第7卷 第4期 光学学报 Vol. 7, No. 4
1987年4月 ACTA OPTICA SINICA April, 1987

双模双光子激光的半经典理论

孙松庚
（南京通信工程学院）

提要

在本文中，拉姆(Lamb)的半经典激光理论被用来讨论双模双光子激光运转，将文献[7]的单模结果推广到两模频率相差甚大的双模双光子激光情况。

关键词：双模双光子激光；频率牵引效应。

近年来，人们对单模双光子激光从实验上和理论上已研究得很多，获得了许多有益的结果[1~4]。D'Souza 讨论了双模双光子的光学瞬态效应[5]。Wolf 等人[6]用拉姆的半经典理论讨论近单光子共振的三能级双模双光子激光问题。本文考虑双模双光子激光的多能态模型，采用文献[7]的消去中间态方法，将多能态问题化为二能态问题，然后用拉姆的半经典理论对任意场强下的双模双光子激光问题进行探讨。

一、密度矩阵运动方程的解

设光场和极化强度分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(z,\ t)&=\boldsymbol{i}\{E_1(z,\ t)\cos[\nu_1t-k_1z+\phi_1(t)]+E_2(z,\ t)\cos[\nu_2t-k_2z+\phi_2(t)]\},\\ P(z,\ t)&=P_{1c}\cos[\nu_1t-k_1z+\phi_1(t)]+P_{2c}\cos[(\nu_2t-k_2z+\phi_2(t)]\\ &\quad+P_{1s}\sin[\nu_1t-k_1z+\phi_1(t)]+P_{2s}\sin[\nu_2t-k_2z+\phi_2(t)]。\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

原子能态分别记为$|a\rangle$、$|b\rangle$和$|j\rangle$（$|j\rangle$为中间态）。在双模情况下，依据拉姆理论，可得如下振幅方程和频率方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_i(t)+\frac{\nu_i}{2Q_i}E_i(t)&=-\frac{\nu_i}{2\varepsilon_0}P_{is}(t),\\ \nu_i+\dot{\phi}_i&=\Omega_i-\frac{\nu_i}{2\varepsilon_0}E_i^{-1}(t)P_{ic}(t),\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式中$\nu_i+\dot{\phi}_i$为模i的频率($i=1,\ 2$)，Ω_i为无源腔模频率，Q_i为光腔的品质因子。将$E_i(z,\ t)$和$P_i(z,\ t)$代入(2)式可确定光场的振幅和频率。

设两模频率ν_1和ν_2相当不同，在 R. W. A 下可略去迅速振荡的如$\exp[i(\omega_{jb}\pm\nu_1)t]$、$\exp[i(\omega_{ja}\pm\nu_2)t]$、$\exp[i(\omega_{ja}+\nu_1)t]$和$\exp[i(\omega_{bj}+\nu_2)t]$等项[5]，求得矩阵元的运动方程为

收稿日期：1986年6月20日；收到修改稿日期：1986年9月1日

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\rho}_{aa}&=-\gamma_a\rho_{aa}-\frac{i}{4\hbar}k_{ab}E_1(t)E_2(t)[\rho_{ab}\exp(-i\alpha)-\rho_{ba}\exp(i\alpha)],\\
\dot{\rho}_{bb}&=-\gamma_b\rho_{bb}+\frac{i}{4\hbar}k_{ab}E_1(t)E_2(t)[\rho_{ab}\exp(-i\alpha)-\rho_{ba}\exp(i\alpha)],\\
\dot{\rho}_{ab}&=-[i\omega(t)+\gamma]\rho_{ab}-\frac{i}{4\hbar}k_{ab}E_1(t)E_2(t)(\rho_{aa}-\rho_{bb})\exp(i\alpha),\\
\alpha&=(\nu_1+\nu_2-\omega_{ba})t-(k_1+k_2)z+\phi_1(t)+\phi_2(t),\\
\omega(t)&=\frac{k_{bb}E_2^2(t)-k_{aa}E_1^2(t)}{4\hbar},\quad \gamma=\frac{\gamma_a+\gamma_b}{2}+\gamma_1,\\
k_{aa}&=\frac{2}{\hbar}\sum_j|\mu_{aj}|^2\frac{\omega_{ja}}{\omega_{ja}^2-\nu_1^2},\quad k_{bb}=\frac{2}{\hbar}\sum_j|\mu_{bj}|^2\frac{\omega_{jb}}{\omega_{jb}^2-\nu_2^2},\\
k_{ab}&=\frac{1}{\hbar}\sum_j\frac{\mu_{aj}\mu_{jb}}{\omega_{jb}+\nu_2}=\frac{1}{\hbar}\sum_j\frac{\mu_{aj}\mu_{jb}}{\omega_{ja}-\nu_1}。
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

