

# 梯度棒折射率分布系数的计算和验证

曹 庆 林

(中国科学院西安光学精密机械研究所)

## 提 要

本文推导了用离子交换法制作的径向折射率梯度棒的  $g$ ,  $h_4$  和  $h_6$  与材料特性相联系的计算公式。根据测定的材料参数,并用本文公式算出的  $g$  值与用成像法测得的  $g$  值相比较,其结果基本相符。

关键词: 折射率梯度棒, 分布系数。

## 一、引 言

折射率梯度棒作成的自聚焦透镜在微型光学系统<sup>[1]</sup>、医用光学诊断器、光复印机<sup>[2]</sup>等方面有广泛的用途。特别是在光学纤维通信系统中,用它可做连接器、耦合器、衰减器、多位开关、波分复用器等多种无源器件<sup>[3]</sup>。但是,无论哪一种应用都必须考虑自聚焦透镜的成像质量问题,即像差问题。对于成像光学系统它影响分辨本领,对于无源器件它影响光能损耗<sup>[3]</sup>。而决定像差的便是折射率分布的高次系数,特别是二次项分布系数<sup>[4]</sup>。

可以用微分干涉法测定折射率分布<sup>[5]</sup>,然后根据分布曲线确定分布系数,但是这种方法不仅需要得到折射率的绝对值,还要使用折射率配液法。文献[6]用成像法讨论了分布系数,但没能给出一般的解析表达式。本文提出了另一种获得分布系数的方法。

## 二、公 式 推 导

圆柱形径向梯度折射率棒的折射率分布可表示为<sup>[1,5,6]</sup>

$$n^2(r) = n_0^2 [1 - (gr)^2 + h_4 (gr)^4 + h_6 (gr)^6], \quad (1)$$

式中  $n(r)$  为距轴  $r$  处的折射率,  $n_0$  为中心折射率,  $n(0) = n_0$ ,  $g$  为聚焦常数,也可称为二次分布系数。 $h_4$  和  $h_6$  为高次分布系数或分别称为四次、六次分布系数。

制造折射率梯度棒的主要方法是离子交换法。它是将含有金属氧化物氧化铊  $Tl_2O$  (或氧化铯  $Cs_2O$ , 或氧化锂  $Li_2O$ ) 的玻璃圆柱体放到高温熔盐,例如硝酸钾  $KNO_3$  中浸渍,在高温下,使玻璃中从上述金属氧化物中游离出的  $Tl^+$  与熔融盐中的  $K^+$  互换位置。称  $Tl^+$  为被交换离子或掺杂离子、 $K^+$  为交换离子。由于  $Tl^+$  比  $K^+$  有高得多的折射率,因而交换后便在玻璃棒中形成一个从中心向边缘逐渐减小的折射率分布。可以只考虑  $Tl^+$  而忽略  $K^+$  的影响。描述这个“离子交换”(或“离子扩散”)过程的方程式为<sup>[6]</sup>

$$\left. \begin{aligned} & t=0, 0 < r < r_0, C=C_0 \text{ 和 } T > 0, r=0, C=C_1, \\ & \frac{C(r)-C_0}{C_0-C_1} = \frac{2}{r} \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-D_0 \alpha_m^2 t) \frac{J_0(r \alpha_m)}{\alpha_m J_0(r_0 \alpha_m)}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中  $t$  为交换时间,  $r_0$  为玻璃棒半径,  $C(r)$  为距轴为  $r$  处的被交换离子  $Tl^+$  的浓度,  $J_0$  和  $J_1$  分别为零阶第一类和一阶第一类贝塞耳函数。  $\alpha_m r_0$  是零阶第一类贝塞耳函数  $J_0(r_0 \alpha_m) = 0$  的第  $m$  个根。  $C_0$  为交换开始时, 玻璃中的离子浓度(是一个常数)。  $D_0$  为扩散常数, 一般情况下它是交换温度和离子浓度的函数。本文中把它仅看作温度的函数。而且在交换过程中保持温度不变。按照定义<sup>[5]</sup>

