

小孔干涉仪滤波孔的研究*

顾天衢

(浙江大学光仪系)

伍树东 余文炎

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

用惠更斯-基尔霍夫公式对小孔干涉仪的滤波孔进行计算及分析后指出: 尽管滤波孔小于爱里斑, 滤波孔的位置对参考波的质量仍有影响。在接收面上参考波位相有较大偏移处, 往往伴有较大的光强变化(变弱)。给出实验结果, 并进行了讨论。

关键词: 干涉仪、衍射。

小孔干涉仪(PDI)具有简单、稳定的优点, 从而受到许多人的重视而进行了不少研究^[1~3]。一般认为当PDI的滤波孔小于对应无像差入射光Airy斑时, 就可以认为其生成的参考波是完善的, 没有涉及到小孔的位置对参考波质量的影响。本文将从基尔霍夫衍射公式出发, 研究这些问题。

设坐标如图1。(x, y)系被测系统出瞳平面, (x₁, y₁)为滤波小孔所在平面, (-x₂, -y₂)为接收平面, 滤波小孔中心位于(x₁₀, y₁₀)点。一般情况下, 可令出瞳平面坐标和接收平面坐标为1:1。易见, 光波自(x, y)平面传到(x₁, y₁)平面为一次傅里叶变换, 自(x₁, y₁)平面到(x₂, y₂)平面为一次傅里叶反变换。

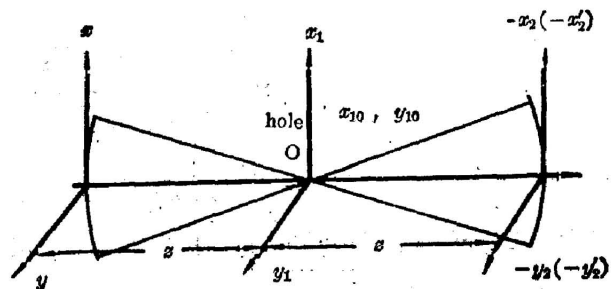


Fig. 1 Coordinates used in this article

若(x, y), (x₁, y₁)和(x₂, y₂)平面上的振幅分别为u(x, y), u₁(x₁, y₁)和u₂(x₂, y₂), 则利用在非涅耳近似下的基尔霍夫衍射公式得

$$U_1(x_1, y_1) = \mathcal{F}\{U(x, y)\}, \quad (1)$$

其中

$$U(x, y) = \exp[jk\phi(x, y)] \cdot \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{l}\right). \quad (2)$$

(1), (2)式中, \mathcal{F} 表示傅里叶变换, 空间频率在 $f_x = \frac{x_1}{\lambda z}$, $f_y = \frac{y_1}{\lambda z}$ 处取值, k为波矢, ϕ 为出

收稿日期: 1986年8月3日; 收到修改稿日期: 1986年6月24日

* 本文的大部分工作是在中国科学院上海光学精密机械研究所完成的。

瞳处波像差, l 为出瞳半径, $\text{circ}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 据此, 更可得 (x_2, y_2) 上的光振幅分布

$$U_2(x_2, y_2) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[U(x, y)] \cdot \text{circ}\left[\frac{\sqrt{(x_1-x_{10})^2+(y_1-y_{10})^2}}{a}\right]\}, \quad (3)$$

其中忽略了一个不重要的常数因子, (下面的推导中, 为简化书写起见亦将略去这种常数因子。) $\text{circ}\left[\frac{\sqrt{(x_1-x_{10})^2+(y_1-y_{10})^2}}{a}\right]$ 代表中心位于 (x_{10}, y_{10}) , 半径为 a 的滤波孔。利用傅里叶变换的性质, 从(3)式有

$$\begin{aligned} U_2(x_2, y_2) &= U(x_2, y_2) \otimes \mathcal{F}^{-1}\left[\text{circ}\frac{\sqrt{(x_1-x_{10})^2+(y_1-y_{10})^2}}{a}\right] \\ &= U(x_2, y_2) \otimes \left[\mathcal{F}^{-1}\left(\text{circ}\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{a}\right)\right] \cdot \exp\left[j\frac{k}{z}(x_{10}x_2+y_{10}y_2)\right] \\ &= U(x_2, y_2) \otimes \left\{\frac{J_1\left(\frac{ka}{z}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right)}{\frac{ka}{z}\sqrt{x_1^2+y_1^2}} \cdot \exp\left[j\frac{k}{z}(x_{10}x_2+y_{10}y_2)\right]\right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

