

用蒙特卡罗方法计算光通过薄层 随机分布粒子的散射*

王一平 吴振森
(西北电讯工程学院六系)

提 要

本文利用蒙特卡罗方法计算准直光束通过薄层随机分布粒子散射的透射和反射光强,并和输运理论的扩散近似结果做了比较。当散射接近各向同性时两者符合良好。当散射明显地成为各向异性时,蒙特卡罗方法的结果是合理的,而输运理论的扩散近似失效。

关键词: 光散射, 随机粒子散射, 蒙特卡罗法。

一、引 言

本文叙述采用蒙特卡罗方法计算准直光束入射到薄层离散随机分布粒子的透射和反射光强。计算设定的条件如下:

1. 粒子为尺寸和介电性质完全相同的球形。
2. 它们的密度分布起伏较弱,可将每个体元中的粒子数视为相同,而体元的线度远小于薄层厚度,其中含大量粒子。且不计光的偏振。
3. 粒子对单个光子的散射或者是完全弹性散射,或者被完全吸收;这样在散射过程中光的频率不改变与经典概念一致。
4. 在输运过程中光子的生存概率遵循输运理论的光强按负指数律减缩的规则。
5. 碰撞过程属于马尔科夫过程。

薄层的厚度一定,但横向是无限的。由于入射光子限于光束之内,故与此有限范围相距甚远处的粒子对散射的贡献可以忽略。所以在薄层截取一个围绕入射光束的圆柱来研究光子的散射。圆柱半径的大小由我们在计算中设定的数值和给出的临界生存概率来决定。

二、蒙特卡罗方法的应用

在薄层中截取的圆柱和入射光束的有关尺寸已在图1中说明。设 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 和 ξ_5 分别为(0, 1)区间均匀分布的随机数,不同的下标表示它们用于不同的场合。

设 ρ, ϕ 为在 $z=0$ 平面上光子的入射位置, C_s 为粒子散射截面与其平均数密度之积, L 为光子碰撞后的运行路程, μ 和 g 分别为 Henyey-Greenstein 相函数近似公式中的散射