$$T = D_0 t / r_0^2, \quad (3)$$

为归一化时间。利用折射率与离子浓度的正比关系, 并引进  $\beta_m = \alpha_m r_0$ 。则(2)式又可以被写为

$$\left. \begin{aligned} & t=0, 0 < r < r_0, n=n' \text{ 和 } t > 0, r=r_0, n=n_1, \\ & \frac{n(r)-n_1}{n'-n_1} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\beta_m^2 T) \frac{J_0(\beta_m r/r_0)}{\beta_m J_1(\beta_m)}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中  $n(r)$  为离中心  $r$  处的折射率,  $n'$  为初始玻璃棒的折射率,  $n_1$  为交换一段时间后棒边缘处的折射率。当玻璃棒半径取归一化半径或令  $r_0=1$  时, (4)式的第二式又可写为

$$n(r) = n_0 \left[ 1 - \frac{n'-n_1}{n_0} A_2 r^2 + \frac{n'-n_1}{n_0} A_4 r^4 - \frac{n'-n_1}{n_0} A_6 r^6 \right], \quad (5)$$

$$n_0 = n_1 + (n' - n_1) A_0, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \exp(-\beta_m^2 T)}{\beta_m J_1(\beta_m)}, \\ A_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \exp(-\beta_m^2 T)}{\beta_m J_1(\beta_m)} \left( \frac{\beta_m}{2} \right)^2, \\ A_4 &= \frac{1}{(2!)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \exp(-\beta_m^2 T)}{\beta_m J_1(\beta_m)} \left( \frac{\beta_m}{2} \right)^4, \\ A_6 &= \frac{1}{(3!)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \exp(-\beta_m^2 T)}{\beta_m J_1(\beta_m)} \left( \frac{\beta_m}{2} \right)^6, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

显然从(6)式有

$$\left. \begin{aligned} & \frac{n'-n_1}{n_0} = \frac{1}{K + A_0}, \\ & K = \frac{n_1}{n' - n_1}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将(5)式两端平方并省略去高于  $r^6$  的项后与(1)式比较, 便得

$$\left. \begin{aligned} g &= \sqrt{\frac{2A_2}{K + A_0}}, \\ h_4 &= \frac{1}{4} \left[ \frac{A_4}{2A_2^2} (K + A_0) + 1 \right], \\ h_6 &= \frac{K + A_0}{16A_2^2} \left[ A_4 + \frac{A_6}{9A_2} (K + A_0)^2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由(7)式给出的  $A_0, A_2, A_4$  和  $A_6$  是  $T$  的函数, 而由(9)式给出的  $K$  是由玻璃棒的性质决定的参数。如果(5)式中的半径  $r$  不是归一化的, 则  $g$  应写为

$$g = \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{2A_2}{K + A_0}} \quad (10)$$

### 三、实验验证

不难看出,如果我们能测得材料的折射率  $n'$ , 归一化时间  $T$  和交换后梯度棒的边缘折射率  $n_1$ , 就可以用(6)~(9)计算分布函数  $g$ ,  $h_4$  和  $h_6$ 。但是,也可以用对数值孔径  $NA = \sqrt{2n_0(n_0 - n_1)}$  的测量来代替对  $n_1$  的测量。

由(6)、(8)两式不难导出

$$\left. \begin{aligned} K &= n' \frac{2A_0 n_0}{(NA)^2} - 1, \\ n_0 &= n' - \left(\frac{1}{A_0} - 1\right) \frac{(NA)^2}{2n_0}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

可见,只要测得  $n'$ 、 $T$  和  $NA$ , 即可算得  $g$ ,  $h_4$  和  $h_6^*$ 。

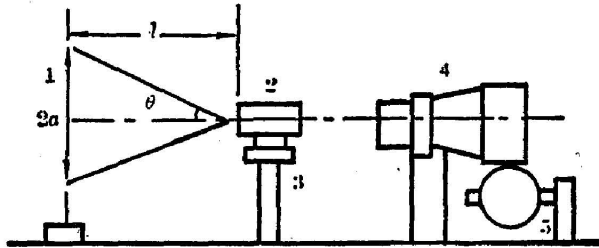


Fig. 1 Schematic of apparatus to measure the numerical aperture:

