第7卷 第4期 光学学报 Vol. 7, No. 4
1987年4月 ACTA OPTICA SINICA April, 1987

多纵模气体激光时间相干性的分析与研究

印建平 张炳泉 陆俊发* 夏菴刚**
(苏州大学激光研究室)

提 要

本文根据 Wiener-Khintchine 定理，导出了多纵模气体激光时间相干度的一般表达式；给出了激光多纵模非对称分布与对称分布两种状态下的结果；并当(i) $\Delta\nu=0$, $\Delta\nu_D\to\infty$; (ii) $\Delta\nu=0$, $\Delta\nu_D\to\infty$ 且 $\delta\nu_d=0$ 时，分别与文献[4]和[2, 3]的结果一致。文章就上述四种情况下的时间相干性进行了理论分析与实验研究。

关键词：多纵模气体激光，时间相干性。

一、引 言

双纵模激光时间相干性的周期性，早在1963年被 Morokuma 等人观察到[1]；以后 Smith[2] 和于美文[3] 等人先后采用多纵模的等幅无宽度模型，从理论上导出了气体激光多纵模对称分布状态下时间相干度的表达式。最近，葛万福等[4] 人采用多纵模的等幅等宽度模型，讨论了纵模对称分布状态下激光纵模频宽对时间相干性的影响。本文根据气体激光典型的纵模频谱结构，从 Wiener-Khintchine 定理出发，导出了多纵模气体激光时间相干度的一般表达式，给出了多纵模非对称分布与对称分布两种状态下的结果，并在近似条件 (i) $\Delta\nu_D\to\infty$, (ii) $\Delta\nu_D\to\infty$, $\delta\nu_d=0$ 下，分别得到与葛万福、Smith 和于美文等人的结果相一致。最后，以多纵模 He-Ne 激光器为例，给出了相应的实验结果。

二、公 式 推 导

1. 非对称分布状态下的时间相干度

由于气体激光器的气压较低，当小功率输出时，可见波段的激光线宽以多普勒展宽为主，相应的增益曲线、纵模线型均为高斯线型函数[3,4]，典型的纵模频谱结构如图1(a)所示[3,5]。图中 ν_0 为激光谱线的中心频率，$\Delta\nu_q$、$\Delta\nu_D$、$\delta\nu_d$ 及 $\Delta\nu_L$ 分别为纵模间距、激光线宽、单模频宽及激光振荡带宽。$\Delta\nu^*$ 为第 q 个纵模 ν_q 相对于 ν_0 的偏移量。

设激光输出的空间模式为 TEM_{00} 模，增益系数为 $g_D(\nu-\nu_0)$，每个纵模具有等宽的线型函数 $g_d(\nu)$，并假定各纵模频率不随时间漂移，则在激光振荡带内具有 N 个纵模(非对称分布)的激光光源的功率谱密度为

收稿日期：1986年3月20日；收到修改稿日期：1986年8月18日

* 华东地质学院，** 徐州师院物理系。

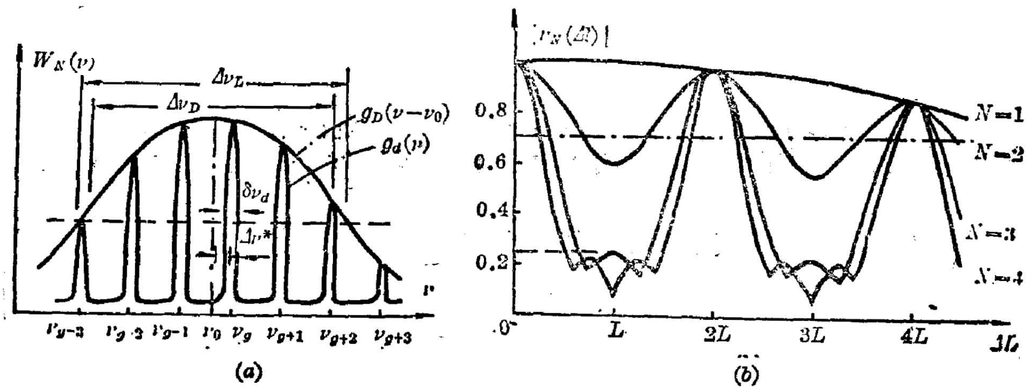


Fig. 1 Under the case of $\Delta\nu\neq0$, the frequency structure and temporal coherence of gas laser with multi-longitudinal modes