收稿日期: 1986年6月20日; 收到修改稿日期: 1986年9月8日

* 中国科学院科学基金资助的课题。

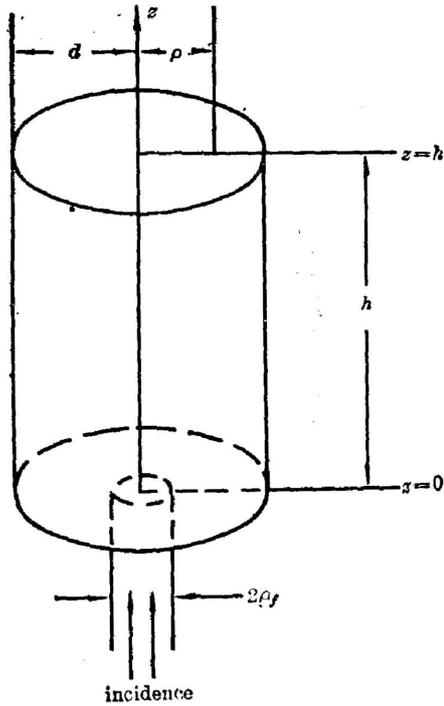


Fig. 1

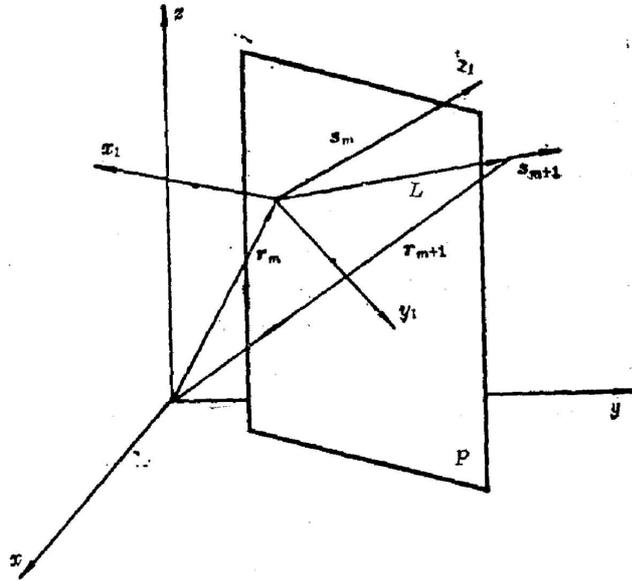


Fig. 2

角余弦及其平均值^[1,2]。则有

$$\rho = \rho_f \xi_1, \quad \phi = 2\pi \xi_2, \quad (1)$$

$$L = -\frac{1}{C_s} \ln \xi_3, \quad (2)$$

$$\mu = [(1+g^2) - (1-g^2)^2(1-g+2g\xi_4)] / (2g). \quad (3)$$

至于光子散射方向和位置的跟踪可由下面的方式描述。

设光子由第 m 个粒子散射到第 $m+1$ 个粒子时, 粒子的位置矢和光子运动方向的单位矢分别表示为 \mathbf{r}_m , \mathbf{s}_m 和 \mathbf{r}_{m+1} , \mathbf{s}_{m+1} , 如图 2 所示。选取原点固定在第 m 个粒子所在位置的坐标系为 x_1, y_1, z_1 。令 z_1 的方向和 \mathbf{s}_m 一致。 y_1 在包含 z_1 且垂直于原坐标系中 xy 平面的一个平面 P 内。 z_1 则与 P 平面垂直。 \mathbf{s}_{m+1} 是单位矢, 它在 xyz 系和 $x_1y_1z_1$ 系中的分量亦即其方向余弦分别用 u, v, w 和 u_1, v_1, w_1 表示。在图 3 中已把 xyz 的原点平移到第 m 个散射粒子所在的位置。由此, 这两组方向余弦之间的关系可以通过将 $x_1y_1z_1$ 系两次旋转变换到 xyz 系而求出。即,

$$\begin{aligned} u &= u_1 \sin \phi' + v_1 \cos \phi' \cos \theta' + w_1 \cos \phi' \sin \theta', \\ v &= -u_1 \cos \phi' + v_1 \sin \phi' \cos \theta' + w_1 \sin \phi' \sin \theta', \\ w &= -v_1 \sin \theta' + w_1 \cos \theta'. \end{aligned} \quad (4)$$

在图 2 中设在 xyz 系中 \mathbf{r}_m 和 \mathbf{r}_{m+1} 的坐标分别为 (x', y', z') 和 (x, y, z) , 则两次散射间的坐标关系为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (5)$$

这里 L 是从 r_m 至 r_{m+1} 的距离, 由式(2)计算。要注意 s_{m+1} 在 $x_1y_1z_1$ 系中的三个方向余弦的算式为 $u_1 = \sin \nu \cos \psi$, $v_1 = \sin \nu \sin \psi$ 和 $w_1 = \cos \nu$, 如图 3 所示。其中角 ν 用(3)式计算, $\psi = 2\pi\xi_0$ 。重复应用(4)和(5)式, 就能对光子的位置和散射方向跟踪。

命 r_h 和 r_0 分别表示图 1 中 $z=h$ 和 $z=0$ 时圆柱面上光子由内部散射到达的位置。于是通过 m 次碰撞恰好到达 $z=h$ 和 $z=0$ 平面上点 r_h 和 r_0 处小面积 S 的概率分别为

$$P_{nm} = W_m B(\mu_m) d\Omega_m \exp(-C_t |r_h - r_m|), \quad (6)$$

$$P'_{nm} = W_m B(\mu'_m) d\Omega'_m \exp(-C_t |r_0 - r_m|), \quad (7)$$

其中立体角元 $d\Omega_m = S/|r_h - r_m|^2$, $d\Omega'_m = S/|r_0 - r_m|^2$; S 为第 m 次散射后恰好分别到达 $z=h$ 和 $z=0$ 平面上的小面积, $B(\mu)$ 为相函数^[1],