式中 γ_1 是由于失相碰撞所引起的非对角元 ρ_{ab} 的衰变率。用类似于文献 [7] 的步骤可得

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{ab}&=-\frac{ik_{ab}}{4\hbar}(\tilde{\rho}_{aa}-\tilde{\rho}_{bb})\exp(i\alpha)/[\gamma-i(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba})],\\
\rho_{ba}&=\frac{ik_{ab}}{4\hbar}(\tilde{\rho}_{aa}-\tilde{\rho}_{bb})\exp(-i\alpha)/[\gamma+i(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba})],
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\tilde{\rho}}_{aa}&=\lambda_a-\gamma_a\tilde{\rho}_{aa}-R(\tilde{\rho}_{aa}-\tilde{\rho}_{bb}),\\
\dot{\tilde{\rho}}_{bb}&=\lambda_b-\gamma_b\tilde{\rho}_{bb}+R(\tilde{\rho}_{aa}-\tilde{\rho}_{bb}),
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\omega}_{ba}=\omega_{ba}+\omega(t),\ R=\{[(k_{ab}E_1(t)E_2(t)]^2/8\gamma\}\cdot L(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba}),\\
&L(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba})=\frac{\gamma^2}{(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba})^2+\gamma^2}。
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

这里因 γ_1 和 γ_2 相差甚大，我们略去了迅速振荡的一些项，如若不然，必须用拉姆的微扰理论考虑所有的模间耦合。考虑到光场的驰豫时间远大于原子的驰豫时间，原子极化可瞬时地随光场的变化而变化，采用绝热近似令 $\dot{\tilde{\rho}}_{aa}=\dot{\tilde{\rho}}_{bb}=0$，由(5)式可得

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\rho}_{aa}=\frac{M_a(z)}{1+(R/R_s)},\quad \tilde{\rho}_{bb}=\frac{M_b(z)}{1+(R/R_s)},\quad \rho_{aa}-\rho_{bb}=\frac{N(z)}{1+(R/R_s)},\\
&M_a(z)=\frac{R(\lambda_a+\lambda_b)}{\gamma_a\gamma_b}+\frac{\lambda_a}{\gamma_a},\quad M_b(z)=\frac{R(\lambda_a+\lambda_b)}{\gamma_a\gamma_b}-\frac{\lambda_a}{\gamma_b},\\
&N(z)=\frac{\lambda_a}{\gamma_a}-\frac{\lambda_b}{\gamma_b},\quad R_s=\frac{\gamma_a\gamma_b}{\gamma_a+\gamma_b},
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

这里 R_s、$N(z)$、$M_a(z)$、$M_b(z)$ 是 z 和 t 的慢变函数，R 是 t 的慢变函数。形式上与文献[7]的结果相同，但这里式中的 R 包含了两模之间的耦合。

二、激活介质的极化强度

单个原子的平均偶极矩为 $\langle P\rangle=\langle\psi(t)|P|\psi(t)\rangle$，将偶极矩和原子态矢量代入，可得

$$
\begin{aligned}
\langle P\rangle = &\{k_{aa}\rho_{aa}E_1(t)+(k_{ab}/2)[\rho_{ab}\exp(-i\alpha)+\rho_{ba}\exp(i\alpha)]E_2(t)\}\cos[\nu_1 t-k_1 z+\phi_1(t)]\\
&-i(k_{ab}/2)[\rho_{ab}\exp(-i\alpha)-\rho_{ba}\exp(i\alpha)]E_2(t)\sin[\nu_1 t-k_1 z+\phi_1(t)]\\
&+\{k_{bb}\rho_{bb}E_2(t)+(k_{ab}/2)[\rho_{ab}\exp(-i\alpha)+\rho_{ba}\exp(i\alpha)]E_1(t)\}\cos[\nu_2 t-k_2 z+\phi_2(t)]\\
&-i(k_{ab}/2)[\rho_{ab}\exp(-i\alpha)-\rho_{ba}\exp(i\alpha)]E_1(t)\sin[\nu_2 t-k_2 z+\phi_2(t)]。
\end{aligned}\tag{8}
$$