$$W_N(\nu)=\left\{\sum_{n=-N/2}^{N/2}\delta[\nu-(\nu_0+\Delta\nu^*+n\Delta\nu_q)]\,g_d(\nu-\nu_0)\right\}\circledast g_d(\nu), \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
g_d(\nu-\nu_0)&=\frac{2}{\Delta\nu_d}\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}\,G_0\exp\left[4\ln 2\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}\right)^2\right],\\
g_d(\nu)&=\frac{2}{\delta\nu_d}\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}\exp\left[-4\ln 2\left(\frac{\nu}{\delta\nu_d}\right)^2\right],\\
\Delta\nu_q&=\frac{c}{2nL}\doteq\frac{c}{2L},\quad \Delta\nu_D=7.16\times10^{-7}\nu_0\sqrt{\frac{T}{M}},\\
G_0&=\left(N_2-\frac{g_2}{g_1}N_1\right)\frac{\lambda_n^2}{8\pi}A_{21}。
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

根据 Wiener-Khintchine 定理和复时间相干度的定义

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_N(\tau)&\overset{\text{def.}}{=\!=}\Gamma_N(\tau)/\Gamma_N(0),\\
\Gamma_N(\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty}W_N(\nu)\exp(-i2\pi\nu\tau)\,d\nu,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

以及卷积定理，得到激光多纵模非对称分布状态($\Delta\nu\neq0$)下复时间相干度的一般表达式

$$\begin{aligned}
\gamma_N(\tau)&=A_N\exp(-i2\pi\nu_0\tau-d^2\tau^2)\\
&\times\sum_{m=1}^{N}\exp\Big\{i[2am-(N+1)a-2\pi\Delta\nu^*]\tau\\
&-\frac{1}{4b^2}[2am-(N+1)a-2\pi\Delta\nu^*]^2\Big\},
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{A_N}&=\sum_{m=1}^{N}\exp\left\{-\frac{1}{4b^2}[2am-(N+1)a-2\pi\Delta\nu^*]^2\right\},\\
a&=\pi\Delta\nu_q\doteq\frac{\pi c}{2L},\quad b=\frac{\pi\Delta\nu_D}{2\sqrt{\ln 2}},\\
d&=\frac{\pi\delta\nu_d}{2\sqrt{\ln 2}}。
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

如果以光程差 $\Delta l(=c\tau)$ 作为自变量，并设

$$A_{Nm}=A_N\exp\left\{-\frac{1}{4b^2}[2am-(N+1)a-2\pi\Delta\nu^*]^2\right\}, \tag{6}$$

则时间相干度的模为

$$|\nu_N(\Delta l)| = \exp\left[-\left(\frac{d}{c}\right)^2 \Delta l^2\right]\left|\sum_{m=1}^{N} A_{Nm}\exp\left\{i[2m-(N+1)]\frac{\pi\Delta l}{2L}\right.\right|。\tag{7}$$

这里假定, N 为奇数时, $\Delta\nu^* = \Delta\nu$; N 为偶数时, $\Delta\nu^* = \Delta\nu + \Delta\nu_{q/2}$。

2. 对称分布状态下的时间相干度

如果考虑到激活介质的模牵引效应, 则激光多纵模相对于中心频率 ν_0 对称分布的状态也是常见的。相应的频谱结构如图 2(a) 所示。当 $\Delta\nu=0$ 时, 由(4)式得到多纵模对称分布状态下的复时间相干度及其模分别为

$$\nu_N^{(1)}(\tau) = B_N\exp[-i2\pi\nu_0\tau - d^2\tau^2]\sum_{m=1}^{N}\exp\left\{i[2m-(N+1)]a\tau - \frac{a^2}{4b^2}[2m-(N+1)]^2\right\},\tag{8}$$

$$|\nu_N^{(1)}(\Delta l)| = B_N\exp\left[-\left(\frac{d}{c}\right)^2\Delta l^2\right] \times\left|\sum_{m=1}^{N}\exp\left\{i[2m-(N+1)]\frac{\pi\Delta l}{2L} - \frac{a^2}{4b^2}[2m-(N+1)]^2\right\}\right|,\tag{9}$$