$$B(\mu) = W_0(1-g^2)[1+g^2-2g\mu]^{-3/2}. \quad (8)$$

W_m 是光子经过 m 次散射后不被吸收的概率, C_t 为粒子数密度与粒子总散射截面之积。

由于光子的一次, 二次, …… 散射为不相容事件, 故第 n 个光子到达小面积 S 的概率应

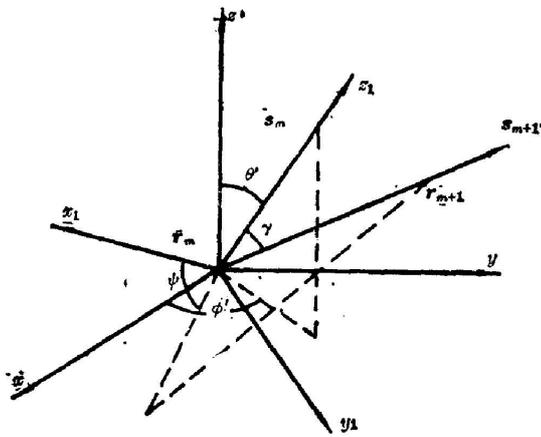


Fig. 3

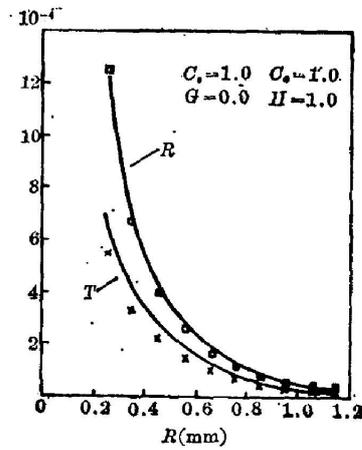


Fig. 4

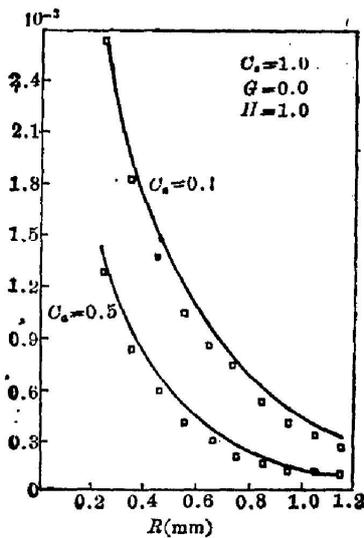


Fig. 5

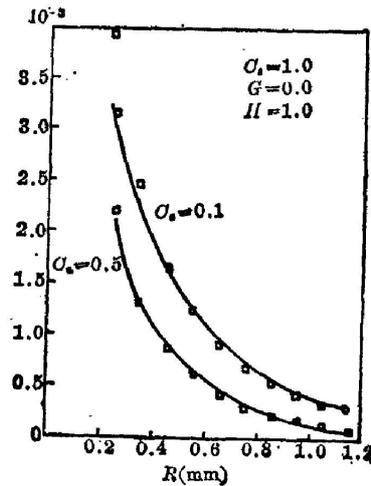


Fig. 6

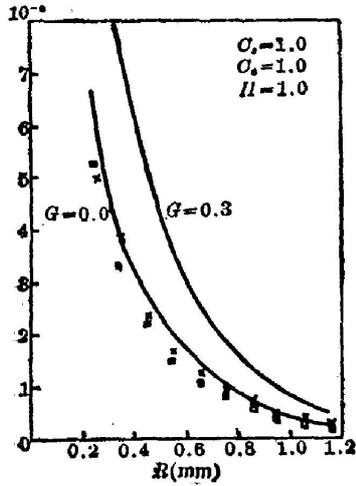


Fig. 7

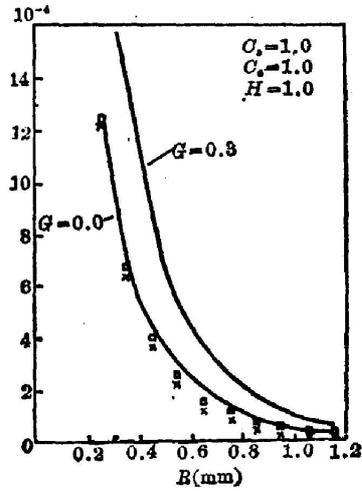


Fig. 8

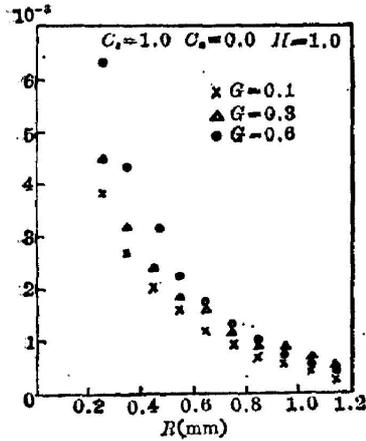


Fig. 9

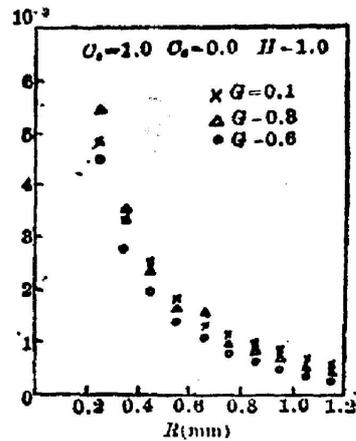


Fig. 10

分别为 $\sum_m P_{nm}$ 和 $\sum_m P'_{nm}$ 。对全部 N 个光子，则相应的平均概率也就是在小面积上的透射光强 P_T 和反射光强 P_R 。即

$$P_T = \frac{1}{N} \sum_n \sum_m P_{nm}, \quad P_R = \frac{1}{N} \sum_n \sum_m P'_{nm} \quad (9)$$

采用文献[2]的具体数据，仍取光子的临界生存概率为 $W_{m0} \leq 10^{-15}$ 。考虑到进入的 10^4 个光子入射位置分布的随机性质，则计算结果由图 4~图 10 的点表示。

三、输运理论的扩散近似解

