

彩虹全息系统的信息量

陶纯匡
(重庆大学应用物理系)

提 要

本文用光学信息论本征理论方法讨论了彩虹全息系统的衍射成像关系,获得了限制孔径为矩形,十字形和圆形时系统的信息量和空间自由度表达式。

关键词: 信息论, 空间自由度, 菲涅耳球波函数, 本征理论方法。

一、引 言

自1969年Benton提出的二步彩虹全息术以来,彩虹全息术得到了迅猛的发展和广泛的应用。但很长一段时期里,有关该项技术的报道大都限于具体实验。最近几年里由于文献[1], [2], [3]等作者的大量工作,才发展起一套较为完整的理论。

本文的意图是用光学信息论本征理论方法计算彩虹全息系统的信息量。

众所周知,一个光场信息量表达式为

$$I = N_{DOF} \log_2(1 + \sigma), \quad (1)$$

$$N_{DOF} = Tw\psi s, \quad (2)$$

式中 σ 为光场信噪比; N_{DOF} 为光场总自由度^[4], T, w, ψ, s 分别为时间,颜色,偏振和空间的自由度。由(1)式可知光场信息量表达式中起决定作用的是总自由度 N_{DOF} 。本文在获得 N_{DOF} 的过程中把重点放在求空间自由度 s 上。

第二部分,建立系统的衍射成像方程。为了获得较为完整的单色衍射成像方程。在推导过程中没有忽略二次位相因子 $\exp[i\Delta(x_0^2 + y_0^2)]$ 的作用,因为它已足以影响光场的分布状况。此外,出于讨论一个理想系统的需要,且也有助于获得较简洁的厄米型成像积分核,在推导中采用原参考光束照明全息图。第三部分,从本征积分方程出发讨论衍射成像方程,以获得系统的空间自由度。第四部分,讨论除空间自由度以外的其它自由度,将发现彩虹全息系统的多色像的颜色自由度为三。第五部分为本文的结论。

二、系统的衍射成像方程

文献[3]详细地讨论了具有实际意义的二维彩虹全息系统,现将该文的系统示意图重

收稿日期: 1986年2月15日; 收到修改稿日期: 1986年5月12日

* 笔者所讨论的以矩形,十字形为限制孔径时彩虹全息系统的信息量被Image Science '85录用(宣读类论文)(1985年6月芬兰)。尔后,笔者又讨论了限制孔径为圆形的情况,全文在光学'85年会上宣读(1985年11月上海嘉定)。

新绘制在图 1 里。图中 $P(\xi, \eta)$ 为限制孔径; $u(x_0, y_0)$ 为物分布; $\mathcal{U}(\alpha, \beta)$ 为再现像分布; H 为全息干板; $\mathcal{Z}(x, y)$ 为全息片孔径; R 为参考光源; C 为再现光源。记录时投射在干板 H 上的物光分布和参考光分布分别为^[3]

$$O(x, y) = \iint_{D_0} u(x_0, y_0) \exp\left(-iK \frac{x_0^2 + y_0^2}{2g}\right) dx_0 dy_0 \iint_P \exp\left(iK \frac{x^2 + y^2}{2s}\right) \times \exp\left[iK \left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2g}\right) (\xi^2 + \eta^2)\right] \exp\left\{-iK \left[\left(\frac{x}{s} - \frac{x_0}{g}\right) \xi + \left(\frac{y}{s} - \frac{y_0}{g}\right) \eta\right]\right\} d\xi d\eta, \quad (3)$$

$$R(x, y) = \exp\left[-iK \left(\frac{x^2 + y^2}{2L_1} - \frac{x_r x + y_r y}{L_1}\right)\right], \quad (4)$$

