\gamma}_\perp} \bar{d}_0. \quad (5)$$

于是(4)式化为

$$\dot{I} = 2 \left[-1 + \frac{2A}{I} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+I}} \right) + \frac{2\bar{A}}{aI} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+aI}} \right) \right] I, \quad (6)$$

* 与吸收体有关的量上加“-”, 以示区别, 下同。

式中 A, \bar{A} 只依赖于泵浦功率。在(4)、(6)式中, 我们已对时间重新进行了标度。

三、定态解 线性稳定性分析

我们只分析阈值附近的定态行为。在阈值附近有

$$I \ll 1, \tag{7}$$

假定 $A+a^2\bar{A} \neq 0$, 于是对(6)式展开, 取至三级得

$$\dot{I} = 2 \left[(A + \bar{A} - 1) - \frac{3}{4} (A + a\bar{A}) I + \frac{5}{8} (A + a^2\bar{A}) I^2 \right] I. \tag{8}$$

(8)式有三个定态解

$$\bar{I} = \left\{ \begin{array}{l} I_0 = 0, \\ I_{\pm} = \frac{3}{5} [B \pm (B^2 - C)^{1/2}], \\ B = \frac{A + a\bar{A}}{A + a^2\bar{A}}, C = \frac{40}{9} \frac{A + \bar{A} - 1}{A + a^2\bar{A}}. \end{array} \right. \tag{9}$$

为作稳定性分析, 设

$$I(t) = \bar{I} + \Delta I \exp(\lambda t), \tag{10}$$

将(10)式代入(8)式, 取至小偏差 ΔI 的一阶项可得稳定条件

$$\bar{I} = I_0: A + \bar{A} < 1, \tag{11}$$

$$\bar{I} = I_{\pm}: \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{8} (A + a\bar{A}) I_{\pm} < A + \bar{A} - 1, \\ \text{或 } (A + a^2\bar{A}) I_{\pm} < \frac{3}{5} (A + a\bar{A}). \end{array} \right. \tag{12}$$

把(9)式代入(12)式还可得如下的稳定性判据

当 $A + a^2\bar{A} > 0$ 时, I_- 稳定, I_+ 不稳定;

当 $A + a^2\bar{A} < 0$ 时, I_+ 稳定, I_+ 不稳定。

表 1 是用稳定条件和判据对 \bar{I} 进行分析的结果。对表 1 中注有“*”的定态解, 还需确定其为实的范围。这由条件

$$B^2 - C = 0, \tag{13}$$

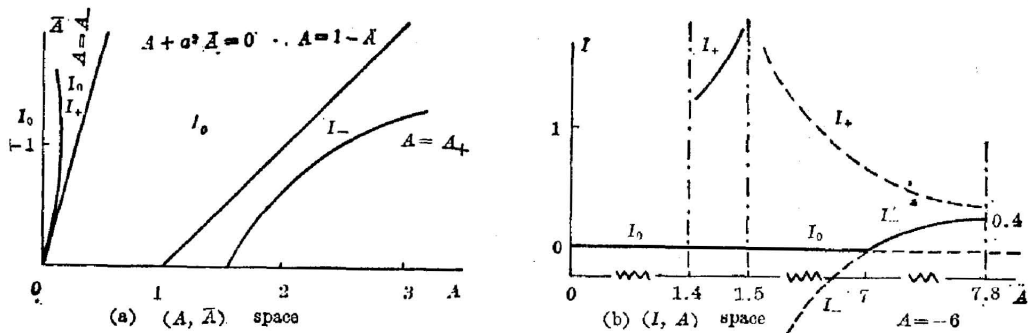


Fig. 1 Stationary solutions [$a = (1/2) < 1$] in (a) are stable within the region where they emerge. Solid curves in (b) denote the physical solutions, while dashed curves non-physical solutions (negative or unstable)

