

受激喇曼散射的高斯-厄米模展开方法

成序三 王润文

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

运用高斯-厄米模展开受激喇曼散射波动方程,在忽略泵浦倒空情况下,求得了解析解,并用于阈值条件和波前再现讨论。

关键词: 受激喇曼散射, 高斯-厄米模展开

一、引 言

高功率激光喇曼散射已从基础研究逐步走向了应用。近年来大量文献报道的激光海底通讯从准分子紫外激光器转向高效蓝绿光铅蒸气喇曼频移激光器、高功率准分子——H₂系统喇曼激光器。在这些工作中,尤以改善喇曼斯托克斯光光束质量越来越引起人们的注意。例如喇曼光整形(Raman clean up)、喇曼转换中的波前再现的理论和实验研究等改善喇曼光束方向性问题^[1~5]。(散射过程中从泵浦光空间模式结构如何向喇曼光束模式结构转换,是研究喇曼光束方向性的基本问题之一。)本文应用厄米-高斯本征模集展开的方法求解喇曼方程,用求得的解析解讨论阈值条件及波前再现等问题,并与我们的实验结果进行比较。文中也给出了强场高增益情况的数值计算结果。

二、模耦合方程及阈值解析解

喇曼斯托克斯光场标量方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2ik_s \frac{\partial}{\partial z}\right)\varepsilon_s(\mathbf{r}) = -ik_s g_0 |\varepsilon_p(\mathbf{r})|^2 \varepsilon_s(\mathbf{r}), \quad (1)$$

式中 ε_s 、 ε_p 分别为喇曼光与泵浦光场。为讨论喇曼光束质量问题,用可表征光场空间分布特性的厄米-高斯模本征完全集 ψ_{mn} 作为基展开 ε_s

$$\varepsilon_s(x, y, z) = \sum_{m,n} S_{mn}(z) \psi_{mn}(x, y, z; k_s), \quad (2)$$

式中 $S_{mn}(z)$ 是 ψ_{mn} 模分量的复振幅。(2)式代入(1)式,用 $\psi_{m'n'}^*(x, y, z; k_s)$ 乘(1)式两边,并对 x, y 坐标进行无穷空间积分,并利用 ψ_{mn} 的正交性得

$$\frac{d}{dz} S_{m'n'}(z) = \sum_{m,n} \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{m'n'}^*(x, y, z; k_s) \psi_{mn}(x, y, z; k_s) \times [g_0 |\varepsilon_p(x, y, z; k_p)|^2] \right\} S_{mn}(z). \quad (3)$$

(3)式即本文讨论的主要出发点——模耦合方程。以 $z = f \operatorname{tg} u$ 作变量代换,经过复杂的积

分运算, (3)式可化简为一个线性张量微分方程

$$\frac{d}{du} S_{mn}(u) = \sum_{m'n'} D_{m'm'n'}(\theta) \exp[-i(m'-m+n'-n)u] S_{mn}(u), \quad (4)$$

式中 $D_{m'm'n'}(\theta)$ 是一个与自变量 u 无关的四阶张量 D 的张量元(表达式及推导见《附录》), 而 S_{mn} 可视为一个二阶张量 S 的张量元。 θ 为表征喇曼频移大小的参量

$$\theta = \frac{\lambda_p}{\lambda_s + \lambda_p}. \quad (5)$$

根据《附录》, 四阶张量 D 可按指标 (m', m) 、 (n', n) 化为两个二阶张量的直积的形式。此外, 标量方程(1)是关于 x, y 可分离变量; 而厄米-高斯本征模集 $\psi_{mn}(x, y, z)$ 也可按 x, y 分离为两个函数 $\psi_m(x, z)$ 、 $\psi_n(y, z)$ 的乘积, 因此, 方程(4)式可化为关于 (x, z) 的二维问题, 这时只要考虑对应

$$\left. \begin{aligned} S_{m0}(z) &\rightarrow S_m(z), \\ \psi_{m0}(x, 0, z) &\rightarrow \psi_m(x, z). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