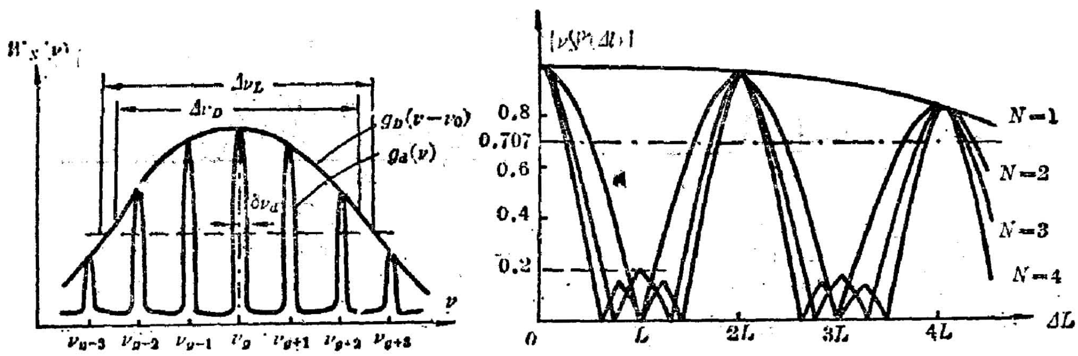


Fig. 2　Under the case of $\Delta\nu=0$, the frequency structure and temporal coherence of gas laser with multi-longitudinal modes

$$\frac{1}{B_N} = \sum_{m=1}^{N}\exp\left\{-\frac{a^2}{4b^2}[2m-(N+1)]^2\right\}。\tag{10}$$

3. 对称分布状态下的两则特例

(1) 等幅等宽度模型即 $\Delta\nu=0$, $\Delta\nu_D\to\infty$ 的情形

如果多普勒宽度远大于激光振荡带宽, 即 $\Delta\nu_D\gg\Delta\nu_L$, 则可近似认为 $\Delta\nu_D\to\infty$, 从而每个纵模的幅度近乎相等, 得到等幅等宽度模型。相应的频谱结构如图 3(a) 所示。将 $\Delta\nu_D\to\infty$ 代入(8)式得到

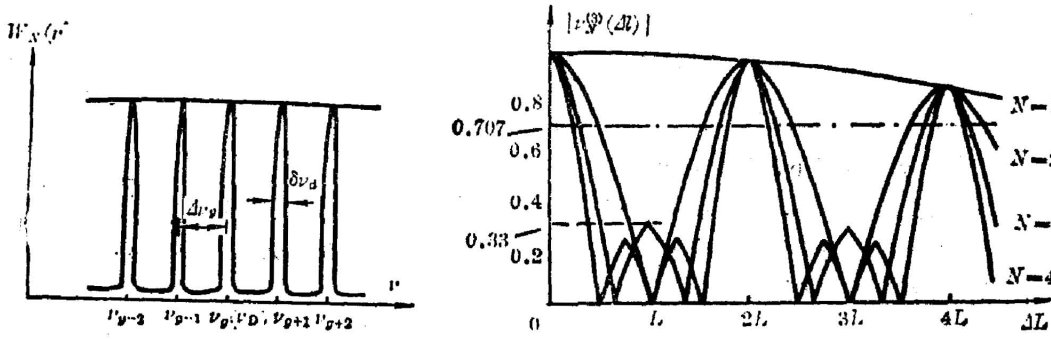
$$\nu_N^{2}(\tau) = \frac{1}{N}\exp[i2\pi\nu_0\tau - d^2\tau^2]\cdot\sum_{m=1}^{N}\exp\{i[2m-(N+1)]a\tau\},\tag{11}$$

及时间相干度的模为

$$|\nu_N^{(2)}(\Delta l)| = \frac{1}{N}\exp\left[-\left(\frac{d}{c}\right)^2\Delta l^2\right]\cdot\left|\sum_{m=1}^{N}\exp\left\{i[2m-(N+1)]\frac{\pi\Delta l}{2L}\right.\right|。\tag{12}$$