其中 D_0 为物分布区域。如果全息片的记录是线性的, 那么, 全息片的曝光量可表示为

$$E(x, y) = E_0 + tR^*O + c.c., \quad (5)$$

其中 E_0 为常曝光量; t 为曝光时间; $c.c.$ 为第二项的共轭。考虑到全息片的记录过程是一个卷积过程, 那么, 有效曝光量可表示成^[5]

$$[E(x, y)]_{\text{eff}} = E(x, y) \otimes \otimes m(x, y), \quad (6)$$

其中 $\otimes \otimes$ 表示二维卷积运算; $m(x, y)$ 是记录干板的脉冲响应, 它和传递函数的关系为

$$m(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} M(f_x, f_y) \exp[i2\pi(f_x x + f_y y)] df_x df_y. \quad (7)$$

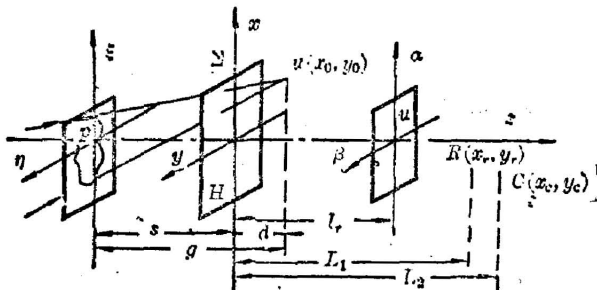


Fig. 1



Fig. 2

有效曝光的线性记录得到全息片的振幅透过率为

$$T(x, y) = T_0 + T_r(x, y) + T_o(x, y), \quad (8)$$

式中 T_r 和 T_o 分别对应于再现时产生实像和虚像的透过率部分。若采用参考光再现, 那么与讨论有关的光场分布是

$$\mathcal{U}(\alpha, \beta) = \iint_s \exp\left(iK \frac{x^2 + y^2}{2s}\right) \iint_{D_0} u(x_0, y_0) \exp\left(iK \frac{x_0^2 + y_0^2}{2g}\right) dx_0 dy_0 \times \iint_P M(f_x, f_y) \exp\left\{iK \left[\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2g}\right) (\xi^2 + \eta^2) - \left(\frac{x}{s} - \frac{x_0}{g}\right) \xi - \left(\frac{y}{s} - \frac{y_0}{g}\right) \eta\right]\right\} d\xi d\eta$$

$$\left. \begin{aligned} & \times \exp \left[i K \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2d} - \frac{\alpha x + \beta y}{d} + \frac{x^2 + y^2}{2d} \right) \right] dx dy, \\ f_x &= \frac{x}{\lambda L_1} + \frac{x}{\lambda s} - \frac{x_r}{\lambda L_1} - \frac{\xi}{\lambda s}, \quad f_y = \frac{y}{\lambda L_1} + \frac{y}{\lambda s} - \frac{y_r}{\lambda L_1} - \frac{\eta}{\lambda s}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

假设 (i) 干板为理想干板 $M(f_x, f_y) = 1$, (ii) 由于孔径 P 的限制, 物光照亮干板的区域只占干板很小一部分, 此区域外物光迅速衰减到零, 在 Σ 上的积分可视为无穷积分^[6]。因而有

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\alpha, \beta) &= \iint_{D_0} u(x_0, y_0) \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda g} (\alpha^2 - x_0^2 + \beta^2 - y_0^2) \right] dx_0 dy_0 \\ & \times \iint_P \exp \left\{ -i 2\pi \frac{1}{\lambda g} [(\alpha - x_0)\xi + (\beta - y_0)\eta] \right\} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (10)$$

如果限制孔径是图 2 所示的矩形缝, 可得衍射成像方程为*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\alpha, \beta) &= \iint_{D_0} u(x_0, y_0) \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda g} (\alpha^2 - x_0^2 + \beta^2 - y_0^2) \right] \frac{\sin(\pi W/\lambda g)(\alpha - x_0)}{\pi(\alpha - x_0)} \\ & \times \frac{\sin(\pi L/\lambda g)(\beta - y_0)}{\pi(\beta - y_0)} dx_0 dy_0. \end{aligned} \quad (11)$$