Table 1

a	range of A value		B	C	on real, positive condition	on stable condition	
$a < 1$	$A + \bar{A} > 0$	$A + \bar{A} < 1$	> 0	< 0	$I_0 I_+$	I_0	
		$A + \bar{A} = 1$	> 0	0	$I_0 I_+$	threshold	
		$A + \bar{A} > 1$ *	> 0	> 0	$I_0 I_+ I_-$	I_-	
	$A + \bar{A} = 0$		> 0	< 0	$I_0 I_+$	I_0	
	$A + \bar{A} < 0$		$-a\bar{A} < A < -\bar{A}$	≥ 0	< 0	$I_0 I_+$	I_0
			$-a^2\bar{A} < A < -a\bar{A}$	< 0	< 0	$I_0 I_+$	I_0
$A < -a^2\bar{A}$ *			> 0	> 0	$I_0 I_+ I_-$	$I_0 I_+$	
$a = 1$	$A + \bar{A} > 0$	$A + \bar{A} < 1$	> 0	< 0	$I_0 I_+$	I_0	
		$A + \bar{A} = 1$	> 0	0	$I_0 I_+$	threshold	
		$1 < A + \bar{A} \leq 40/31$	> 0	> 0	$I_0 I_+ I_-$	I_-	
	$A + \bar{A} = 0$		$\frac{0}{0}$	∞	I_0	I_0	
	$A + \bar{A} < 0$		> 0	> 0	I_0	I_0	
$a > 1$	$A + \bar{A} > 0$	$-\bar{A} < A < -a\bar{A}$	$A < 1 - \bar{A} < -a\bar{A}$ *	> 0	> 0	$I_0 I_+ I_-$	$I_0 I_+$
			$A = 1 - \bar{A} < -a\bar{A}$	> 0	0	$I_0 I_+$	threshold
			$1 - \bar{A} < A < -a\bar{A}$	> 0	< 0	$I_0 I_+$	I_+
		$A = -a\bar{A}$	$A < 1 - \bar{A}$	0	> 0	I_0	I_0
			$A = 1 - \bar{A}$	0	0	$I_0 = I_+ = I_-$	critical point
			$A > 1 - \bar{A}$	0	< 0	$I_0 I_+$	I_+
		$-a\bar{A} < A < -a^2\bar{A}$	$A < 1 - \bar{A} < -a^2\bar{A}$	< 0	> 0	I_0	I_0
			$A = 1 - \bar{A} < -a^2\bar{A}$	< 0	0	$I_0 I_+$	threshold
			$1 - \bar{A} < A < -a^2\bar{A}$	< 0	< 0	$I_0 I_+$	I_+
	$A > -a^2\bar{A}$	$A < 1 - \bar{A}$	> 0	< 0	$I_0 I_+$	I_0	
		$A = 1 - \bar{A}$	> 0	0	$I_0 I_+$	threshold	
		$1 - \bar{A} < A$	> 0	> 0	$I_0 I_+ I_-$	I_-	
	$A + \bar{A} = 0$	$A = -\bar{A} < 40(a^2 - 1)/9(1 - a)^2$	> 0	> 0	I_0	I_0	
		$A = -\bar{A} \geq 40(a^2 - 1)/9(1 - a)^2$	> 0	> 0	$I_0 I_+ I_-$	$I_0 I_+$	
	$A + \bar{A} < 0$		> 0	> 0	$I_0 I_+ I_-$	$I_0 I_+$	