其中 \otimes 代表卷积。将(2)式代入(4)式, 并引进参变量 $s=x/l, t=y/l$, 及归一化坐标 $x'_2=x_2/l, y'_2=y_2/l$, 写成显式, 仍用 U_2 代表 (x'_2, y'_2) 坐标上的光振幅

$$\begin{aligned} U_2(x'_2, y'_2) &= \exp\left[jk\frac{l}{z}(x_{10}x'_2+y_{10}y'_2)\right] \\ &\quad \times \iint_{s^2+t^2 < 1} \exp\left\{jk\left[\phi(s, t) - \frac{l}{z}(x_{10}s+y_{10}t)\right]\right\} \\ &\quad \times \frac{J_1\left[\frac{kab}{z}\sqrt{(x'_2-s)^2+(y'_2-t)^2}\right]}{\frac{kab}{z}\sqrt{(x'_2-s)^2+(y'_2-t)^2}} ds dt \\ &= A(x'_2, y'_2) \exp[j\Phi(x'_2, y'_2)] \cdot \exp\left[jk\frac{l}{z}(x_{10}x'_2+y_{10}y'_2)\right], \quad (5) \end{aligned}$$

其中 $A(x'_2, y'_2) \exp[j\Phi(x'_2, y'_2)]$ 即由双重积分化出

$$A(x'_2, y'_2) = \sqrt{S^2+C^2},$$

$$\Phi(x'_2, y'_2) = \text{Aro tg}\left(\frac{S}{C}\right) \pmod{2\pi},$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \iint_{s^2+t^2 < 1} \sin k\left[\phi(s, t) - \frac{l}{z}(x_{10}s+y_{10}t)\right] \cdot \frac{J_1\left[\frac{kab}{z}\sqrt{(x'_2-s)^2+(y'_2-t)^2}\right]}{\frac{kab}{z}\sqrt{(x'_2-s)^2+(y'_2-t)^2}} ds dt, \\ C &= \iint_{s^2+t^2 < 1} \cos k\left[\phi(s, t) - \frac{l}{z}(x_{10}s+y_{10}t)\right] \cdot \frac{J_1\left[\frac{kab}{z}\sqrt{(x'_2-s)^2+(y'_2-t)^2}\right]}{\frac{kab}{z}\sqrt{(x'_2-s)^2+(y'_2-t)^2}} ds dt, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

现在来考察(5)、(6)两个公式的物理意义。(5)式中的 $\exp\left[jk\frac{l}{z}(x_{10}x'_2+y_{10}y'_2)\right]$ 表示以方向余弦 $\left(\frac{lx_{10}}{\lambda z}, \frac{ly_{10}}{\lambda z}\right)$ 传播的标准平面波, 方向余弦的大小决定了接收平面内干涉条纹的多少

和方向; $A(x_2, y_2)\exp[j\Phi(x_2, y_2)]$ 为实际参考波关于理想波面的偏离, 显然, A 和 Φ 在整个 (x_2, y_2) 平面内越接近于常数越好。由(6)式可见, A 和 Φ 是 (x_2, y_2) 的函数, 即它们在接收平面上必定是有变化的, 其大小依赖于被测光像差 ϕ , 小孔半径 a , 被测光相对孔径 $\frac{2l}{z}$, 特别值得注意的是与小孔位置 (x_{10}, y_{10}) 有关, 因此, 若别的条件也满足, 则当 (x_{10}, y_{10}) 取值不当时, 有引起大 Φ 的可能。