三、成像本征积分方程和空间自由度

1. 矩形缝孔径

设矩形物 $u(x_0, y_0) \in D_0 = U \cdot V$ 为可分离变量带限函数, 用菲涅耳(Fresnel)椭球波函数^[6]把它展开成

$$u(x_0, y_0) = \sum_n \sum_m \psi_n(c_\alpha, x_0) \psi_m(c_\beta, y_0), \quad (12)$$

式中 c_α, c_β 为参量, $2c_\alpha = \Omega_U U$, $2c_\beta = \Omega_V V$; U, V 为矩形物尺寸;

$$\Omega_U = (\pi W/\lambda g) = (KW/2g), \quad \Omega_V = (\pi L/\lambda g) = (KL/2g).$$

在彩虹全息系统满足的菲涅耳光场中应有如下本征积分方程成立^[6]

$$\mu_n \psi_n(c_\alpha, \alpha) = \int_{-U/2}^{U/2} \exp[i\pi A(\alpha^2 - x_0^2)] \psi_n(c_\alpha, x_0) \frac{\sin \Omega_U(\alpha - x_0)}{\pi(\alpha - x_0)} dx_0, \quad (13)$$

式中 $A = (1/\lambda g)$ 为波前曲率参量。于是(11)式可写成

$$\mathcal{U}(\alpha, \beta) = \sum_n \sum_m \mu_n(c_\alpha) \mu_m(c_\beta) \psi_n(c_\alpha, \alpha) \psi_m(c_\beta, \beta). \quad (14)$$

由本征值 μ_n, μ_m 的矩形性质可知(14)式的求和上限已不为无穷大, 而是一个有限数^[7]。因为 $n > (2c_\alpha/\pi)$, $m > (2c_\beta/\pi)$ 时本征值 μ_n, μ_m 衰减为零, 携带信息的基元 ψ_n, ψ_m 损失殆尽; 只有当 $n < (2c_\alpha/\pi)$, $m < (2c_\beta/\pi)$ 时才有 $\mu_n, \mu_m = 1$, 波函数 ψ_n, ψ_m 才能把信息由物空间传递到像空间。

因此, 当彩虹全息系统的限制孔径为矩形缝时, 其空间自由度为

$$S = \left(\frac{\Omega_U U}{\pi} \right) \left(\frac{\Omega_V V}{\pi} \right). \quad (15)$$

* $\mathcal{U}(\alpha, \beta)$ 表达式中忽略了一个常数因子。下同。

2. 十字形孔径

如果限制孔径 $P(\xi, \eta)$ 如图 3 所示的十字形缝。由波动方程和记录介质的线性性质, 这时的衍射成像方程为

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\alpha, \beta) = & \iint_{D_0} u(x_0, y_0) \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda g} (\alpha^2 - x_0^2 + \beta^2 - y_0^2)\right] \left[\frac{\sin \Omega_U (\alpha - x_0)}{\pi (\alpha - x_0)} \cdot \frac{\sin \Omega_V (\beta - y_0)}{\pi (\beta - y_0)} \right. \\ & + \frac{\sin \Omega_V (\alpha - x_0)}{\pi (\alpha - x_0)} \cdot \frac{\sin \Omega_U (\beta - y_0)}{\pi (\beta - y_0)} \\ & \left. - \frac{\sin \Omega_U (\alpha - x_0)}{\pi (\alpha - x_0)} \cdot \frac{\sin \Omega_V (\beta - y_0)}{\pi (\beta - y_0)} \right] dx_0 dy_0, \end{aligned} \quad (16)$$