半径为 ρ_l 的准直光束入射到厚度为 h 的随机分布粒子的薄层时，应用输运理论的扩散近似方法可以算出经过散射而在 $z=h$ 和 $z=0$ 上小面积 S 的透射光强和散射光强分别为^[1,2]：

$$P_T(\rho) = \frac{S}{2\pi} \left\{ \frac{8C_s}{\rho_f} (D^{-1} + 3C_t g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n X_h}{\lambda_n (k_n^2 + C_t^2)} K_0(\lambda_n \rho) I_1(\lambda_n \rho_f) \right. \\ \left. + \frac{16C_s g}{\rho_f f C_{tr}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_h}{\lambda_n} \sin \nu_n K_0(\lambda_n \rho) I_1(\lambda_n \rho_f) \right\}, \quad (10)$$

$$P_R(\rho) = \frac{S}{2\pi} \left\{ \frac{8C_s}{\rho_f} (D^{-1} + 3C_t g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n X_0}{\lambda_n (k_n^2 + C_t^2)} K_0(\lambda_n \rho) I_1(\lambda_n \rho_f) \right. \\ \left. + \frac{16C_s g}{\rho_f f C_{tr}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_0}{\lambda_n} \sin \nu_n K_0(\lambda_n \rho) I_1(\lambda_n \rho_f) \right\}, \quad (11)$$