1—Object; 2—Sample of rod lens; 3—Abut;  
4—Microscope; 5—Dial gauge

数值孔径可由图1所示的简单方法测定。用一个长度  $z$  为  $1/4$  周期长度的透镜(焦点在端面上)作为样品放在承物台上。沿透镜轴用显微镜观察放在透镜另一方并垂直于光轴的目标  $2a$ , 逐渐将  $2a$  向透镜接近,直到  $2a$  充满透镜的视场时便可由下式求得数值孔径

$$NA = \sin \theta = \sin [\operatorname{tg}^{-1}(a/l)],$$

$\theta$  和  $l$  为图1所示分别为孔径角和物距。由(5)和(6)式不难求得

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= (n' - n_1) (A_0 - A_2 r^2 + A_4 r^4 + A_6 r^6), \\ \Delta &= n(r) - n_1, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$\Delta$  是半径  $r$  处与边缘  $r_0$  处的折射率差。让  $\Delta_1, \Delta_2$  分别对应  $r_1, r_2$  则

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{A_0 - A_2 r_1^2 + A_4 r_1^4 + A_6 r_1^6}{A_0 - A_2 r_2^2 + A_4 r_2^4 + A_6 r_2^6} = f(T), \quad (13)$$

(13)式右边仅是  $T$  的函数。

从梯度棒上截一小段,磨成厚度  $D \leq 0.5 \text{ mm}$  端面垂直于轴的薄片。将薄片放入雅敏干涉光路中<sup>[7]</sup>, 便可根据得到的干涉图测得  $\Delta_1, r_1, \Delta_2, r_2$ 。将测得的数值代入(13)式,即可求  $T$  的数值解。

测量  $g$  的方法已经很多,在前述制作  $1/4$  周期长度透镜的过程中,实际上我们已经得到了  $g$ 。如果样品并不精确是  $1/4$  周期长度的话,在我们实验室里是用熟知的成像法测量  $g$  的。表1同时列出了用本文介绍的方法得到的  $g$  值与用成像法得到的  $g$  值。显然,两种方法得到的  $g$  值是相近的。从而说明用本文的方法得到的  $h_4$  和  $h_6$  的值也是可靠的。

\* 材料折射率一般在得到玻璃时即已给出。若未给出,可用  $V$  棱镜测定。

Table 1

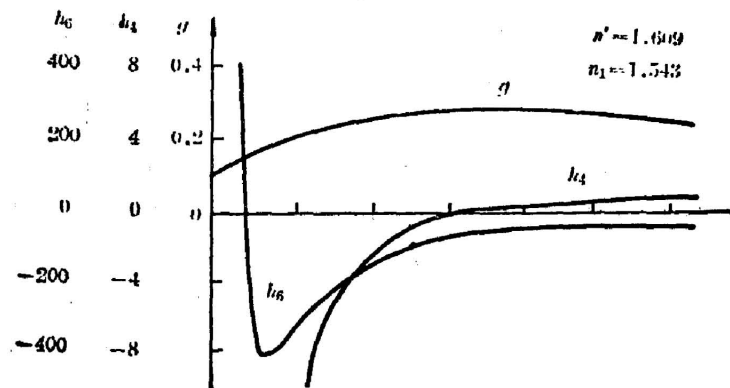
| Method               | Code of lens        | L1-1   | L1-2   | T1-1   |
|----------------------|---------------------|--------|--------|--------|
| Method of this paper | $n'$                | 1.5397 | 1.5397 | 1.5855 |
|                      | $Z(\text{mm})$      | 4.87   | 4.87   | 6.30   |
|                      | $NA$                | 0.186  | 0.196  | 0.366  |
|                      | $D(\text{mm})$      | 0.49   | 0.49   | 0.28   |
|                      | $T$                 | 0.068  | 0.074  | 0.123  |
|                      | $2r_0(\text{mm})$   | 0.83   | 0.82   | 2.00   |
|                      | $g(\text{mm}^{-1})$ | 0.266  | 0.266  | 0.260  |
| Imaging method       | $g(\text{mm}^{-1})$ | 0.273  | 0.254  | 0.260  |

## 四、计算实例与讨论

以  $r_0=1\text{mm}$ ,  $n'=1.609$ ,  $n_1=1.543$  的情况作为实例, 对于不同  $T$  值下的分布系数  $g$ ,  $h_4$  和  $h_6$  进行了计算。其部分结果已列于表 2, 而图 2 是根据这些结果作的曲线。图 3 是对同一种材料, 不同  $T$  值所作的折射率分布曲线。