决定。(13)式的两个解 $A_{\pm} = A_{\pm}(a, \bar{A})$ 正好给出 I_{\pm} 为实的区间边界。

图 1 和图 2 示出了 $a < 1$ 和 $a > 1$ 两种情况下分别在 (A, \bar{A}) 和 (I, A) 空间所看到的稳定性分析结果。

$a = 1$ 情况下系统在阈值附近的行为与 $a < 1$ 情况下相同(见图 1), 故略。

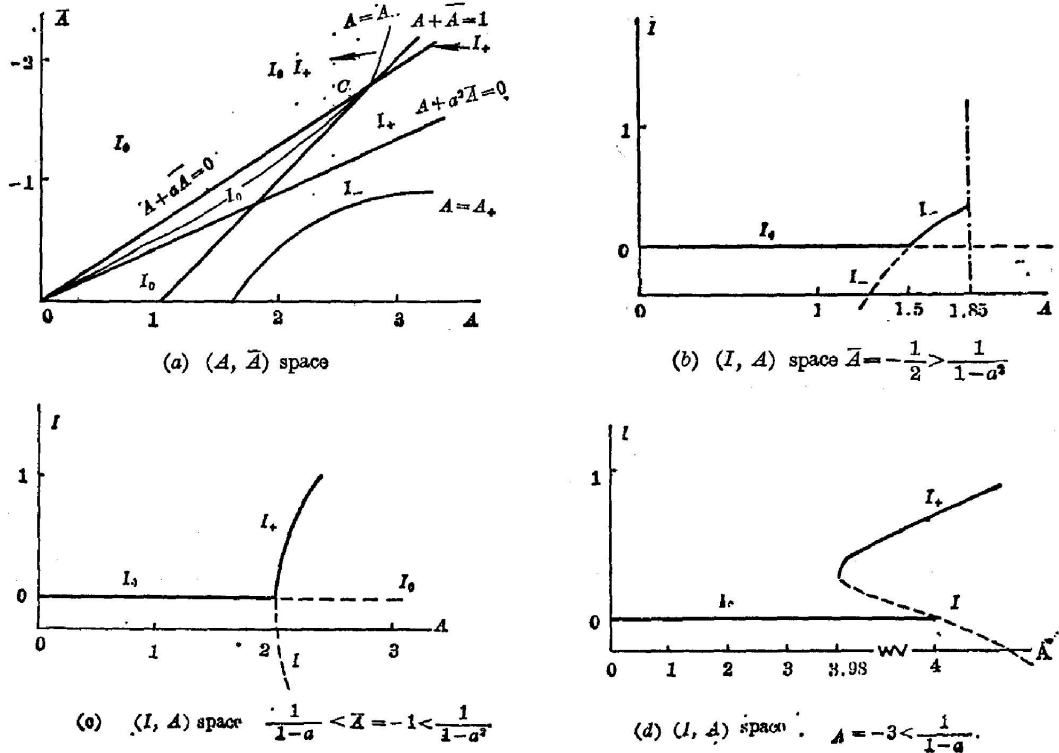


Fig. 2 Analysis of stability [$a = (3/2) > 1$]

四、定态行为结论

稳定性分析结果表明, 我们所讨论的系统有如下的定态行为

1. 阈值附近的类相变行为

由(11)式知, 系统的阈值由

$$A + \bar{A} = 1 \tag{14}$$

决定。当改变泵浦参数时, 系统的定态在阈值上会发生转迁, 称其为非平衡相变。它和阻尼谐振子中的对称性破缺不稳定性、流体动力学中的稳定性交换、以及数学中所说的 Hopf 分支乃是一回事。在广义相空间 (A, \bar{A}) 中, (14) 式就是一条相变线。根据激光的相变类比理论^[6,7]和文献[8], 可以依据 I 在阈值上是否连续而对相变分类:

(1) $a \leq 1$

当 $A < 1 - \bar{A}$ 时, 系统处于零相 (I_0 分支), 增大 A 至 $1 - \bar{A}$, 系统由零相连续地过渡到非零相 (I_- 分支), 因而是非平衡二级相变(见图 1)。

(2) $a > 1$

这时对于给定的 a , 系统的行为还强烈地依赖于 \bar{A} 与 a 的关系。有三种情况:

(i) $(1-a^2)^{-1} < \bar{A} < 0$, 系统的行为与 $a \leq 1$ 完全相同(见图 2(b))。

(ii) $(1-a)^{-1} \leq \bar{A} \leq (1-a^2)^{-1}$, 与 $a \leq 1$ 不同的是, 系统经历一个非平衡二级相变后处于 I_+ 分支(见图 2(c))。

(iii) $\bar{A} < (1-a)^{-1}$, 这时与 $a \leq 1$ 的情形全然不同。系统在相变点上从 I_0 突然跳跃到 I_+ , 因而将有非平衡一级相变发生(见图 2(d))。

2. 双稳性

当 $a > 1$ 且 $\bar{A} < (1-a)^{-1}$ 时, 出现了双稳区。系统在该区上究竟处于那个稳态完全取决于其未进入该区时的初态(见图 3)。显然, 出现双稳性的充要条件是

$$a > a_{\min} = (\bar{A} - 1) / \bar{A}. \quad (15)$$

这与行波情形下的结果完全一致^[4]。

3. 临界点附近的指数行为

在图 2(a)中, 由 $A + \bar{A} = 1$ 和 $A + a\bar{A} = 0$ 所决定的相空间中的点

$$O = (A_c, \bar{A}_c) = \left(\frac{a}{a-1}, \frac{1}{1-a} \right), \quad (16)$$

是一级相变和二级相变的连接点, 称其为临界点。

当 $(A, \bar{A}) \rightarrow (A_c, \bar{A}_c)$ 时, 由(8)式和(10)式知, 对于 I_0 有 $\lambda \rightarrow 0$, 因而驰豫时间 $\tau = \tau^{-1} \rightarrow \infty$ 。这就是临界慢化现象。

为了考察系统在 O 附近的指数行为, 引入广义热力学势^[6]

$$\dot{\alpha} = - \frac{\partial V(\alpha, A, \bar{A})}{\partial \alpha}, \quad (17)$$

其中 $\alpha = S^{1/2} |b|$ 。仿照文献[4, 9]的方法, 由(6)式及定义(17)式可求得势 V 在 O 附近的渐近形式为

$$A_{sv} V(\alpha, \Delta A, \Delta \bar{A}) = \frac{5}{48} \alpha \alpha^6 - \frac{1}{2} \Delta A \alpha^2 - \frac{1}{2} \Delta \bar{A} \alpha^2, \quad (18)$$

$$(\alpha, \Delta A, \Delta \bar{A}) \rightarrow (0, 0, 0)$$

其中 $\Delta A = A - A_c$, $\Delta \bar{A} = \bar{A} - \bar{A}_c$ 。根据文献[4]中临界指数和临界振幅的定义及渐近势(18)式, 可求出如下的指数值

critical index		critical amplitude	
β	1/4	B	$(8/5a)^{1/4}$
δ	4	D	$(5/8)a$
γ'	3/4	Γ'	$(1/4)B$
α'	1/2	A'	$(1/4)B^2$