注意到《附录》中的推导, 利用(6)式可把(4)式化为一个关于矢量 S 的微分方程的分量形式

$$\frac{d}{du} S_{m'}(u) = \sum_m D_{m'm}(\theta) \exp[-i(m'-m)u] S_m(u), \quad (7)$$

$$D_{m'm}(\theta) = G_p I_{m'm}(\theta), \quad (8)$$

$$G_p = \frac{f \theta g_0 |E_p^0|^2}{\pi w_{0p}^2}, \quad (9)$$

式中 $I_{m'm}(\theta)$ 的表达式在《附录》中给出。对矢量 S 作么正变换得*

$$h_m(u) = \exp(imu) S_m(u). \quad (10)$$

利用微分方程组的矩阵形式的求解方法, 可解关于 h 矢量的微分方程, 最后, 关于复振幅的解析解为

$$S(u) = U^+(u) \exp[H(u-u_0)] U(u_0) S(u_0), \quad (11)$$

式中矩阵 H 的矩阵元

$$H_{m'm} = im' \delta_{m'm} + D_{m'm}(\theta). \quad (12)$$

下面利用解(11)式讨论波前再现和阈值条件。

三、波前再现和“增益空间本征模”

利用相似变换把矩阵 H 对角化

$$M = X^{-1} H X = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots), \quad (13)$$

式中 X 为与特征值 λ_i ($i=0, 1, 2, \dots$) 对应的特征矢 v_i 作为列构成的相似变换矩阵。为讨论问题方便起见, 把本征值 λ_i 按其部大小重新排列, 使

$$R_e \lambda_0 > R_e \lambda_1 > R_e \lambda_2 > \dots. \quad (14)$$

重新定义一个新的矢量

$$A(u) = X^{-1} U(u) S(u), \quad (15)$$

* 么正矩阵 U 的矩阵元 $U_{m'm}(u) = \exp(im'u) \delta_{m'm}$ 。

其分量形式为

$$A_m(u) = \sum_{m'} X_{mm'}^{-1} \exp(im'u) S_{m'}(u) \quad (16)$$

利用解(11)式及(13)、(15)式有

$$A(u) = \exp[M(u-u_0)] A(u_0) \quad (17)$$

由于 M 是一个对角方阵, 矢量 $A(u)$ 在喇曼非线性增益空间传播方程中具有“相似不变性”。由(16)式把“自由空间”本征集 ψ_m 按如下形式重新组合

$$\begin{aligned} \Phi_m(x, z; k_s) = & \exp\left[\lambda_m\left(\text{tg}^{-1}\frac{z}{f} - \text{tg}^{-1}\frac{z_0}{f}\right)\right] \sum_{m'=0}^{\infty} X_{mm'}^{-1} \exp\left(im' \text{tg}^{-1}\frac{z_0}{f}\right) \\ & \times S_{m'}\left(\text{tg}^{-1}\frac{z_0}{f}\right) \psi_{m'}(x, z; k_s), \end{aligned} \quad (18)$$

于是, 对照(17)式, 我们找到了一组新的本征模集 $\Phi_m (m=0, 1, 2, \dots)$, 完全类似于厄米-高斯模在自由空间传播不变性, 它在喇曼增益空间具有传播相似不变性, 因此构成了增益空间本征模集。即, 在喇曼增益空间中, 沿与光轴不同于交 z_1, z_2 处的等相面上去观察 Φ_m 模时, 除相差一个复因子 $\exp\left[\lambda_m\left(\text{tg}^{-1}\frac{z_2}{f} - \text{tg}^{-1}\frac{z_1}{f}\right)\right]$ 外, 两者有完全相同的函数表达式, 即 Φ_m 的横向空间分布在增益空间传播过程中保持不变。

一般文献讨论波前再现问题时, 都设喇曼散射光按泵浦光空间分布来增长^[2], 实际上这不大可能。首先, 如图 1, 高斯光束腰斑半径 $w_0 = \sqrt{\lambda f/\pi}$ 有频移的喇曼散射, $\lambda_p \neq \lambda_s$, $w_{0p} \neq w_{0s}$, 由于腰斑的不重合, 即使泵浦光是一基模 $\psi_0(x, z; k_s)$, 方程(4)按喇曼光模 $\psi_m(x, z; k_s)$ 展开仍为一无穷级数, 由于各模对应增益不同, 故不能再现。

但是, 由(14)式, 当满足条件

$$R_s \lambda_0 \gg R_p \lambda_s, \quad i=1, 2, \dots \quad (19)$$

时, Φ_0 模在增益空间经一定传播距离后占绝对优势, 喇曼光集中到 Φ_0 模, 这是增益空间可保持再现的唯一模式。

四、喇曼放大器阈值条件

如图 1 所示, 单程喇曼超荧光放大器, 设入射泵浦光为零阶模, 不考虑模耦合时只有零阶分量

$$\frac{d}{du} S_0(u) = G_p S_0(u) \quad (20)$$

(20)式的解为

$$S_0(z) = S_0(u) = S_0(u_0) \exp\left[G_p\left(\text{tg}^{-1}\frac{z}{f} - \text{tg}^{-1}\frac{z_0}{f}\right)\right],$$