激活介质的宏观极化强度 $P(z, t)$ 为

$$
\begin{aligned}
P(z, t) = &\sum_{\eta}\int_{-\infty}^{t}\lambda_\eta(z, t_0)\langle P\rangle dt\\
= &\{k_{aa}\tilde{\rho}_{aa}E_1(t)+(k_{ab}/2)[\tilde{\rho}_{ab}\exp(-i\alpha)+\tilde{\rho}_{ba}\exp(i\alpha)]E_2(t)\}\\
&\times\cos[\nu_1 t-k_1 z+\phi_1(t)]-i(k_{ab}/2)[\tilde{\rho}_{ab}\exp(-i\alpha)-\tilde{\rho}_{ba}\exp(i\alpha)]E_2(t)\\
&\times\sin[\nu_1 t-k_1 z+\phi_1(t)]+\{k_{bb}\tilde{\rho}_{bb}E_2(t)+(k_{ab}/2)[\tilde{\rho}_{ab}\exp(-i\alpha)\\
&+\tilde{\rho}_{ba}\exp(i\alpha)]E_2(t)\}\cos[\nu_2 t-k_2 z+\phi_2(t)]-i(k_{ab}/2)\\
&\times[\tilde{\rho}_{ab}\exp(-i\alpha)-\tilde{\rho}_{ba}\exp(i\alpha)]E_1(t)\sin[\nu_2 t-k_2 z+\phi_2(t)]。
\end{aligned}\tag{9}
$$

将(9)式中所含 z 的慢变量 $N(z)$、$M_a(z)$、$M_b(z)$ 取平均值可求得分别对应于模 1 和模 2 的感生极化强度的两个分量。

$$
\left.
\begin{aligned}
P_{1s} &= -k_{ab}E_1(t)E_2^2(t)\mathscr{L}(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba})\overline{N}/4\hbar\gamma[1+(R/R_s)],\\
P_{2s} &= -k_{ab}^2E_1^2(t)E_2(t)\mathscr{L}(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba})\overline{N}/4\hbar\gamma[1+(R/R_s)],\\
P_{1c} &= k_{aa}\overline{M}_a+\{k_{ab}^2E_1(t)E_2^2(t)(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba})\mathscr{L}(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba})\overline{N}/4\hbar\gamma[1+(R/R_s)]\},\\
P_{2c} &= k_{bb}\overline{M}_b+\{k_{ab}^2E_1^2(t)E_2(t)(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba})\mathscr{L}(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba})\overline{N}/4\hbar\gamma[1+(R/R_s)]\},
\end{aligned}
\right\}\tag{10}
$$

式中 $\overline{N}$、$\overline{M}_a$、$\overline{M}_b$ 是慢变量 $N(z)$、$M_a(z)$、$M_b(z)$ 对 z 的平均值。(10)式可以看到，尽管两模的频率相差很大，但在由模 1、2 引起的宏观极化强度的两个分量中都出现了与另一模的强度有关的项。这与另一模的强度有关的项是模间耦合对激活介质极化的影响。

三、增益、频率牵引和稳定性讨论

将(10)式中的 P_{1s}、P_{2s} 代入(1)式，经整理可得

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{dE_1^2(t)}{E_1^2(t)dt} &= -\frac{\nu_1}{Q_1}+\frac{\nu_1 k_{ab}^2}{4\varepsilon_0\hbar\gamma}L\overline{N}E_2^2(t)\left[1+\frac{Lk_{ab}^2E_1^2(t)E_2^2(t)}{8\gamma R_s}\right]^{-1},\\
\frac{dE_2^2(t)}{E_2^2(t)dt} &= -\frac{\nu_2}{Q_2}+\frac{\nu_2 k_{ab}^2}{4\varepsilon_0\hbar\gamma}L\overline{N}E_1^2(t)\left[1+\frac{Lk_{ab}^2E_1^2(t)E_2^2(t)}{8\gamma R_s}\right]^{-1},
\end{aligned}
\right\}\tag{11}
$$

式中 $L=L(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba})$，(11)式中模 1、2 的增益表达式显然对称，模间耦合对模增益的影响由(11)式右方第二项表示。和文献[6]的级联模型不同的是因考虑的是纯双光子过程，故 (dE_i^2/E_i^2) 中没有与模自身强度成正比的项。

将(10)式中的 P_{1c} 和 P_{2c} 代入方程(2)可得

$$
\left.
\begin{aligned}
&\nu_1+\dot{\phi}_1=\Omega_1-\nu_1\{M_1+[(k_{ab}^2/8\hbar\gamma)E_2^2(t)(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba})L]/[1+(R/R_s)]\},\\
&\nu_1+\dot{\phi}_2=\Omega_2-\gamma_2\{M_2+[(k_{ab}^2/8\hbar\gamma)E_1^2(t)(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba})L]/1+(R/R_s)]\},\\
&M_1=k_{aa}\overline{M}_a/E_1(t),\qquad M_2=k_{bb}\overline{M}_b/E_2(t)。
\end{aligned}
\right\}\tag{12}
$$