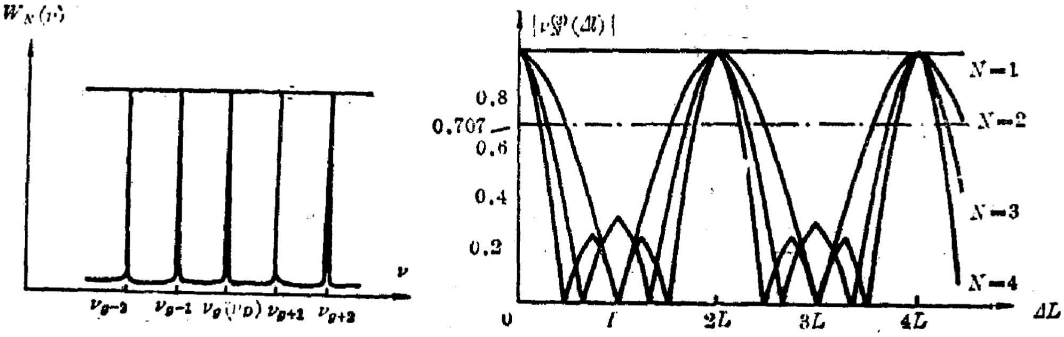
(2) 等幅无宽度模型, 即 $\Delta\nu=0$, $\Delta\nu_D\to\infty$, 且 $\delta\nu_a=0$ 的情形

当 $\Delta\nu_D\gg\Delta\nu_L$, $\delta\nu_a\ll\Delta\nu_q$ 时, 可将多纵模的频谱分布看作幅度相等, 频宽为零的 δ 脉冲序



(a) (b)

Fig. 3 Under the case of $\Delta\nu=0$, $\Delta\nu_D\to\infty$, the frequency structure and temporal coherence of gas laser with multi-longitudinal modes



(a) (b)

Fig. 4 Under the case of $\Delta\nu=0$, $\Delta\nu_D\to\infty$, and $\delta\nu_d=0$, the frequency structure and temporal coherence of gas laser with multi-longitudinal modes

列，即等幅无宽度模型。相应的频谱结构如图 4(a)所示。由 $\delta\nu_d=0$ 代入(13)式，得到

$$\nu_N^{(3)}(\tau)=\frac{1}{N}\exp(-i2\pi\nu_0\tau)\sum_{m=1}^{N}\exp\{i[2m-(N+1)]a\tau\}, \tag{13}$$

及时间相干度的模为

$$\begin{aligned}|\nu_N^{(3)}(\Delta l)|&=\frac{1}{N}\left|\sum_{m=1}^{N}\exp\left\{i[2m-(N+1)]\frac{\pi\Delta l}{2L}\right\}\right|\\&=\left|\frac{\sin(N\pi\Delta l/2L)}{N\sin(\pi\Delta l/2L)}\right|,\end{aligned} \tag{14}$$

若将(12)和(14)式按 $N=1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 展开，则显见上述(12)和(14)式分别与文献[4]和[2, 3]的结果一致。

三、理论计算与比较

如果设激光线宽 $\Delta\nu_D=1.5\times10^9$ Hz，纵模频宽为 $\delta\nu_D=1.5\times10^7$ Hz 及频率偏移量为 $\Delta\nu=7.5\times10^7$ Hz，则由(7)、(9)、(12)和(14)式计的算，得到上述四种情形下单纵模、双纵模、三纵模和四纵模激光时间相干度的理论曲线，如图 1(b)、2(b)、3(b)和 4(b)所示。