式中 C_s , C_t 和 g 的意义已如前述。 C_s 为粒子数密度与吸收截面之积, C_{tr} 是粒子平均数密度与输运截面 $\sigma_{tr} = \sigma_a + (1-g)\sigma_s$ 之积。 $D = (3C_{tr})^{-1}$, $f = 2D$ 。 k_n 和 ν_n 是方程 $\text{tg}(k_n h) = 2fk_n / (f^2 k_n^2 - 1)$ 和 $\text{tg} \nu_n = fk_n$ 之解, $\lambda_n^2 = k_n^2 + K_d^2$, $K_d^2 = C_s / D$ 。 K_0 和 I_1 为修正具塞尔函数。并且

$$X_h = T_n [0.5 \sin(k_n h + \nu_n) - k_n D \cos(k_n h + \nu_n)], \quad X_0 = T_n [0.5 \sin \nu_n + k_n D \cos \nu_n], \\ T_n = k_n \{2k_n h + \sin(2\nu_n) - \sin[2(k_n h + \nu_n)]\}^{-1}, \\ Z_n = \sin \nu_n [C_t + \exp(-C_t h) (k_n \sin k_n h - C_t \cos k_n h)] \\ + \cos \nu_n [k_n - \exp(-C_t h) (C_t \sin k_n h + k_n \cos k_n h)],$$

由式(10)和(11)计算的结果如图4~图10的实践所示。

四、结果之比较

按扩散近似要求, 介质厚度应比光子在其中散射的平均自由程大。如选 $g \approx 0.0$, $h = 1 \text{ mm}$, 则 $C_t^{-1} < 1 \text{ mm}$, 取 $C_s = 1 \text{ mm}^{-1}$, $C_a = 0.1, 0.5, 1.0 \text{ mm}^{-1}$, 可以满足此要求。由图4~图10可见, 两种方法计算透射和反射光强在 $g=0$ 和 $g=0.1$ 时结果符合良好。

当 $g \neq 0$ 且逐渐增大时, 两种方法的结果差异增大。这在 $g=0.3$ 时由图7和图8可以看出。由于扩散近似适用于 g 很小的情况, 两个算式(10)和(11)中除 X_h 和 X_0 有差别以外, 形式完全相同。如果 g 增大, 仍然用它们计算, 必然与实际情况不符。但是由图9和10中各点所表示的变化规律看来, 蒙特卡罗方法的结果与物理概念是完全符合的。因为 g 增大, 表征粒子各向异性散射的程度增大, 单个粒子的前向散射增强。其结果是透射强度必会大于反射强度。这从图9和10中对 $g=0.1, g=0.3, g=0.6$ 等不同 g 值蒙特卡罗方法结果之比较即可以看出。

可见, 蒙特卡罗方法用于薄层离散随机分布粒子对光散射的随机模拟有显著的优越性。在实验条件难以实现时, 这种模拟还可以解决实际测量不好解决的问题。

参 考 文 献

- [1] A. Ishimaru; Wave Propagation and Scattering in Random Media (Academic Press, USA, Vol. 1, 1978), 175~182.
- [2] 王尔杰, 马庆临; 《西北电讯工程学院学报》, 1985, 2, No. 4, 13~20.

Application of the Monte-Carlo method to light scattering from randomly distributed particles in thin layer

WANG YIPING AND WU ZHENSEN

(Northwest Telecommunication Engineering Institute)

(Received 20 June 1986; revised 8 September 1986)

Abstract

We use the Monte-Carlo method to calculate the intensities of transmission and reflection of a collimated light beam scattered from randomly distributed particles in thin layer. The results obtained are compared with those calculated by the transport theory of diffusion approximation. When the scattering is nearly isotropic, both of the results agree well. When scattering becomes anisotropic, the results from Monte-Carlo method are reasonable, while the theory of isotropic scattering approximation becomes invalid.

Key Words: scattering of light; scattered by randomly distributed particles.