(12)式称为模频率牵引效应。有意义的是从(12)式可知当模 1 或模 2 的强度增加时，另一模的频率牵引减小，说明双模双光子激光模式之间的耦合对频率牵引效应的调节和制约。

为讨论双模双光子激光的定态运转，引入无量纲的场强 $I_i=k_{ab}^2E_i^2(t)/\varepsilon_0\hbar R_s$。(11)式

成为

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_1+(\nu_1/Q_1)I_1=\nu_1 A I_1 I_2(1+BI_1I_2)^{-1},\\ \dot{I}_2+(\nu_2/Q_2)I_2=\nu_2 A I_1 I_2(1+BI_1I_2)^{-1},\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$A=R_s\bar{N}L(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba})/4\gamma,\ B=R_sL(\nu_1+\nu_2-\tilde{\omega}_{ba})(\varepsilon_0/k_{ab})^2/8\gamma。 \tag{14}$$

定态时，$\dot{I}_1=\dot{I}_2=0$，方程(13)式变为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\nu_1}{Q_1}I_1=\nu_1 A I_1 I_2(1+BI_1I_2)^{-1},\\ \frac{\nu_2}{Q_2}I_2=\nu_2 A I_1 I_2(1+BI_1I_2)^{-1}。\end{aligned}\right] \tag{15}$$

其解取决于判别式 $\Delta=A^2Q_1Q_2-B$。在 $\Delta=0$、$\Delta>0$ 和 $\Delta<0$ 三种情况下(即 $g=(A^2Q_1Q_2/B)$，$g=1$，$g>1$ 和 $g<1$)分别有解

$$I_1=\sqrt{(Q_1/Q_2B)}、I_2=\sqrt{(Q_2/Q_1B)};$$

$$I_1=\sqrt{(Q_1/Q_2B)}(\sqrt{g}\pm\sqrt{g-1})、I_2=\sqrt{(Q_2/Q_1B)}(\sqrt{g}\pm\sqrt{g-1})$$

及无物理意义的复数解。故 $I_{1,2}=0$;

$$I_1=\sqrt{(Q_1/Q_2B)}、I_2=\sqrt{(Q_2/Q_1B)};$$

$$I_1=\sqrt{(Q_1/Q_2B)}(\sqrt{g}+\sqrt{g-1})、I_2=\sqrt{(Q_2/Q_1B)}(\sqrt{g}+\sqrt{g-1})$$

及 $$I_1=\sqrt{(Q_1/Q_2B)}(\sqrt{g}-\sqrt{g-1})、I_2=\sqrt{(Q_2/Q_1B)}(\sqrt{g}-\sqrt{g-1})$$

是两模场强可能的定态解，下面将分别讨论这些解的稳定性。

为要讨论这些定态解的稳定性，由文献[4]、[5]将(13)式作微扰展开

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_1+\frac{\nu_1}{Q_1}I_1=\nu_1 A I_1 I_2(1-BI_1I_2),\\ \dot{I}_2+\frac{\nu_2}{Q_2}I_2=\nu_2 A I_1 I_2(1-BI_1I_2)。\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

且令 $I_1=I_{1s}+\varepsilon_1$，$I_2=I_{2s}+\varepsilon_2$，其中 I_1^s 和 I_2^s 表示两模场强可能的定态解，ε_1、ε_2 是对 I_{1s}、I_{2s} 的偏离，将其代入(16)式经过化简，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix},\\ &M=\begin{pmatrix}-I_1^s(I_2^s)^2\theta_{12} & I_1^s-2\theta_{12}(I_1^s)^2I_2^s\\ I_2^s-2\theta_{21}I_1^s(I_2^s)^2 & -I_2^s\theta_{21}(I_1^s)^2\end{pmatrix},\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

M 为稳定性矩阵，$\theta_{12}=\nu_1AB$，$\theta_{21}=\nu_2AB$，若 $t\to\infty$ 时，$\varepsilon\to0$，则解 $I_i^s(i=1,2)$ 是稳定的，否则是不稳定的。显见 $I_1^s=I_2^s=0$ 时，有 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$，则 $I_1^s=I_2^s=0$ 是稳定解。至于 I_1^s 和 I_2^s 不为零时解的稳定性，由稳定性矩阵 M 的本征值 $\lambda_{1,2}$ 的正负决定，若 λ_1 和 λ_2 均为负，则解是稳定的。