与行波情况下的计算结果比较可知, 除临界振幅有差异外, 驻波与行波情况下的临界指数完全相同。

从以上分析得到这样的结论, 含有可饱和吸收体的单模驻波系统的相变行为、双稳性、临界指数行为与行波系统定性上相同, 但具体细节有异。特别应强调的不同点是, 在行波情况下 I_- 分支要么为虚, 要么不稳定, 总之物理上不可接受^[4]。但对驻波系统, I_- 不但可以是实为正的, 而且同时也可以稳定的(见图 1, 图 2)。所以, 行波系统的三个定态解中能实现的只有两个, 而驻波系统的三个定态解都有可能实现。产生这种差别的原因在于两

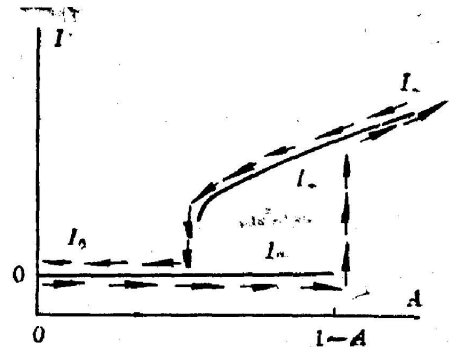


Fig. 3 The bistability

种情况下场与原子的耦合方式不同。行波情况下耦合常数的模方 g^2 与原子变量无关, 而驻波系统的 g^2 却以 $\cos^2(kz)$ 的形式随原子坐标变化。

具体的分析和计算发现, 当 $a < 1$ 时, $A_- < A < -a^2 A$ 为一双稳区(见图 1), 而在 $A > A_+$ 时却有一个所谓的无解区(I_0 不稳, I_{\pm} 为虚)。出现这些不可理解的结果的原因在于, 讨论是在(7)式条件下进行的, 当远离阈值后, (7)式得不到保证, 这就就会出现一些谬误的结果。

最后指出, 对驻波系统采用随机描述、作全量子理论处理期望能出现更多的异于行波的信息。此外, 减少近似、尽可能地作精确处理, 同样会得到更多的新结果。

参 考 文 献

- [1] L. A. Lugiato *et al.*; *Phys. Rev. (A)*, 1978, **18**, No. 1 (Jul), 238.
- [2] S. T. Dembinski *et al.*; *Phys. Rev. (A)*, 1978, **18**, No. 3 (Sep.), 1145.
- [3] P. Mandel; *Phys. Rev. (A)*, 1980, **21**, No. 6 (Jun), 2020~2033.
- [4] Liu Jian-min; *Commun. in Theor. Phys. (China)*, 1984, **3**, No. 4, 405~416
- [5] H. Haken, «*Laser Theory*», (Corra. Printing), (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1984), Chap. 4.
- [6] H. Haken; «*Synergetics—An Introduction*», (3d. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983), Chap. 8
- [7] J. F. Scott *et al.*; *Opt. Commun.*, 1975, **15**, No. 1 (Sep), 13~16; J. F. Scott *et al.*; *Opt. Commun.*, 1975, **15**, No. 3 (Nov/Dec), 343~344.
- [8] W. C. Schieve *et al.*; *Phys. Rev. (A)*, 1978, **18**, No. 3 (Sep), 1152~1156; W. C. Schieve *et al.*; *Z. Phys. B*, 1979, **33**, No. 3, 211~217.
- [9] 刘建民; «*物理学报*», 1982, **31**, No. 9 (Sep), 1278.

Stationary behavior of single-mode standing-wave laser with saturable absorber

LI YINGGANG AND ZHANG JIYUE

(Physics Department, Northwestern University, Xian)

(Received 26 July 1986; revised 29 September 1986)

Abstract

The Hamiltonian and equation of motion for the order parameter of a single-mode standing-wave laser system with saturable absorber are given in detail. Three stationary solutions of the equation are obtained near the threshold; their stability is analysed. The results show that the stationary behavior (nonequilibrium phase transition, bistability, critical exponents) of standing wave system near the threshold is similar to the of a traveling wave system qualitatively, but they differ quantitatively. Among she differences, it is worth to emphasize that it is possible to realize I_- (one of the three ttationary solutions) branch experimentally, what is not possible in the traveling-wave case.

Key Words: saturable absorber; single mode standing-wave; stationary behavior.