

# 矩形芯双沟道定向耦合器 耦合长度的变分计算

余守宪 乔力 王敬益  
(北方交通大学应用数理系)

## 提 要

本文的主要内容是分析并计算光频波段的矩形芯双沟道定向耦合器的耦合特性,利用变分法求解耦合长度。所得结果精确度高,物理图像清晰,计算简便且易于推广。

关键词: 光波导; 集成光学; 耦合器。

## 一、引 言

定向耦合器的严格理论分析与求解比较困难,一般常用光波耦合方程与耦合系数的公式进行计算<sup>[1,2]</sup>,这种方法虽然较严格,但运算过程复杂,迄今未见到其严格的解析解或数值解。1969年 Marcattili<sup>[3]</sup>首先提出一种近似求解方法,其结果在远截止区与实验值和计算机数值分析结果符合很好,但在近截止状态差别较大。1983年 Sharma 等<sup>[4]</sup>提出以单个波导的变分为基础的变分分析方法,通过耦合器的二维标量波动方程,定义等效折射率和等效耦合器结构,推导过程与计算都比较复杂。

本文采用场型分析法<sup>[5]</sup>,据根耦合器中存在的对称场型与反对称场型概念,借助于变分法求解对称模式和反对称模式的传播常数,进而求得耦合长度,所得结果较现有的近似方法精确,物理图像清晰,计算简便,可借助袖珍计算机计算。

## 二、变分分析方法

考虑如图1所示矩形芯双沟道定向耦合器,波导边长分别是 $2L_1$ 、 $2L_2$ ,两波导之间的间隔是 $2L_3$ 。用 $\psi(x, y, z, t)$ 表示耦合器中的横向电磁场分量,并假设

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y) \exp[i(\omega t - \beta z)], \quad (1)$$

其中 $\omega$ 为电磁场的圆频率, $\beta$ 是波导纵向传播常数。

定义归一化参量 $V_i = L_i k_0 (n_i^2 - n_2^2)^{1/2}$ , ( $i=1, 2, 3$ )及归一化传播常数

$$P^2 = (\beta^2 - n^2 k_0^2) / (n_1^2 - n_2^2) k_0^2,$$

其中 $k_0 = (\omega/c)$ ,  $c$ 为真空光速。若将坐标尺度扩大为原来的 $k_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$ 倍,则 $2V_1$ 、 $2V_2$ 、 $2V_3$ 分别表示在新坐标系下耦合器的尺寸(如图1所示),而场函数 $\psi(x, y)$ 满足的方程为

$$H\psi(x, y) = P^2\psi(x, y), \tag{2}$$

其中算符  $H$  定义为

$$H = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \begin{cases} 1, & n(x, y) = n_1 \\ 0, & n(x, y) = n_2 \\ -\Delta_0^2, & n(x, y) = n_0 \end{cases} \tag{3}$$

其中  $\Delta_0^2 = (n_2^2 - n_0^2) / (n_1^2 - n_2^2)$ 。该本征方程的严格求解是不可能的。本文参照 Marcatili 解, 选择恰当的尝试函数, 用变分公式来求解耦合器的对称场型与反对称场型。

按照变分原理, 本征值方程(1)的变分表达式为

$$P^2 = \frac{\iint \psi_i(x, y) H \psi_i(x, y) dx dy}{\iint \psi_i^2(x, y) dx dy}, \tag{4}$$

其中  $\psi_i(x, y)$  是尝试函数, 可含有若干个参变量。如果尝试函数的选取接近真实解, 物理图像合理, 并有恰当的参变量, 那么将尝试函数代入方程(4)右边的积分, 并调整参变量值, 使该结果为极值, 则这个极值即为本征值  $P^2$  的较好近似。

尝试函数取如下的形式(如图 2 所示)\*:

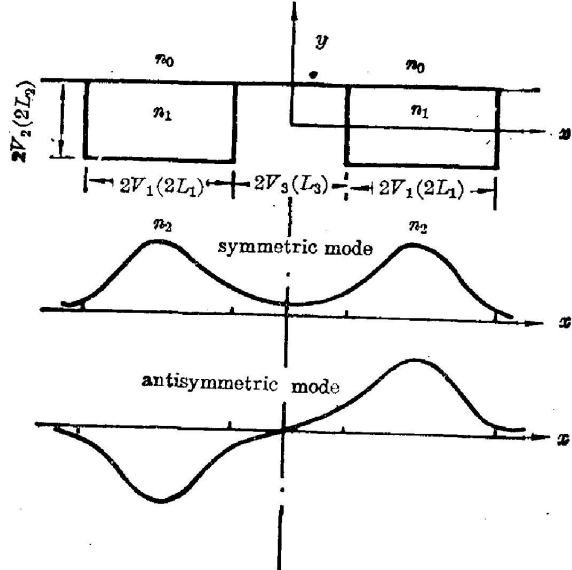


Fig. 1 Dielectric coupler consisting of two parallel channel waveguide

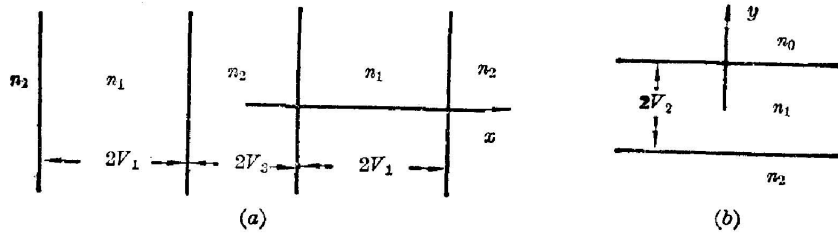


Fig. 2

(a) Five slabs waveguide; (b) Three slabs waveguide

$$\psi_i(x, y) = X_i(x)Y_i(y), \tag{5}$$

$$X_i(x) = \begin{cases} \cos(\alpha_1 V_1 - \alpha_1 x_0) \exp[-P_1(x - V_3 - 2V_1)], & x > V_3 + 2V_1 \\ \cos[\alpha_1(x - x_0 - V_3 - V_1)], & V_3 < x < V_3 + 2V_1 \\ \frac{\cos(\alpha_1 V_1 + \alpha_1 x_0)}{\exp(P_1 V_3) + Q \exp(-P_1 V_3)} [\exp(P_1 x) + Q \exp(-P_1 x)], & |x| < V_3 \\ Q \cos[\alpha_1(x + x_0 + V_3 + V_1)], & -(V_3 + 2V_1) < x < -V_3 \\ Q \cos(\alpha_1 V_1 + \alpha_1 x_0) \exp[P_1(x + V_3 + 2V_1)] & x < -(V_3 + 2V_1) \end{cases} \tag{6}$$

\* 借用 Marcatili 法将耦合器的场函数看成是  $x$  方向五层平板波导与  $y$  方向三层平板波导的模型。

$$Y_1(y) = \begin{cases} \cos(\alpha_2 V_2 - \alpha_2 y_0) \exp[-P_3(x - V_2)], & y > V_2 \\ \cos[\alpha_2(y - y_0)], & |y| < V_2 \\ \cos(\alpha_2 V_2 + \alpha_2 y_0) \exp[P_2(y + V_2)], & y < -V_2 \end{cases} \quad (7)$$

其中  $Q=1$  对应于对称场型,  $Q=-1$  对应于反对称场型。 $x_0$ 、 $y_0$  分别表示波导芯区内场中心点在  $x$ 、 $y$  方向的移动。 $x_0$ 、 $y_0$ 、 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 、 $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  均为待定量。

尝试函数及其导数在边界处 ( $|x|=V_3$ ,  $V_3+2V_1$  和  $|y|=V_2$ ) 的连续性条件可给出下列方程:

$$\left. \begin{aligned} \tan(\alpha_1 V_1 - \alpha_1 x_0) &= \frac{P_1}{\alpha_1}, \\ \tan(\alpha_1 V_1 + \alpha_1 x_0) &= \frac{P_1}{\alpha_1} \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan(\alpha_2 V_2 + \alpha_2 y_0) &= \frac{P_2}{\alpha_2}, \\ \tan(\alpha_2 V_2 - \alpha_2 y_0) &= \frac{P_2}{\alpha_2}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中  $\Delta_1 = \exp(P_1 V_3) - Q \exp(-P_1 V_3)$ ,  $\Delta_2 = \exp(P_1 V_3) + Q \exp(-P_1 V_3)$ 。由方程(8)式得

$$2\alpha_1 V_1 = \tan^{-1}\left(\frac{P_1}{\alpha_1} \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{P_1}{\alpha_1}\right), \quad (10)$$

$$2\alpha_1 x_0 = \tan^{-1}\left(\frac{P_1}{\alpha_1} \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{P_1}{\alpha_1}\right), \quad (11)$$