比较图 1(b)～4(b)可知：(i)考虑到单纵模频宽的影响，在 $\Delta l=2kl(k=0, 1, 2, \cdots)$

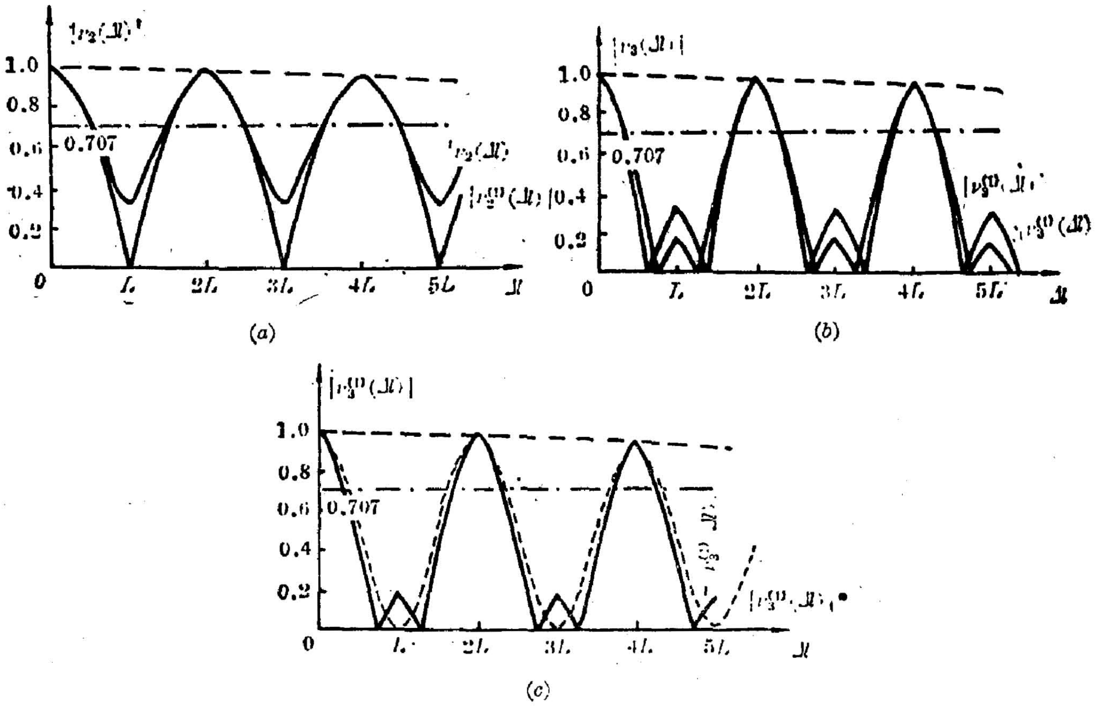


Fig. 5　Comparison about the temporal coherence of gas laser with multi-longitudinal modes

附近，多纵模激光的时间相干性将随着自然数 k 的增加而按指数规律下降，这是文献[2～3]所没有讨论的；(ii)考虑到多纵模幅度受增益曲线 $g_D(\nu-\nu_D)$ 的调制，次极大处的时间相干度有所下降，而 $\Delta l=2kL$ 附近的时间相干性有明显的提高(比较图 2(b)与图 3(b)知)；(iii)考虑到多纵模的非对称分布($\Delta\nu\neq0$)，当 N 为偶数时，在 $\Delta l=(2k+1)L$ 处的时间相干度恒不为零，同时不论 N 为奇数或偶数时，其极小值均不为零，且 $\Delta l=2kL$ 附近的时间相干性进一步好转(由图 1(b)和图 2(b)知)。上述(ii)、(iii)两点即为本文在文献[4]的基础上所作的两点改进，且为本实验的结果所证实。

为方便计，图 5(a)以双纵模激光为例，比较了纵模非对称分布与对称分布两种状态下的时间相干性；图 5(b)以三纵模激光为例，表示了对称分布状态下纵模幅度对时间相干性的影响(设 $\delta\nu_d=5\times10^7$ Hz)；图 5(c)显示了激光线宽 $\Delta\nu_D$ 对时间相干性的影响($N=3$)。图中实线对应于 $\Delta\nu_D=3\Delta\nu_q=1.5\times10^9$ Hz，虚线为 $\Delta\nu_D=2\Delta\nu_q=1.0\times10^9$ Hz 的情形。

从图 5(a)和图 5(b)不难看出，当纵模数 N 相同时，多纵模非对称分布状态下的时间相干性(曲线 $|\nu_2(\Delta l)|$)优于对称分布状态下的时间相干性(曲线 $|\nu_2^{(1)}(\Delta l)|$，而对称分布状态下(见图 5(b))，纵模幅度按高斯分布的多纵模激光的时间相干性(曲线 $|\nu_3^{(1)}(\Delta l)|$)又好于等幅多纵模激光的时间相干性(曲线 $|\nu_3^{(2)}(\Delta l)|$)。若用相干长度 ΔL_H 来表征其时间相干性，则有关系

$$\Delta L_H(N)\geqslant\Delta L_H^{(1)}(N)\geqslant\Delta L_H^{(2)}(N),\tag{15}$$

