

光学一般变换的傅里叶变换实验方法

郑师海 董碧珍 王玉堂 陈岩松
(中国科学院物理研究所)

提 要

本文利用傅里叶光学系统简化了光学一般变换全息透镜的设计,以一维八序 Walsh-Hadamard 变换为例,用计算机设计和产生了变换所需的透镜,并进行引了光学实验,得到了预定变换结果。

关键词: 光学一般变换; 计算机产生全息图。

一、引 言

传统的傅里叶光学系统,只能实现空间平移不变的运算,对于更一般的空间平移可变问题,脉冲响应函数是空间平移可变的,即对于一成像系统的每一个像元,脉冲响应函数是不同的,因而无法直接使用傅里叶变换解决空间可变的问题。

在研究解决空间可变的问题中,手段之一是采用多重全息技术^[1,2],但由于技术上的原因,能够实现变换的抽样点数有限。利用全息透镜实现光学普遍变换的理论^[3-5],提出了一种新的实现光学空间平移变的运算方法。但是全息透镜原则上是一张菲涅耳全息图,用计算机计算和全息图制造比较麻烦。

本文在文献[5]方法的基础上,利用傅里叶透镜进行全息透镜的设计,并从 Whittaker-Shannon 抽样定理出发,导出了实现一般变换所需全息透镜的计算方法,这一方法的全息透镜相当于一张傅里叶变换全息图,因此全息图的计算大大简化,容易用计算机产生全息图制造。本文第三,第四部分以一维八序 Walsh-Hadamard 变换为例,进行了全息图的设计和光学变换实验,得到了预定的变换结果。同时此方法对于二维情况也是适用的。最后对信噪比问题,进行了适当的讨论。

二、全息透镜的计算方程

图1是实现光学普遍变换的光路系统示意图, L_1, L_2 为傅里叶变换透镜, P_1, P_2 为输入输出平面, P_3 为全息滤波平面。根据文献[3],这个光路实现的变换可以表示为:

$$\bar{G} = G_0(f_2) H G_0(f_1), \quad (1)$$

式中 H 为插在 P_3 平面的全息透镜, $G_0(f)$ 为傅里叶变换因子,在离散抽样情况下,它的表示式为:

$$\left. \begin{aligned} G_0(f_2) &= \exp[2\pi i x_m x_m l I / \lambda f_2 N N_2], \\ G_0(f_1) &= \exp[-2\pi i x_m x_m l J / \lambda f_1 N N_1], \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

收稿日期: 1986年3月18日; 收到修改稿日期: 1986年6月20日

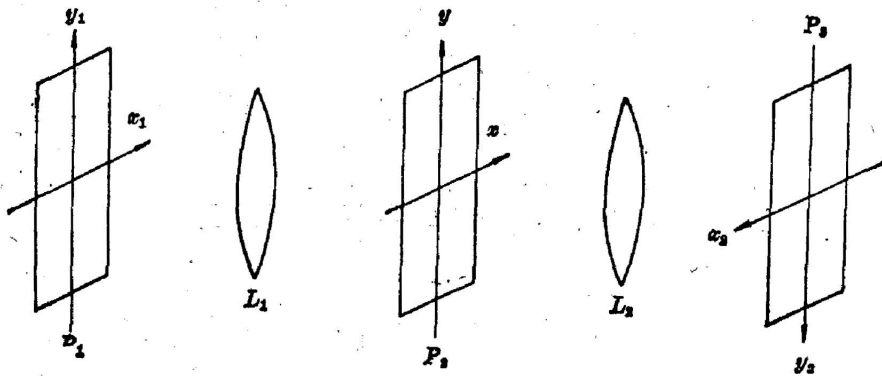


Fig. 1 The diagram of optical general transform system

式中 $\left(I = -\frac{N_2}{2} + 1, -\frac{N_2}{2} + 2, \dots, \frac{N_2}{2}; J = -\frac{N_1}{2} + 1, -\frac{N_1}{2} + 2, \dots, \frac{N_1}{2}; \right.$
 $\left. l = -\frac{N}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 2, \dots, \frac{N}{2} \right)$ 。

w_{m_1}, w_m, w_{m_2} 分别为输入平面、全息平面和输出平面孔径大小, N_1, N 和 N_2 为相应的抽样点数, f_1, f_2 为透镜 L_1, L_2 的焦距。图 1 光路中全息图满足的方程为

$$\sum_{l=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} A_{kl} B_{lk} H_l = C_{kk}, \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{kl} &= G_0^+(f_2)_{kl} \cdot G_0(f_2)_{ll}, \\ B_{kl} &= G_0^+(f_1)_{kl} \cdot G_0(f_1)_{ll}, \\ C_{kk} &= G_0^+(f_2)_{kl} \cdot G_{IJ} \cdot G_0^+(f_1)_{ll}, \end{aligned} \quad (4)$$