式中忽略了常数因子。于是可以获得

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\alpha, \beta) = & \sum_m \sum_n \mu_n(c_\alpha) \mu_m(c_\beta) \psi_n(c_\alpha, \alpha) \psi_m(c_\beta, \beta) + \sum_m \sum_n \mu_n(c'_\alpha) \mu_m(c'_\beta) \\ & \times \psi_n(c'_\alpha, \alpha) \psi_m(c'_\beta, \beta) - \sum_m \sum_n \mu_n(c_\alpha) \mu_m(c'_\beta) \psi_n(c_\alpha, \alpha) \psi_m(c'_\beta, \beta), \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $c'_\alpha = (\Omega_U U/2)$, $c'_\beta = (\Omega_V V/2)$ 。因此, 用十字缝作限制孔径时系统的空间自由度为

$$s = \left(\frac{\Omega_U U}{\pi}\right) \left(\frac{\Omega_V V}{\pi}\right) + \left(\frac{\Omega_V U}{\pi}\right) \left(\frac{\Omega_U V}{\pi}\right) - \left(\frac{\Omega_U U}{\pi}\right) \left(\frac{\Omega_V V}{\pi}\right). \quad (18)$$

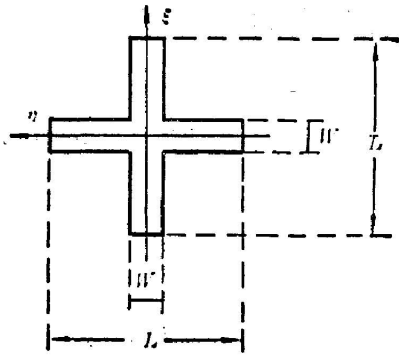


Fig. 3

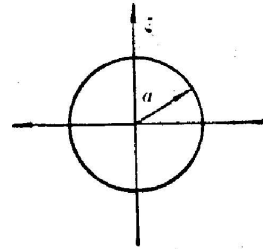


Fig. 4

3. 圆形限制孔径

设系统限制孔径和物都是圆形, 物半径为 R 。限制孔径是半径为 a 的圆, 如图 4 所示。经过一定的推导可以获得极坐标表示下与(11)式相对应的衍射成像方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U}(r_2, \varphi_2) = & \int_0^R \int_0^{2\pi} u(r_1, \varphi_1) \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda g} (r_2^2 - r_1^2)\right] \frac{J_1(\Omega r)}{\Omega r} r_1 dr_1 d\varphi_1, \\ \Omega = & \frac{2\pi a}{\lambda g}, \quad r = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos \varphi}, \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中忽略了常数因子; J_1 为第一类一阶贝塞耳(Bessel)函数。

对圆形物可按圆菲涅耳椭圆波函数把它展开

$$u(r_1, \varphi_1) = \sum_N \sum_n \psi_{N,n}(c, r_1) \exp(iN\varphi_1). \quad (20)$$

根据文献[6]、[8]可导出圆域里的成像本征积分方程

$$\begin{aligned}
 & 2\pi\beta_N\mu_{N,n}(c)\psi_{N,n}(c, r_2)\exp(iN\varphi_2) \\
 & = \int_0^R \int_0^{2\pi} \psi_{N,n}(c, r_1)\exp(iN\varphi_1) \cdot \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda g}(r_2^2 - r_1^2)\right] \frac{J_1(\Omega r)}{\Omega r} r_1 dr_1 d\varphi_1, \left. \right\} \quad (21) \\
 & \beta_N = \begin{cases} \frac{1}{2}, & N=0, \\ 1, & N \geq 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

最终可以导出像光场分布为

$$\mathcal{U}(r_2, \varphi_2) = \sum_N \sum_n \beta_N \mu_{N,n}(c) \psi_{N,n}(c, r_2) \exp(iN\varphi_2). \quad (22)$$

综上所述, 圆形物, 圆形限制孔径时系统的空间自由度为

$$s = 2\left(\frac{\Omega R}{\sigma}\right)^2 - 1. \quad (23)$$

四、彩虹全息系统的信息量

1. 彩虹全息系统的其它自由度

由总自由度的表达式(2)可知, 除空间自由度 s 外, 还有时间, 偏振和颜色自由度。

如果实验是稳定光场, 以静物为对象, 那么, 时间自由度 $T=1$ 。

如果考虑光源为两个偏振态, 那么, 偏振自由度 $\psi=2$ 。

人们观看颜色时既包含心理的过程又包含了物理的过程, 因此, 颜色包含的光的特性, 不同于空间和时间的均匀性^[9]。这就是人们把光场的空间信息量(即空间自由度)和颜色信息量(即颜色自由度)分开讨论的道理, 并且在理论上讨论颜色自由度时可以不涉及光场的具体空间分布状况。