Table 2

| $T$  | $g$   | $h_4$  | $h_6$  | $T$  | $g$   | $h_4$ | $h_6$ |
|------|-------|--------|--------|------|-------|-------|-------|
| 0.05 | 0.162 | -53.58 | 352.4  | 0.11 | 0.280 | -0.01 | -40.4 |
| 0.06 | 0.204 | -12.99 | -371.8 | 0.12 | 0.280 | 0.35  | -28.7 |
| 0.07 | 0.234 | -5.84  | -235.5 | 0.13 | 0.279 | 0.61  | -20.6 |
| 0.08 | 0.255 | -2.87  | -140.0 | 0.14 | 0.276 | 0.81  | -14.7 |
| 0.09 | 0.268 | -1.38  | -87.86 | 0.15 | 0.270 | 1.06  | -8.3  |
| 0.10 | 0.276 | -0.54  | -58.30 | 0.16 | 0.267 | 1.13  | -6.5  |

Fig. 2 Curve of  $g$ ,  $h_4$  and  $h_6$  against  $T$

根据表 2、图 2 和图 3 可以得到如下结论: (1) 归一化时间  $T$  是一个重要参量, 当玻璃材

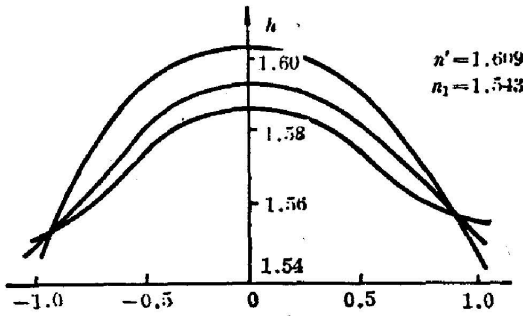


Fig. 3 Curve of refractive-index distribution

料的折射率一定时, 通过控制交换时间可以获得所需要的折射率分布; (2) 关于  $T, g$  值有一个极大值; (3) 当  $T$  比较小时, 即离子交换的初期,  $h_4$  和  $h_6$  随  $T$  的变化都很迅速, 而当  $T$  较大时,  $h_4$  和  $h_6$  随  $T$  的变化较缓慢。当  $T$  足够大时,  $h_4$  和  $h_6$  的绝对值都可以变得很小; (4) 当  $T$  值过大, 即交换时间过长时, 不但  $h_4$  增大, 影响梯度棒透镜的像质, 而且  $g$  和中心折射率  $n_0$  都减小而降低数值孔径; (5) 为了使梯度棒透镜既有较好的像质又有较大的数值孔径, 设计玻璃材料时要使其折射率  $n'$  足够大。

本文承陈邹生、高英俊同志提供雅敏干涉装置; 董桂芳同志提供玻璃折射率的数据; 张莉菁同志提供透镜样品, 在此向他(她)们一一表示感谢。

#### 参 考 文 献

- [1] N. Yamamoto, H. Nishi *et al.*; *Appl. Opt.*, 1982, **21**, No. 6 (Mar), 1021~1023.
- [2] Motoaki Kawazu, Yukio Ogura; *Appl. Opt.*, 1980, **19**, No. 7 (Apr), 1105~1012.
- [3] W. J. Tomlinson; *Appl. Opt.*, 1980, **19**, No. 7 (Apr), 1127~1138.
- [4] W. J. Tomlinson; *Appl. Opt.*, 1980, **19**, No. 7 (Apr), 1117~1126.
- [5] I. Kitano, K. Nishizawa *et al.*; *Appl. Opt.*, 1982, **21**, No. 6 (Mar), 1017~1020.
- [6] Kenichi Iga; *Appl. Opt.*, 1982, **21**, No. 6 (Mar), 1024~1029.
- [7] 私人通讯。

### Calculation of index-distribution coefficients of GRIN rod and it's verification

CAO QINGLIN

(Xian Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 2 June 1986; revised 19 August 1986)

#### Abstract

This paper derived the formulas of calculating the refractive index-distribution coefficients  $g, h_4$  and  $h_6$  corresponding to properties of the material used in ion-exchange process. The value of  $g$  obtained from these formulas with the measured data of the material are consistent with that measured by the imaging method.

**Key Words:** gradient-index rod (GRIN-rod); distribution coefficient.