G_{IJ} 是所要实现的变换矩阵, 符号“+”表示矩阵的转置复共轭。下面我们从抽样角度来讨论一下 N_1, N, N_2 和 w_{m_1}, w_m, w_{m_2} 的关系。

由于脉冲响应函数是输入输出变量的函数, 设输入平面抽样数为 N_1 , 输出平面为 N_2 。(3)式中全息透镜包含 N 个未知数 $H_l (l=1, \dots, N)$, 共有 $N_1 \times N_2$ 个线性方程, 如果 $N_1 \times N_2 = N$, 则此线性方程组有唯一解, 因此全息图的抽样点数 N 必须满足关系:

$$N = N_1 \cdot N_2. \quad (5)$$

根据 Whittaker-Shannon 抽样定理^[3], 输入平面抽样间隔 $\Delta x_1 = w_{m_1}/N_1$ 应满足关系

$$\Delta x_1 \leq \frac{\lambda f_1}{w_m}. \quad (6)$$

同样全息图的抽样间隔 $\Delta x_m = w_m/N$ 也应满足关系

$$\Delta x_m \leq \frac{\lambda f}{w_{m_1}}. \quad (7)$$

(6)式(7)式取等号得到,

$$\left. \begin{aligned} w_{m_1} &= \lambda f_1 N_1 / w_m, \\ w_m &= \lambda f_2 N / w_{m_1}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中 λ 为所使用的光波波长。将(5)式和(8)式代入(2)式得到

$$\left. \begin{aligned} G_0(f_2) &= \exp[2\pi i l I / N_2], \\ G_0(f_1) &= \exp[-2\pi i l J / N]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

将(9)式代入(4)式得到

$$A(k, l) = \sum_{I=-\frac{N_1}{2}+1}^{\frac{N_1}{2}} \exp[-2\pi i I(l-k)/N_2],$$

$$B(k, l) = \sum_{J=-\frac{N_1}{2}+1}^{\frac{N_1}{2}} \exp[-2\pi i J(l-k)/N], \quad (10)$$

$$A(k, l)B(l, k) = \sum_{I=-\frac{N_1}{2}+1}^{\frac{N_1}{2}} \sum_{J=-\frac{N_1}{2}+1}^{\frac{N_1}{2}} \exp\left[-\frac{2\pi i}{2}(l-k)(N_1 I - J)\right].$$

因为:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0,$$

所以

$$A(k, l)B(l, k) = N_1 \cdot N_2 \delta_{lk},$$

$$\text{最后得到} \quad H_{kk} = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{I=-\frac{N_1}{2}+1}^{\frac{N_1}{2}} \sum_{J=-\frac{N_1}{2}+1}^{\frac{N_1}{2}} G(I, J) (G_0^*(f_2))_{rk} (G_0^*(f_1))_{kl}. \quad (11)$$

由此看出,在满足(5)式与(8)式条件下,通过(11)式的矩阵相乘,可以直接得到全息图,透镜的振幅与相位分布符号 * 表示复数共轭。如果(6)式和(7)式取不等量,则可以直接通过解(3)式所示的线性方程组求得全息透镜的振幅与相位分布。

三、全息透镜的设计

Walsh-Hadamard 变换矩阵是一实系数矩阵,它的一维八序矩阵的元素是:

$$G(I, J) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

将(12)式与(8)式代入(11)式,通过计算得到全息图 H_{kk} ,我们记着

$$H(k) = A(k) e^{i\phi(k)} \quad (k=1, 2, \dots, N), \quad (13)$$

其结果如表1所示,用表1的数据和(9)式代入方程(1)得到变换矩阵。同(2)式比较,所得的方差如表1最后一行数据所示。

(8)式给出了图1光路中的各参数之间的联系。实验中使用的傅里叶透镜的焦长是固定的,所以光学系统中可变动的参数只能是: x_{m1} , x_m 与 x_{m2} 。(8)式中两个方程包含三个变量,这样给全息透镜设计,参数的选择,带来了方便,从而根据加工条件的情况,自由确定全息透镜的大小,再根据(8)式定出输入与输出孔径的大小。