现在只剩下  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $y_0$  为待定量, 可以选作参变量来进行变分计算。

将尝试函数代入变分表达式(4), 经过分区域积分, 得

$$\begin{aligned} P^2 = K^2 [ & (1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2) I_1 J_1 + (P_3^2 - \alpha_1^2 - \Delta_0^2) I_2 J_1 + (P_2^2 - \alpha_1^2) I_3 J_1 \\ & + (P_1^2 - \alpha_2^2) I_1 J_2 + (P_1^2 + P_3^2 - \Delta_0^2) I_2 J_2 + (P_1^2 + P_2^2) I_3 J_2 \\ & + (P_1^2 - \alpha_2^2) I_1 J_3 + (P_1^2 + P_3^2 - \Delta_0^2) I_2 J_3 + (P_1^2 + P_2^2) I_3 J_3 ], \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} K^2 &= [(I_1 + I_2 + I_3)(J_1 + J_2 + J_3)]^{-1}, \\ I_1 &= \int_{-V_2}^{V_2} V_1^2(y) dy = V_2 + \frac{\sin(2\alpha_2 V_2) \cos(2\alpha_2 V_2)}{2\alpha_2}, \\ I_2 &= \int_{V_1}^{\infty} V_2^2(x) dx = \frac{\cos^2(\alpha_2 V_2 - \alpha_2 y_0)}{2P_3}, \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{-V_2} V_2^2(y) dy = \frac{\cos^2(\alpha_2 V_2 + \alpha_2 y_0)}{2P_2}, \\ J_1 &= \int_{V_1}^{V_1+2V_1} X_1^2(x) dx = V_1 + \frac{\sin(2\alpha_1 V_1) \cos(2\alpha_1 x_0)}{2\alpha_1}, \\ J_2 &= \int_{V_1+2V_1}^{\infty} X_1^2(x) dx = \frac{\cos^2(\alpha_1 V_1 - \alpha_1 x_0)}{2P_2}, \\ J_3 &= \int_0^{V_1} X_1^2(x) dx = \frac{\cos^2(\alpha_1 V_1 + \alpha_1 x_0)}{2P_1} \cdot \frac{[\exp(2P_1 V_3) - \exp(-2P_1 V_3) + 4QP_1 V_1]}{[\exp(2P_1 V_3) + \exp(-2P_1 V_3) + 2Q]}. \end{aligned} \quad (13)$$

考虑到方程(9)、(10)、(11)式, 可以看出方程(12)式等号右边仅仅是参变量  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $y_0$

的函数, 所以可用求解非线性方程组:  $(\partial P^2/\partial \alpha_1) = 0$ ,  $(\partial P^2/\partial \alpha_2) = 0$ ,  $(\partial P^2/\partial y_0) = 0$  的方法, 确定  $P^2$  的极值点  $(\alpha_1, \alpha_2, y_0)$ , 从而分别求得对称场型和反对称场型归一化传播常数的极值  $P_+^2$  与  $P_-^2$ , 代入下面的公式

$$\frac{L}{\beta L_1^2} = \frac{2\pi}{(P_+^2 - P_-^2)V_1^2}, \quad (14)$$

即得耦合长度  $L$  的变分结果, 其中  $\beta = (\beta_+ + \beta_-)/2$ 。具体计算结果与 Marcatili 方法及 Sharma<sup>[4,7]</sup> 的变分方法的比较如图 3 所示。为了便于与 Sharma 结果比较, 在此仅给出  $n_0 = n_2$  的情况, 图中还同时给出 Kumar 等<sup>[6]</sup> 的微扰分析结果。本方法与 Sharma 方法符合甚好, 比 Marcatili 法和 Kumar 的微扰法相比有明显的改进<sup>[4,6,7]</sup>。