增益系数 G_p 与聚焦方式无关(即与 f 无关)

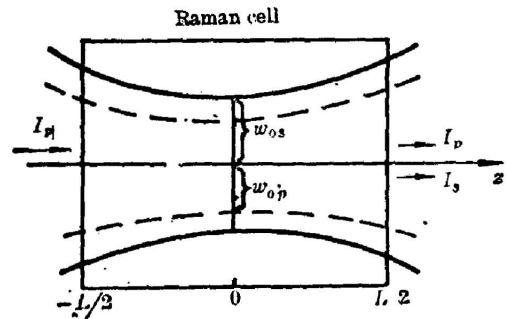


Fig. 1 The spatial distribution of pump beam and Stokes beam through single-pass Raman cell

$$G_p = \theta f g_0 |E_p^0|^2 / \pi w_{0p}^2 = \theta g_0 |E_p^0|^2 / \lambda_p \quad (21)$$

准直光泵浦时, $f \gg L$, $\text{tg}^{-1}(z/f) \approx (z/f)$; 紧聚焦情况, $f \ll L$, $\pm \text{tg}^{-1}(L/f) \approx \pm(\pi/2)$, 净增益 $\exp(\pi G_p)$ 与聚焦参量 f 无关。

考虑模耦合, Φ_m 模的净增益为

$$G = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_m(x, z; k_s)|^2 dx dy \right]}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_m(x, z_0; k_s)|^2 dx dy \right]} \\ = \exp \left[2R_e \lambda_m \left(\text{tg}^{-1} \frac{z}{f} - \text{tg}^{-1} \frac{z_0}{f} \right) \right] \quad (22)$$

在准直光泵浦的情况下, “小信号增益系数”为 $(2/f) R_e \lambda_m$, 这是因为

$$G \approx \exp \left[(2R_e \lambda_m / f) (z - z_0) \right] \quad (23)$$

对于在 H_2 或 Pb 蒸气等介质中的准分子激光 (XeF 、 XeCl 、 KrF) 喇曼散射, 由于其泵浦光功率高, 宜采用软聚焦或准直光方式泵浦, 这时可利用“小信号增益系数”来估计泵浦阈值。对于光泵红外喇曼散射 (如分子法分离同位素装置), $\theta \ll 1$, 一般说增益较低, 宜采用“紧聚焦”泵浦方式^[2]。

对斯托克斯超荧光放大器, 光强净增益要达到 $\exp(30)$ ^[2] 才能观察到从自发辐射中得到的放大斯托克斯光。在零阶近似下, 只考虑 S_0 模, 设 $f = 0.5 \text{ m}$, $L = 1 \text{ m}$, 对单程放大器, 要求

$$4G_p \text{tg}^{-1}(L/2f) = \pi G_p = 30 \quad (24)$$

把(21)式改写为

$$G_p = (\theta / 2\lambda_p) \alpha P \quad (25)$$

式中 α 为小信号增益系数, P 为泵浦光功率。对 XeCl-H_2 系统, $\alpha \approx 2 \times 10^{-3} \text{ cm/MW}$ ^[2], 阈值功率

$$P_{th} = \frac{2\lambda_p 30}{\pi \theta \alpha} \approx 0.6 \text{ MW} \quad (26)$$

在我们的实验中^[6], 对应于上述实验条件 ($L = 1 \text{ m}$, $f = L/2$), 曾求得 XeCl-H_2 系统 $P_{th} \approx 3 \text{ MW}$ (200 mJ/60 ns)。实验中泵浦光为数十倍衍射极限, 高斯-厄米模光束腰面积与模指标 m 成正比, 因此高阶模的功率密度下降, 要求有较高的阈值 P_{th}^* 。

经过对解(11)式的数值分析表明, 在阈值附近, 对第一阶增益空间本征模集 Φ_1 , 在泵浦光为零阶模 ψ_0 (衍射极限分布) 时, 其增益分别为第 5 阶模 ψ_5 和第 9 阶模 ψ_9 泵浦时的 2 倍和 3 倍。

五、高效转换及其它情况的讨论

在高效转换的情况, 要考虑所谓“泵浦倒空”效应。这时, 设入射泵浦光为 $\varepsilon_p^0(x, z; k_p)$, 则

$$|\varepsilon_p(x, z)|^2 = |\varepsilon_p^0(x, z)|^2 - \frac{\lambda_s}{\lambda_p} |\varepsilon_s(x, z)|^2 \quad (27)$$