全息透镜的制造采用了同通带参考波,同物波干涉形成全息图相类似的方法。全息透

Table 1

 $(H(k), K=1, N)$

$A(k) =$	$(k) =$	$A(k) =$	$(k) =$	$A(k) =$	$(k) =$	$A(k) =$	$(k) =$
0.634	1.669	0.794	-2.802	0.580	2.749	0.194	-0.426
0.887	-1.276	0.606	1.293	0.580	-1.571	0.160	0.491
0.785	2.062	1.000	0.142	0.580	1.963	0.220	-0.197
0.080	-0.834	0.345	-2.974	0.580	3.142	0.828	3.072
0.816	2.454	0.501	3.056	0.580	1.178	0.431	-2.843
0.238	2.651	0.054	-1.056	0.580	1.571	0.932	-0.635
0.723	2.847	0.275	2.845	0.580	0.393	0.645	0.423
0.520	3.043	0.502	-1.878	0.580	0.000	0.502	1.878
0.520	-3.043	0.645	-0.423	0.580	-0.393	0.275	-2.845
0.723	-2.847	0.982	0.635	0.580	-1.571	0.054	1.056
0.238	-2.651	0.481	2.843	0.580	-1.178	0.501	-3.056
0.816	-2.454	0.828	-3.072	0.580	-3.142	0.345	2.974
0.080	0.834	0.220	0.197	0.580	-1.963	1.000	-0.142
0.785	-2.062	0.100	-0.491	0.580	1.571	0.606	-1.293
0.887	1.276	0.194	0.426	0.580	-2.749	0.794	2.802
0.634	-1.669	0.538	-1.095	0.580	0.000	0.538	1.095

ERROR=0.0000000

镜第 k 个抽样点上的全息记录可以写成

$$I(k, x) = |A(k) \exp[i\phi(k)] + R \exp[-2\pi x i/dx]|^2, \quad (14)$$

相位 $\phi(k)$ 表现为有不同初始位置的一组矩型光栅, 光栅的占空比正比于该单元振幅值 $A(k)$ 。我们使用 Dxy-880 绘图仪绘制全息图, 最后光学系统可精缩为孔径为 5.8 mm 的全息透镜。

四、实验结果

将全息透镜插入图 1 的 P_2 平面, 并调整到光轴上, 采用了不同狭缝宽度作为输入函数, 放在 P_1 平面适当位置。用 He-Ne 激光准直照明位于 P_2 平面上全息透镜衍射的 +1 级处, 观察光学变换结果, 如图 2 所示。图 2(a) 是理论计算输出结果, (b) 是实验结果, 理论和预期实验结果是一致的。图 2 从上到下的狭缝宽度分别为 x_{m1} , $\frac{x_{m1}}{2}$, $\frac{x_{m1}}{2}$ 和 $\frac{x_{m1}}{4}$, 除第三组的狭缝放置在离输入坐标原点 $+\frac{x_{m1}}{4}$ 外, 其它均放置在坐标原点。实验中使用的透镜焦距为 400 mm, 根据 (7) 式, 输入孔径 $x_{m1} = 0.35$ mm, 输出孔径 $x_{m1} = 2.8$ mm。

五、讨 论

1. 在我们所有的计算中, 均未考虑抽样点的大小, 即每一步计算都是认为该抽样点中心输出为 δ 函数。但是在实验中, 所有抽样点输出不可能是理想的 δ 函数。这种抽样点孔径大小必然会给实验带来一定误差。表现在实验输出强度的差距。关于这个问题的定量讨论, 将另文论述。另外, 由于计算机全息图的相位误差和相干光噪声的存在, 使得输出在理