色觉理论的基本学说(即 Young-Helmholtz 三色学说)认为, 颜色的感觉是人眼的三种视锥细胞独自兴奋而引起。对应着这三种兴奋的是红、绿、蓝三原色矢量, 它们互相垂直而构成所谓的颜色空间。在颜色空间里一个任意有色物点 P 的颜色用矢量 OP 表示, 它等于三原色矢量的线性组合, 而矢量 OP 的模代表亮度。彩虹全息像是一种多色像, 要完整表示它需要使用上述三原色矢量, 因而彩虹全息像的颜色自由度 $w=3$ 。

2. 彩虹全息系统的信息量

由上面的讨论可知, 当限制孔径为矩形, 十字形和圆形时系统的总自由度分别是

$$\begin{aligned}
 N_{DOF1} &= 6 \left(\frac{\Omega_U U}{\sigma}\right) \left(\frac{\Omega_V V}{\sigma}\right), \\
 N_{DOF2} &= 6 \left[\left(\frac{\Omega_U U}{\sigma}\right) \left(\frac{\Omega_V V}{\sigma}\right) + \left(\frac{\Omega_V U}{\sigma}\right) \left(\frac{\Omega_U V}{\sigma}\right) - \left(\frac{\Omega_U U}{\sigma}\right) \left(\frac{\Omega_U V}{\sigma}\right) \right], \\
 N_{DOF3} &= 6 \left[2 \left(\frac{\Omega R}{\sigma}\right)^2 - 1 \right]. \left. \right\} \quad (24)
 \end{aligned}$$

最终, 可求得上述三种限制孔径时系统的信息量分别为

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 6 \left(\frac{\Omega_U U}{\sigma}\right) \left(\frac{\Omega_V V}{\sigma}\right) \log_2(1+\sigma), \\
 I_2 &= 6 \left[\left(\frac{\Omega_U U}{\sigma}\right) \left(\frac{\Omega_V V}{\sigma}\right) + \left(\frac{\Omega_V U}{\sigma}\right) \left(\frac{\Omega_U V}{\sigma}\right) - \left(\frac{\Omega_U U}{\sigma}\right) \left(\frac{\Omega_U V}{\sigma}\right) \right] \log_2(1+\sigma), \left. \right\} \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$I_s = 6 \left[2 \left(\frac{\Omega_R}{\pi} \right)^2 - 1 \right] \log_2(1 + \sigma) \quad \Bigg]$$

3. 彩虹全息系统的空间自由度的物理解释

人们对空间自由度的认识有两种观点：一种观点是从抽样理论出发，认为空间自由度表征了还原一个带限函数所需要的抽样点数；另一种观点认为空间自由度是人们用一组本征函数展开一个带限函数(物体)所需的本征函数之总和。因而它既有着确切的数学意义也有着确切的物理意义。

由(15)、(18)、(23)式可知， s 可用光学系统的性能指标描述。例如(15)式

$$s = \left(\frac{\Omega_U U}{\pi} \right) \left(\frac{\Omega_V V}{\pi} \right) = \frac{W}{g} \frac{U}{\lambda} \frac{L}{g} \frac{V}{\lambda}, \quad (26)$$

亦即彩虹全息系统限制孔径对物中心的张角和物尺寸的乘积正比于系统的空间自由度。换句话说，物被系统传递的空间自由度完全由物尺寸、系统限制孔径尺寸以及物和限制孔径间的距离确定，如图 5 所示。