若按(5), (6)式直接计算, 工作量较大。为进一步研究, 现用一维情形近似, 同样很能说明问题。这时(6)式中的 S, C 应改写成 S_1, C_1

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^1 \sin k \left[\phi(x) - \frac{x_{10}}{z} lx \right] \sin o \left[\frac{a}{\lambda} \frac{2l}{z} (x_2 - x) \right] dx, \\ C_1 &= \int_{-1}^1 \cos k \left[\phi(x) - \frac{x_{10}}{z} lx \right] \sin o \left[\frac{a}{\lambda} \frac{2l}{z} (x_2 - x) \right] dx. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$\sin o(x) = \frac{\sin x}{x}$, a 为一维孔半宽度。若取 ϕ 为球差形式 $\phi(x) = wx^4$, w 为球差系数; $\frac{2l}{z} = \frac{1}{3}$, (对应 Airy 斑半宽度为 3λ) $a = \frac{3}{2}\lambda$, 计算结果如图 2。可见纵使小孔小于 Airy 斑, 小

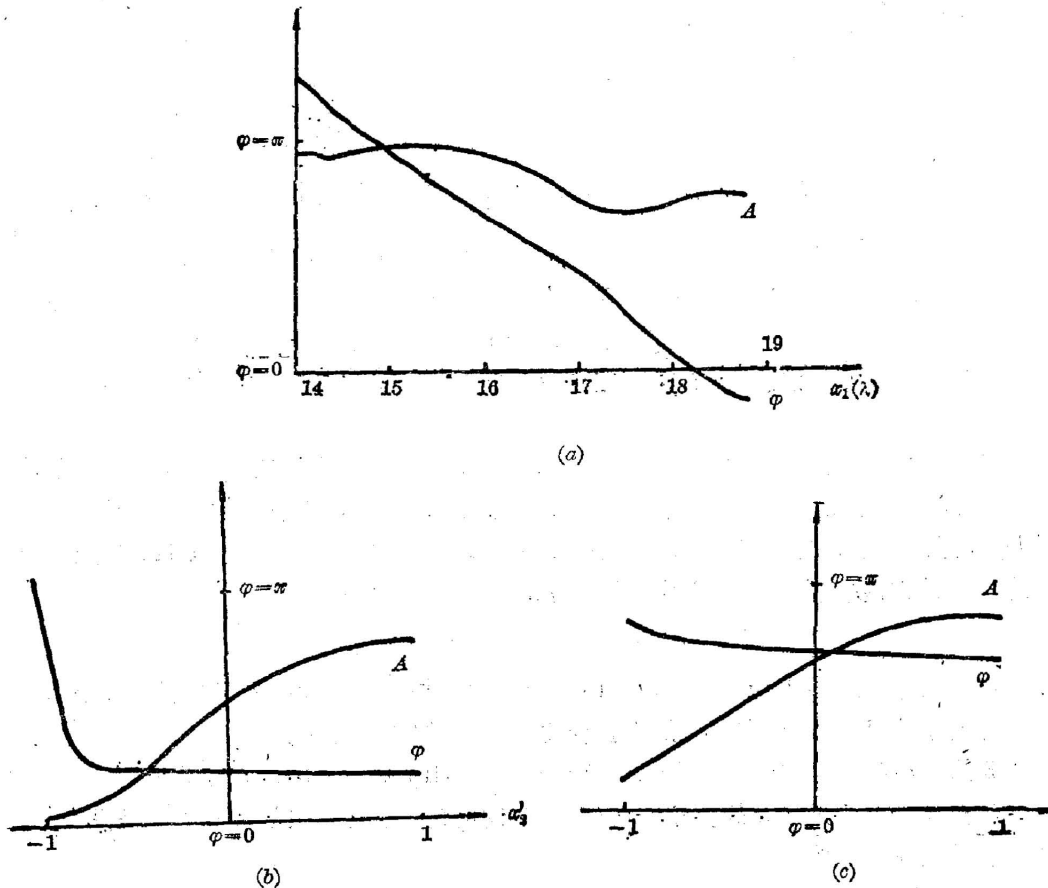


Fig. 2 (a) Phase and amplitude distribution on the (x_1) plane; (b) Phase and amplitude deviation on (x_2) plane when the hole center is 17.4λ ; (c) Phase and amplitude deviation on (x_2) plane when the hole center is 16λ