式中 $\Delta L_H(N)$，$\Delta L_H^{(1)}(N)$ 和 $\Delta L_H^{(2)}(N)$ 分别表示纵模数为 N 时，(i) $\Delta\nu\neq0$，(ii) $\Delta\nu=0$，(iii) $\Delta\nu=0$，$\Delta\nu_D\to\infty$ 情形下，多纵模激光束的相干长度。

四、实验结果

作者利用泰曼-格林(Twyman-Green)干涉仪，分别测量了腔长为 $L=19$ cm，35 cm，115cm 和 150 cm He-Ne 激光器($\lambda=6328$ nm)的时间相干度。实验装置和结果分别示于图6和图8(图6中动镜 M_2 置于1.5 m 光具座上，整个光学系统固定在全息台上)。图7为干涉仪输出针孔 S 处二束光强度之比 R 与光程差 Δl 的关系的实验曲线，用于时间相干度的计算

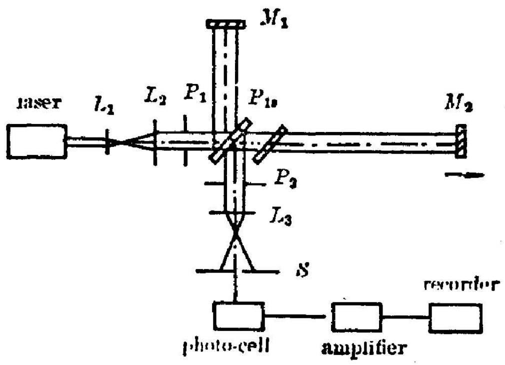


Fig. 6 Layout of the experiment (Twyman-Green)

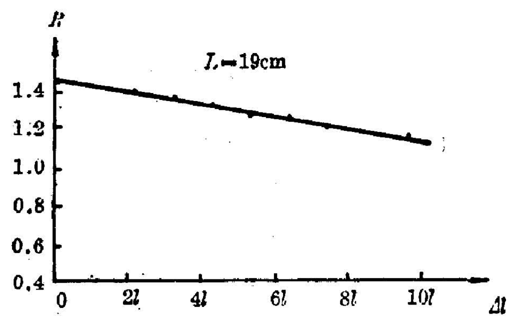
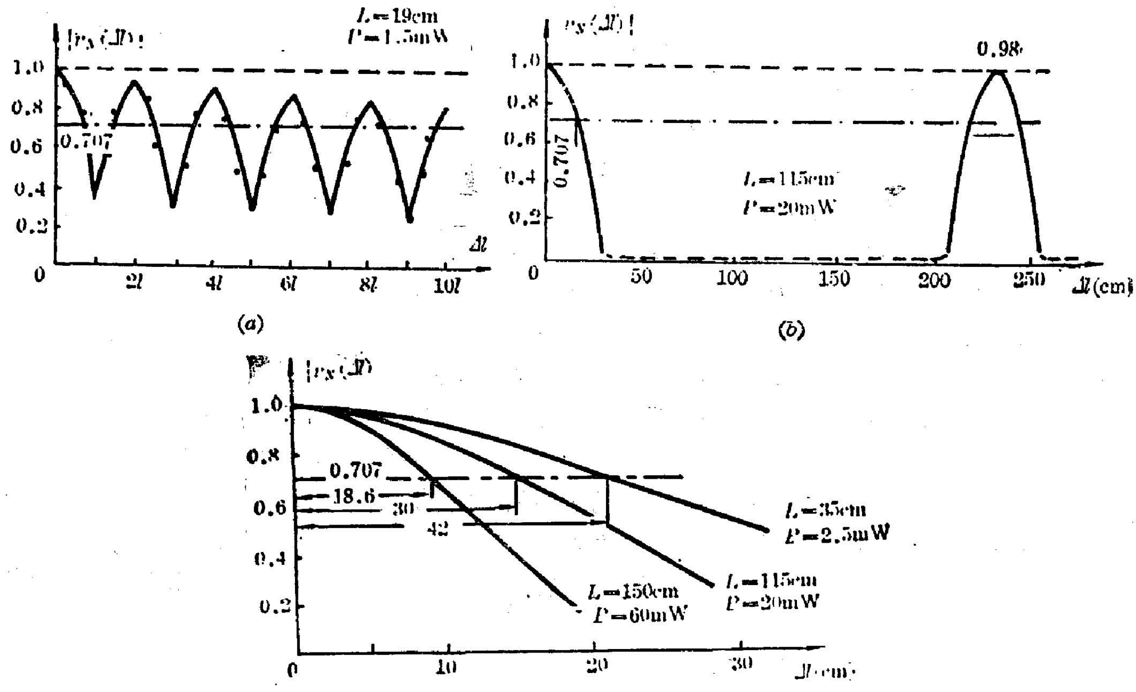