设 M 的本征值为 λ，有

$$M\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}。 \tag{18}$$

由(18)式得本征值 λ 的方程为

$$\lambda^2+I_1^sI_2^s(\theta_{12}I_2^s+\theta_{21}I_1^s)\lambda-I_1^sI_2^s\beta_1\beta_2+2(\theta_{12}\beta_2+\theta_{21}\beta_1)(I_1^sI_2^s)^2-3\theta_{12}\theta_{21}(I_1^sI_2^s)^3=0。 \tag{19}$$

式中 $\beta_1=\nu_1A$，$\beta_2=\nu_2A$。方程(19)的解为

$$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}I_1^sI_2^s(\theta_{12}I_2^s+\theta_{21}I_1^s)\pm\{[I_1^sI_2^s(\theta_{12}I_2^s+\theta_{21}I_1^s)]^2$$
$$-4I_1^sI_2^s[2I_1^sI_2^s(\theta_{12}\beta_2+\theta_{21}\beta_1)-3\theta_{12}\theta_{21}(I_1^sI_2^s)^2-\beta_1\beta_2]\}^{1/2}, \tag{20}$$

$\lambda_{1,2}$ 为负实数的条件是

$$4I_1^sI_2^sB-3(I_1^sI_2^sB)^2-1>0,$$
$$[I_1^sI_2^s(\theta_{12}I_2^s+\theta_{21}I_1^s)]^2-4I_1^sI_2^s[2I_1^sI_2^s(\theta_{12}\beta_2+\theta_{21}\beta_1)-3\theta_{12}\theta_{21}(I_1^sI_2^s)^2-\beta_1\beta_2]>0。 \tag{21}$$

当 $g>1$ 时，以

$$(I_1^s)_1=\sqrt{(Q_1/Q_2B)}\,(\sqrt{g}+\sqrt{g-1})\text{ 和 }(I_2^s)_1=\sqrt{(Q_2/Q_1B)}\,(\sqrt{g}+\sqrt{g-1})$$

代入，(21)式不成立；以

$$(I_1^s)_2=\sqrt{(Q_1/Q_2B)}\,(\sqrt{g}-\sqrt{g-1})\text{ 和 }(I_2^s)_2=\sqrt{(Q_2/Q_1B)}\,(\sqrt{g}-\sqrt{g-1})$$

代入，(21)式成立的条件是 $1<g<(4/3)$。所以 $1<g<(4/3)$ 时，

$$(I_1^s)_2=\sqrt{(Q_1/Q_2B)}\,(\sqrt{g}-\sqrt{g-1})\text{ 和 }(I_2^s)_2=\sqrt{(Q_2/Q_1B)}\,(\sqrt{g}-\sqrt{g-1})$$

是稳定的解；而解

$$(I_1^s)_1=\sqrt{(Q_1/Q_2B)}\,(\sqrt{g}+\sqrt{g-1})\text{ 和 }(I_2^s)_1=\sqrt{(Q_2/Q_1B)}\,(\sqrt{g}+\sqrt{g-1})$$

是不稳定的解。至于 $g=1$，以

$$I_1^s=\sqrt{(Q_1/Q_2B)}\text{ 和 }I_2^s=\sqrt{(Q_2/Q_1B)}$$

代入(20)式，本征值 $\lambda_{1,2}$ 中有一个为零，只取 ε_1、ε_2 的一次项不能确定解是否稳定。综上所述，$1<g<(4/3)$ 是产生稳定的双模双光子激光振荡的泵浦取值范围。

参 考 文 献

[1] S. Yatsiv *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1965, **15**, No. 15 (Oct), 614.
[2] A. R. Bulsara *et al.*; *Phys. Rev.* (*A*), 1979, **A19**, No. 5 (May), 2046.
[3] K. J. McNeil, D. F. Walls; *J. Phys.* (*A*), 1975, **8**, No. 1 (Jan), 104.
[4] Z. C. Wang, H. Haken; *Z. Phys.* (*B*), 1984, **55**, 361.
[5] M. D'Souza; *Phys. Rev.* (*A*), 1980, **22**, No. 3 (Mar), 1185.
[6] E. Wolf *et al.*, «*Coherence and Quantum Optics*», (Plenum Pr. New York, 1984), 915.
[7] 汪志诚；«光学学报», 1983, **3**, No. 1 (Jan), 36。
[8] M. Sargent III *et al.*; «*Laser Physics*», (Addision-Wesley pub. com. Inc., 1974).

A semiclassical theory of a two-mode two-photon laser

Sun Songen

(*Nanjing Communication Engineering Institute*)

(Received 20 June 1986; revised 1 September 1986)

Abstract

The semiclassical Lamb method applied to the problem of a two-mode two-photon laser is discussed in this paper.

Key Words: two-mode two-photon laser; the effect of the frequency pulling.