孔的位置对所产生的参考光质量也有极大影响,当小孔置于某种不恰当位置时,有可能使参考光偏离平面波较远;接收面上有位相大偏离的地方往往伴有光强的大变弱,反之则未必。这和实际情况颇符(见图3)。

(7)式实际上也就是焦面(x_1)上复振幅在有限孔径内的傅里叶变换,因此作如下考察是极有启发的:设焦面上复振幅为

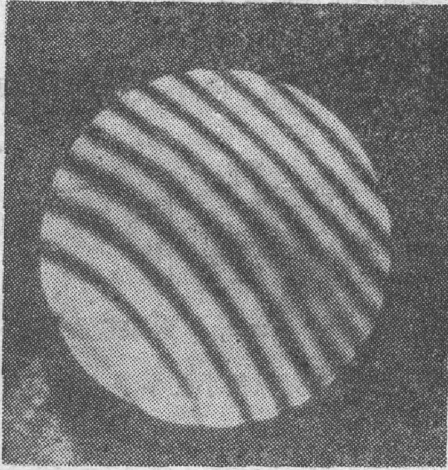


Fig. 3

$$U_1 = F_1 + jF_2, \quad (8)$$

式中 F_1 、 F_2 均为实函数,可在积分域内分别视作奇函数 F_1^o 、 F_2^o 和偶函数 F_1^e 、 F_2^e 之和

$$F_1 = F_1^o + F_1^e; \quad F_2 = F_2^o + F_2^e. \quad (9)$$

则接收面上参考波关于标准平面波的偏离 $A \cdot \exp(j\Phi)$

$$A \cdot \exp(j\Phi) = \int_{-a}^a [(F_1^o + F_1^e) + j(F_2^o + F_2^e)] \exp(j2\pi f_a x) dx,$$

按傅里叶变换性质

$$\int_{-a}^a [F_1^o + jF_2^o] \exp(j2\pi f_a x) dx = R(f_a) \quad \text{为实函数}$$

$$\int_{-a}^a [F_1^e + jF_2^e] \exp(j2\pi f_a x) dx = jI(f_a) \quad \text{为虚函数,其中 } I \text{ 为实函数.}$$

所以当 $I(f_a) \doteq 0$ (或 $R(f_a) \doteq 0$) 时,即当 $F_1^o + jF_2^o \doteq 0$ (或 $F_1^e + jF_2^e \doteq 0$) 时, $R(f_a)$ (或 $I(f_a)$) 每变一次符号,即经过一次零点, Φ 在零点处就会有一次近乎 π 的突变。因参考光强 $A^2 = R^2 + I^2$, 所以在这一点上 $A^2 \doteq 0$ 。这就解释了位相近乎 π 变化时,光强会变弱的现象。从理论上讲,这种性质与 a 大小无关。但 a 越小,在调节小孔位置时出现位相变化的情况也越少。

再回到图2。小孔中心位于 16λ 处和 17.4λ 处时,接收面上位相的偏离状况不一样,按前所述,可作如下解释:孔中心在 17.4λ 时(图2(b))若焦平面处相幅可表为 $A' \cdot \exp[j\alpha f(x)]$, 其中 α 为比例因子,则按图2(a), A' 在小范围内可视作以 17.4λ 处为中心对称的函数(偶函数), $f(x)$ 则可视作线性的 $f(x) = x$, 所以相幅为

$$U_1 \doteq A' \cos \alpha x + jA' \sin \alpha x = F_1^e + jF_2^o,$$

亦即(8), (9)式中的 $F_1^o + jF_2^e = 0$, 故此时当有大的位相变化及大的光强减弱。而图2(c), 由于没有上述情况,所以虽有较大的光强变化,而无大的位相变化。