Fig. 7 The relation between the intensity ratio and optical path difference



(c)

Fig. 8 Experimental results on the temporal coherence of He-Ne laser

$$|\nu_N(\Delta l)| = \frac{1+R}{2\sqrt{R}\cos\theta} V(\Delta l), \tag{16}$$

式中 $V(\Delta l)$ 为某一光程差 Δl 处，干涉条纹的对比度，由实验测定。θ 为二束光偏振方位的夹角。

上述实验结果表明，对于实际的多纵模气体激光器，同时考虑激光线宽 $\Delta\nu_D$，纵模频宽 $\delta\nu_d$ 和纵模分布状态 $\Delta\nu$ 以及多纵模幅度对时间相干性的影响是完全合理和必要的。

五、结　论

由上述理论分析与实验结果，我们可得到如下几点结论：

(1) 多纵模气体激光的时间相干性具有准周期性，且周期为腔长的两倍。

(2) 当考虑激光纵模的频宽 $\delta\nu_d$ 时，时间相干度将按指数规律下降，从而在 $\Delta l = 2kL$ 附近的相干长度将随着 k 值的增大而单调减小。

(3) 当腔长 L 一定时，激光时间相干性与纵模数 N 有关，当纵模数相同时，激光的时间相干性还与腔长有关；且腔越长，纵模数越小，时间相干性越好。

(4) 当腔长 L，纵模数 N 及纵模频宽 $\delta\nu_d$ 一定时，时间相干性随光程差 Δl 变化的规律还与多纵模的分布状态 $\Delta\nu$ 和激光线宽 $\Delta\nu_D$ 有关；从而在 $\Delta l = 2kL$ 附近的相干长度也与 $\Delta\nu$ 和 $\Delta\nu_D$ 有关。

(5) 多纵模气体激光时间相干性的周期性，不仅在大景深或大场景全息照相中有关重要的应用[4,6]，而且(作者认为)也可用于激光参数(如 N、$\Delta\nu_D$ 及 $\delta\nu_D$ 等)的测量，以及纵模频率漂移效应的理论分析与实验观测。

本工作的实验部分曾得到王策同志的支持，特此感谢。

参 考 文 献

[1] T. Morokuma, K. F. Nefflen *et al.*, *J. O. S. A.*, 1963, **53**, No. 3 (Mar), 394～395.
[2] H. M. Smith; «全息原理», (科学出版社，北京 1972), 140。
[3] 于美文编著; «光学全息及信息处理», (国防工业出版社，北京，1984), 110～112。
[4] 葛万福，熊秉衡; «光学学报», 1985, **5**, No. 7 (Jul), 600～604。
[5] D. R. Herriott; *J. O. S. A.*, 1962, **52**, No. 1 (Jan), 31～37.
[6] 幸良梁，印建平; «光学学报», 1986, **6**, No. 5 (May), 433～439。

Analysis and study on the temporal coherence of gas laser with multi-longitudinal modes

YIN JIANPING, ZHANG BINGQUAN, LU JUNFA AND XIA JIANJANG
(*Laser Research Institute, Suzhou University*)

(Received 20 March 1986; revised 18 August 1986)

Abstract

According to the Wiener-Khintchine law, we have derived a general formula on the temporal coherence of gas laser with multi-longitudinal modes, and given results on the temporal coherence of gas laser under the state of symmetric and nonsymmetric distribution, When (1) $\Delta\nu=0$, $\Delta\nu_D\to\infty$; (2) $\Delta\nu=0$, $\Delta\nu_D\to\infty$ and $\delta\nu_d=0$. It is consistent with the results of reference [4] and [2~3] respectively. Finally, from the theory and experiment, this paper analyses and studies temporal coherence of the above-mentioned four cases.

Key Words: multi-longtudinal modes gas laser; temporal coherence.