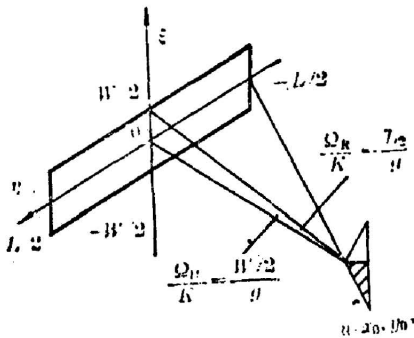


Fig. 5

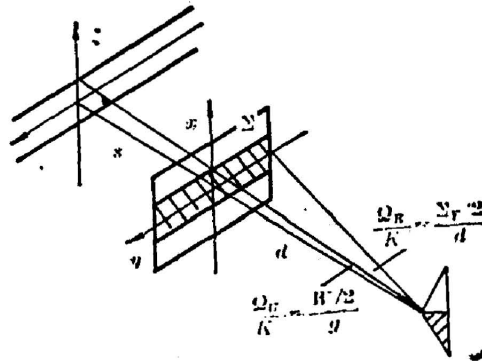


Fig. 6

应当指出的是，若在记录光路中采用一维狭缝作限制孔径，同时透镜或全息片孔径又不是很大，那么，在狭缝无限延伸的方向上的孔径角实际上被透镜或全息片中的小者所限制。如图 6 所示，在 η 方向上的孔径角被全息片 g 方向尺寸所限制。

五、结 论

彩虹全息图的本质是在观察者和物体的再现像之间形成一条狭缝像使观察者通过狭缝像看物体的像，以实现白光再现。这是系统加入狭缝后所获得的宝贵性能。文献[3]的作者讨论了系统加入狭缝会大大限制彩虹全息成像的最高频率，降低彩虹全息成像的分辩率。从本文讨论中可知，由于加入了限制孔径，使得物面上每点发出光束的孔径角不再由全息片尺寸限制而是由限制孔径决定。限制孔径尺寸远小于全息片尺寸，因而，大大地限制了物方孔径角，也就是大大限制了系统传递的空间自由度 s ，最终导致系统传递信息的能力显著降低，因此加入限制孔径以后是得有所失。换句话说，为了获得彩虹全息图的若干优点是以大量损失系统的信息量为代价的。

参 考 文 献

- [1] S. L. Zhuang *et al.*; *Appt. Opt.*, 1981, **20**, No. 5 (Mar), 872~877.
- [2] 陈桂丛等;《光学学报》,1983, **3**, No. 4 (Jul), 326~332.
- [3] 蔡履中,张幼文;《物理学报》,1982, **31**, No. 8 (Aug), 1020~1029.
- [4] C. K. Tao; *Conference Digest, ICO-13 Sapporo '84*, (Kazumi Murata, Published by Organizing Committee of ICO-13, Sapporo, Japan, 1984), 484~485.
- [5] A. Kozma *et al.*; *J. O. S. A.*, 1970, **60**, No. 1 (Jan), 34~43.
- [6] F. Gori; *Opt. Commun.*, 1983, **45**, No. 1 (Mar), 5~10.
- [7] G. Toraldo di Francia; *J. O. S. A.*, 1969, **59**, No. 7 (Jul), 799~804.
- [8] C. T. Tao; *Optica Acta*, 1983, **30**, No. 3 (Mar), 361~370.
- [9] R. J. 科利尔等;《光学全息》, (机械工业出版社,北京,1983), 464~468.

Amount of information for the rainbow-holography system

TAO CHUNKUANG

*(Department of Applied Physics, Chongqing University)**(Received 15 February 1986; revised 12 May 1986)***Abstract**

In this paper, the image-forming relationship of diffraction for the rainbow-holography system is discussed by the eigen-theory method of optical information theory. The expressions of the amount of information and the number of spatial degrees of freedom are given when the limiting pupil for the system is rectangular slit, the cross-like circle pupil, respectively.

Key Words: information theory; spatial degrees of freedom; Fresnel's prolate spheroidal wave function; Eigen-theory method.