* 在我们早期实验中, 3 MW (100 mJ/30 ns) 功率、100 倍衍射极限的激光束, 由于光束质量太差, 在 H_2 中也没有观察到受激喇曼光。

微分方程(3)式出现非线性项

$$\iint \psi_{m'n'}^* \psi_{mn} g_0 |\varepsilon_s|^2 f_{m'n'}(z) dx dy \propto |f_{m'n'}|^2 f_{m'n'} \quad (28)$$

这种情况下,不考虑模式耦合的解,已由文献[2]给出。考虑模式耦合,可以用叠代法求解。把不考虑泵浦倒空的解(11)式作为零阶近似代入非线性项(28)式,则

$$\frac{df_{m'n'}(z)}{dz} = \sum_{mn} \frac{1}{2} \left\{ \iint \psi_{m'n'}^* \psi_{mn} \left[|\varepsilon_p^0(x, z)|^2 - \frac{\lambda_p}{\lambda_p} \left| \sum_{m'n''} f_{m'n''}^0 \psi_{m'n''} \right|^2 \right] \right\} f_{mn}^1 dx dy \quad (29)$$

(29)式为已经线性化了的关于一阶近似解 $f_{m'n'}^1$ 的微分方程,逐步叠代可求得较高精度的数值解。

在方程推导过程中对 (x, y) 坐标的无穷空间的积分,实际上是考虑衍射效应的空间平均。由于泵浦倒空,泵浦光轴向部分倒空最快,空间分布严重偏离衍射极限,因此在强光高增益情况下用衍射极限的光进行泵浦,喇曼光将出现高阶模分量,图2为用零阶光 ψ_0 泵浦时,考虑泵浦倒空与忽略倒空两种情况下数值分析的喇曼光空间分布的变化,国外文献已有类似的实验^[5]。

关于高阶高斯-厄米模泵浦时喇曼光的增益特性,可以对模展开方程(3)进行数值分析,与泵浦倒空迭代求解类似,这涉及到模耦合系数(即矩阵元)的计算,由于篇幅关系,略去了繁杂的数学推导及一些详细的数值分析图解。

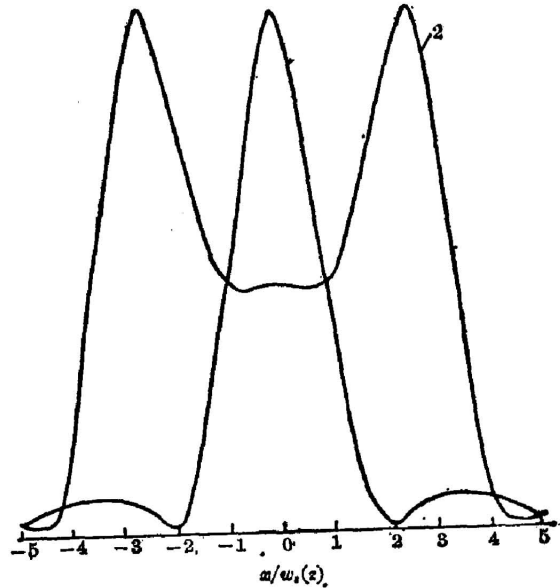


Fig. 2 The normalized transversal spatial distribution of Raman beam intensities without and with pumping depletion

(1) near the threshold; (2) 35% pumping depletion

本研究工作得到中国科学院基金支持,王之江教授对本工作的支持和指导,作者谨在此致以谢意。

参 考 文 献

- [1] R. S. F. Cheng *et al.*; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1985, **QE-21**, No. 5 (May), 477.
- [2] R. T. V. Kuang *et al.*; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1982, **QE-18**, No. 8 (Aug), 1306~1310.
R. T. V. Kuang *et al.*; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1982, **QE-18**, No. 9 (Sep), 1323~1325.
- [3] B. N. Perry *et al.*; *Opt. Lett.*, 1985, **10**, No. 3 (Mar), 146.
- [4] B. Ya. Zel'dovich *et al.*; *Soviet J. Quant. Electron.*, 1977, **7**, No. 5 (May), 610~615.
- [5] N. F. Andreev *et al.*; *Soviet J. Quant. Electron.*, 1979, **9**, No. 5 (May), 585~589.
- [6] 袁一凤等;《光学学报》,待发表。

Gaussian-Hermite coupling method on solving stimulated Raman scattering wave equation

CHENG XUSAN AND WANG RENWEN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 29 May 1986; revised 3 September 1986)

Abstract

An expanding method for solving SRS wave equation with Gaussian-Hermite modes is presented. An analytical solution is derived neglecting the condition of pump depletion and used for discussion of threshold condition and wave front reproduction.

Key Words: raman scattering, gaussian-hermite coupling method