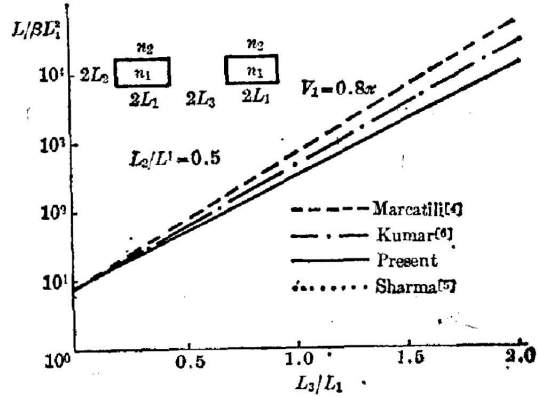


Fig. 3 Coupler length  $L$  as a function of waveguide separation  $L_2$

### 三、结 论

本文以 Marcatili 近似解为基础, 仿照相互正交的三层平板波导与五层平板的场函数, 来构造尝试函数, 其变分结果是令人满意的, 与 Sharma 的变分结果一致, 采用本方法求解矩形双沟道定向耦合器耦合长度不仅精确度高, 而且计算简单, 物理图像清晰, 所以便于向其它耦合器结构及周期波导推广。

### 参 考 文 献

- [1] F. Sporleder, H. G. Unger; *Waveguide Tapers Transitions and couplers*, (Peter Peregrinus Ltd., 1979), 2.8
- [2] H. G. Unger; *Planar Optical Waveguides and Fibers*, (Clarendon Press, Oxford, 1977), 3.6
- [3] E. A. J. Marcatili; *Bell Syst. Tech. J.*, 1969, **48**, No. 7 (Sep), 2071~2102.
- [4] A. Sharma, P. K. Mishra *et al.*; *Proceedings of Second European Conference on Integrated Optics*, (IEE, London and New York, 1983), 9~12.
- [5] R. G. Hunsperger; *Integrated Optics: Theory and Technology*, (Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York, Tokyo, Second Edition, 1984), 108~118.
- [6] A. Kumar, A. N. Kaul *et al.*; *Opt. Lett.*, 1985, **10**, No. 2 (Feb), 86~88.
- [7] 乔力; 余守宪; *光学学报*, 1986, **6**, No. 10 (Oct).

## Variational analysis of dual-channel dielectric directional couplers

SHE SHOUXIAN, QIAO LI AND WANG JINGYI  
(Northern Jiao Tong University, Beijing)

(Received 21 May 1986)

### Abstract

In this paper, the coupling characteristics of a dielectric directional coupler consisting of two parallel rectangular waveguides are analysed. We make use of variational analysis to obtain the coupling length. It is shown that the presented technique is much more accurate than the widely used Marcatali's method as well as perturbation method. By means of this method, coupling length can be easily calculated with high accuracy, and it can be extended to the analysis of other devices in integrated optics.

**Key Words:** optical waveguide; integrated optics; directional coupler.

### 1986 年全国激光光谱学术报告会在安徽合肥市召开

在中国光学学会光谱专业委员会主办的 1986 年全国激光光谱学术报告会于 11 月 13~18 日在合肥市举行。秘书、会务工作由中国科学院安徽光学精密机械研究所、中国科学技术大学、中国科学院物理研究所、哈尔滨工业大学和合肥市光学学会承担。出席这次学术会议的有来自全国 12 个省、市专家、学者、研究生等约 120 人。中国光学学会理事长王大珩教授亲临指导。

本次会议学术报告共 72 篇、特邀报告 10 篇。论文涉及的领域包括：金属蒸气光谱、光电离光谱、光电流光谱、共振光电离光谱、等离子体激光光谱、荧光光谱、喇曼光谱、吸收和发射光谱等；既有理论性的探索研究，也有实验的测试报告以及某一光谱领域的动向性评述。基本反映了我国近年来在激光光谱领域的研究水平和所取得的成果。

会议期间，与会代表参观了中国科学院安徽光学精密机械研究所的国家开放实验室——激光光谱学实验室、中国科学院等离子体所的托卡马克装置和固体物理所的葛氏内耗仪等先进实验装置。

与会代表一致认为，这次激光光谱学术会议开得较为成功，应当定期举行相互交流。

(黎 风)