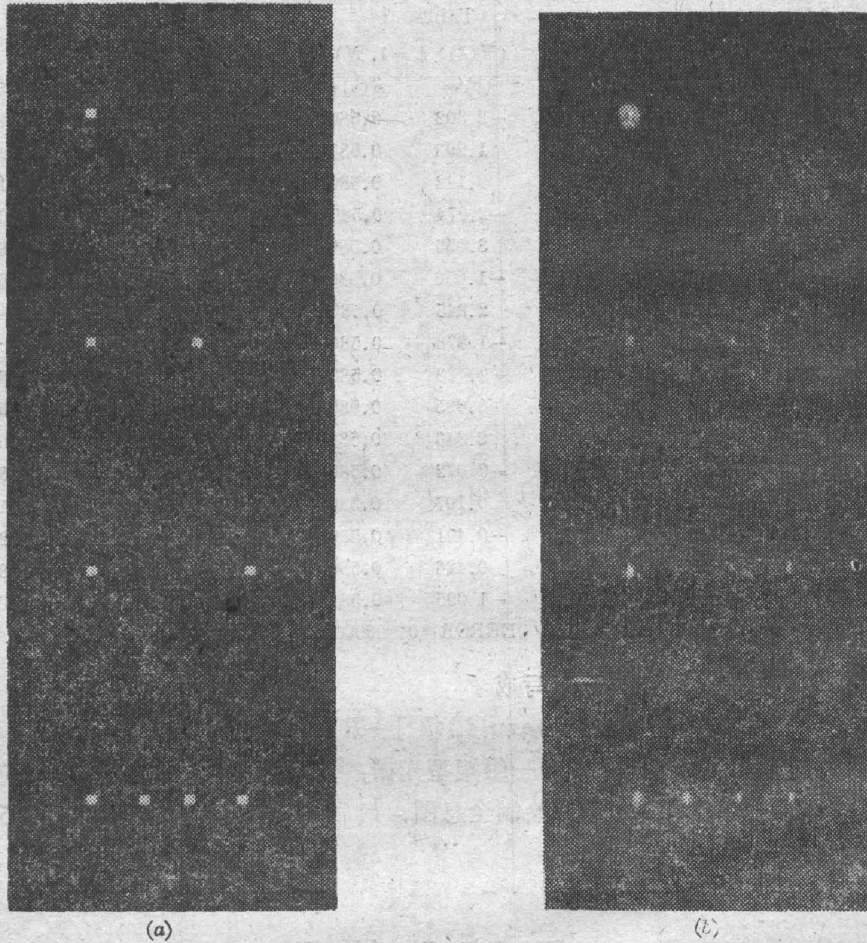


Fig. 2 Transform of the 1-D 8 sequence Walsh-Hadamard in correspondence with digit 11111111, 11110000, 00111100, 11000000
(a) theoretical result; (b) experimental result

论上计算为零的某些点, 实验结果还有一定输出, 特别是图 2 的最后一组实验, 理论上计算输出相对强度比第一组实验低 16 倍, 比第二、第三组低 4 倍, 因此它的信噪比较低。

(2) 从输出角度看, 输出函数是输入函数, 经过一次傅里叶变换, 同全息图相乘, 再经过一次逆傅里叶变换的结果, 在输出平面上的光场分布, 由于抽样孔径大小和抽样点数的限制, 使得仅在抽样点上的振幅和相位分布才是满足变换要求的。因此为了提高信噪比, 实验中在输出平面加一如图 3 所示 Mask 对输出平面进行抽样。图中单个狭缝宽度 $x_{m_1}/N = 0.045 \text{ mm}$, 狭缝之间距离为 $x_{m_1}/N_2 = 0.35 \text{ mm}$ 。

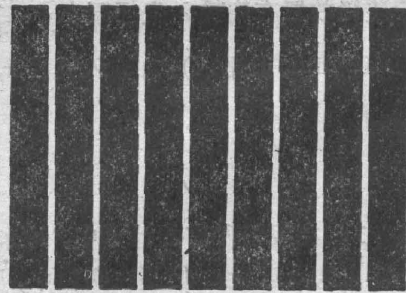


Fig 3. Sampling mask in output plane

本文通过相干光系统简化了一般变换全息透镜的设计和制作, 但是同文献 [5] 比较, 增加了两个光学元件(傅里叶变换透镜), 这是此实验的不足。

参 考 文 献

- [1] M. I. Jones, J. F. Walkup, and M. O. Hagler, SPIE 177., 1979, 16~21.
- [2] S. H. Lee, *Opt. Eng.*, 1979, 18, No. 5 (Sep-Oct), 518~523.
- [3] 霍裕平, 杨国桢, 顾本源; 《物理学报》, 24 (1975), 438。
- [4] 杨国桢, 顾本源; 《物理学报》, 30 (1981), 414。
- [5] 杨国桢; 《物理学报》, 30-10 (1981), 1340。
- [6] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics* (McGraw-Hill, New York, 1986), pp. 21~25.

Fourier optical implementation in generalized transformation

ZHENG SHIHAI, DONG BIZHEN, WANG YUTANG AND CHEN YANSONG

(Institute of Physics, Academia Sinica)

(Received 13 March 1986; revised 20 June 1986)

Abstract

In this article, design of the holographic lens for generalized transform simplified by Fourier optical system is presented. As a example, one dimensional 8×8 walsh hadamard transform was realized by the system. The design of holographic and experimental results are given.

Key Words: Optical general transform; Computer generated holograms.