图3的干涉照片是在滤波孔小于无像差入射光 Airy 斑时摄的,它充分说明了前述现象。条纹分枝处即为近乎 π 的位相突变(明暗条纹反转),这在所用的被测光中是没有的;大位相变化处同时光强较弱。

在公式(6)的二维情形中,若满足 $\frac{ka\lambda}{z}$ 很小,且注意到 $\sqrt{(x_2 - s)^2 + (y_2 - t)^2} \ll 1$, 则其中的

$$\frac{J_1\left[\frac{kab}{z}\sqrt{(x'_2-s)^2+(y'_2-t)^2}\right]}{\frac{kab}{z}\sqrt{(x'_2-s)^2+(y'_2-t)^2}},$$

作为近似可在积分域内视作常数而提出, 这样 Φ 就不是 (x'_2, y'_2) 的函数了, 即在整个接收平面上, Φ 近似为常数。这时

$$\alpha \ll \frac{1}{2\sigma} \lambda \left(\frac{z}{l}\right) \sim 0.16\lambda \left(\frac{z}{l}\right),$$

而 Airy 斑半径 R

$$R = 0.61\lambda \left(\frac{z}{l}\right) \sim 3 \times 0.16\lambda \left(\frac{z}{l}\right),$$

以上考虑表明无论 ϕ , $\frac{2l}{z}$, (x_{10}, y_{10}) 怎样, 当 α 充分小时, 参考波位相总可认为是近似平整的。 α 仅小于 Airy 斑还不是充分小, 而至少要远小于 Airy 斑半径的三分之一。

小 结

基于基尔霍夫衍射公式的计算, 分析和实验均表明, 不仅 PDI 滤波孔的大小对参考波质量有影响, 它所处的位置也有较大的影响。当它虽小于 Airy 斑但仍不够充分小时, 且位于不当位置, 参考波面对标准平面波的偏离有时可以很大。“充分小”的上限似乎应取 Airy 斑半径的三分之一较为合理。当偏离很大而近乎 π 时, 该点参考光强往往变弱。在使用 PDI 时注意这一现象有利于防止大的误差。

最后必须指出的是, 参考波位相近乎 π 突变现象在一般 PDI 调整中出现的概率很小, 但若有心寻找, 则经仔细调整也可重复出现。位相随小孔位置变化而有偏离一般是定然存在的, 问题是: 在所需精度范围内(如 $\frac{1}{10} \lambda \sim \frac{1}{20} \lambda$) 这种偏离是否允许, 这原则上在 ϕ , α , $\frac{2l}{z}$, (x_{10}, y_{10}) 等已定的情况下, 可由(6)式算出, 但较繁复。

参 考 文 献

- [1] R. N. Smartt *et al.*; *J. O. S. A.*, 1972, **62**, No. 5 (May), 737.
- [2] R. N. Smartt; *J. O. S. A.*, 1974, **64**, No. 4 (Apr), 558.
- [3] R. N. Smartt *et al.*; *Jap. J. Appl. Phys. (Suppl)*, 1975, **14**, 14-1, 351~359.

Study on filter hole of the point diffraction interferometer*

GU TIANQU

(Department of Optical Instrument Engineering, Zhejiang University)

WU SHUDONG AND YU WENYAN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 3 March 1986; revised 24 June 1986)

Abstract

Based on the Kirhhoff diffraction theory, we studied the filter hole of the point diffraction interferometer (PDI). Through an lysis of the results, we find that the position of the hole influence greatly the quality of the reference wave produced by it, though its dimension may be smaller than the Airy spot. On the receiving plane with a great phase deviation of the reference wave, there always exists a great weakening in its intensity. An interferogram of a PDI showing the phenomena is presented.

Key Words: Interferometer; Diffraction.

* Most of the work in this article is carried out at "Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica".