第7卷 第3期
1987年3月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 7, No. 3
March, 1987

含弛豫项的广义光学Bloch方程的近似解

李 长 江
(北京化工学院)

提 要

本文用叠代法求得了含弛豫项的广义光学 Bloch 方程的近似解。与计算机给出的数值积分解的比较表明，一阶叠代解具有足够好的精度。由此得出了上能级占有几率随时间变化的解析表达式及多光子吸收、Bloch-Siegert 频移等有用结果。

关键词：光学 Bloch 方程，叠代解，占有几率，多光子吸收，Bloch-Siegert 频移。

一、引 言

研究二能级原子系统与线偏振单色光电场的相互作用是量子电子学、激光光谱学和核磁共振中的重要问题之一。多年来，人们为求得这一问题的近似解，发展了许多不同的数学、物理方法[1]。文献[2]用广义光学 Bloch 方程来描述强场与二能级系统的相互作用，并给出了无阻尼情况下的解析解。本文在此基础上，用叠代法求得了有阻尼情况下广义光学 Bloch 方程的近似解。它与计算机给出的数值积分解符合得很好。

二、含弛豫项的广义光学 Bloch 方程的叠代解

广义光学 Bloch 方程为

$$\dot{\boldsymbol{B}}=(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{B}-\gamma[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(0)],\tag{1}$$

$$\boldsymbol{\Omega}=[-\omega_r,\ 0,\ (\omega-\omega_0)],$$

$$\boldsymbol{a}=[-\omega_r\cos 2\omega t,\ -\omega_r\sin 2\omega t,\ 0],\tag{2}$$

式中 $\omega_r=\mu E/\hbar$，μ 为原子系统的偶极矩阵元，E 为光电场振幅，ω 为场频，$\omega_0=\omega_2-\omega_1$ 为二能级间隔。方程(1)右边第二项为唯象阻尼项，并假设纵向弛豫时间 T_1 等于横向弛豫时间 T_2 即 $T_1=T_2=\gamma^{-1}$。Bloch 赝矢 $\boldsymbol{B}(t)=[u,\ v,\ w]$，其初始条件为 $\boldsymbol{B}(0)=[0,\ 0,\ 1]$，它表示自由系统处于基态，并且没有固有电偶极矩。在 $t=0$ 时刻光电场作用在系统上时，$\boldsymbol{B}(t)$ 开始绕大小和方向均随时间周期性变化的有效场矢量 $\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{a}$ 进动，并且在进动的同时，$\boldsymbol{B}(t)$ 的大小随时间按 $e^{-\gamma t}$ 的规律衰减。方程(1)显然没有解析解。我们用叠代法求解。为此，将方程(1)的一般解写做

$$\boldsymbol{B}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{B}_n(t)。\tag{3}$$

选取满足通常的光学 Bloch 方程

$$\dot{\boldsymbol{B}}_0(t)=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B}_0(t)-\gamma[\boldsymbol{B}_0(t)-\boldsymbol{B}_0(0)]\tag{4}$$

收稿日期：1986年5月13日；收到修改稿日期：1986年8月29日

的精确解作为零阶解，在初始条件 $\boldsymbol{B}_0(0)=\boldsymbol{B}(0)$ 下这个解是

$$\left.\begin{aligned}
u_0(t)&=-\frac{(\omega-\omega_0)\omega_r}{\Omega^2+\gamma^2}\left[1-\exp(-\gamma t)\left(\cos\Omega t+\frac{\gamma}{\Omega}\sin\Omega t\right)\right],\\
v_0(t)&=\frac{\omega_r\gamma}{\Omega^2+\gamma^2}\left[1-\exp(-\gamma t)\left(\cos\Omega t-\frac{\Omega}{\gamma}\sin\Omega t\right)\right],\\
w_0(t)&=-\frac{\omega_r^2}{\Omega^2+\gamma^2}\left[1-\exp(-\gamma t)\left(\cos\Omega t+\frac{\gamma}{\Omega}\sin\Omega t\right)\right]+1,
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

一阶解 $\boldsymbol{B}_1(t)$ 满足下列方程:

$$\dot{\boldsymbol{B}}_1(t)=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{B}_0(t),\tag{6}$$

它很容易由积分法求得

$$\begin{aligned}
u_1(t)=&-\frac{A}{M}\omega_r^3\left\{1-\exp(-\gamma t)\left[\cos(2\omega+\Omega)t+\frac{C}{A}\sin(2\omega+\Omega)t\right]\right\}\\
&-\frac{B}{N}\omega_r^3\left\{1-\exp(-\gamma t)\left[\cos(2\omega-\Omega)t+\frac{D}{B}\sin(2\omega-\Omega)t\right]\right\}\\
&-\frac{\omega_r[(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2]}{2\omega(\Omega^2+\gamma^2)}(1-\cos 2\omega t),
\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}
v_1(t)=&\frac{C}{M}\omega_r^3\left\{1-\exp(-\gamma t)\left[\cos(2\omega+\Omega)t-\frac{A}{C}\sin(2\omega+\Omega)t\right]\right\}\\
&+\frac{D}{N}\omega_r^3\left\{1-\exp(-\gamma t)\left[\cos(2\omega-\Omega)t-\frac{B}{D}\sin(2\omega-\Omega)t\right]\right\}\\
&+\frac{\omega_r[(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2]}{2\omega(\Omega^2+\gamma^2)}\sin 2\omega t,
\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}
w_1(t)=&\frac{A}{M}[(\omega-\omega_0)-\Omega]\omega_r^2\left\{1-\exp(-\gamma t)\left[\cos(2\omega+\Omega)t-\frac{C}{A}\sin(2\omega+\Omega)t\right]\right\}\\
&+\frac{B}{N}[(\omega-\omega_0)+\Omega]\omega_r^2\left\{1-\exp(-\gamma t)\left[\cos(2\omega-\Omega)t+\frac{D}{B}\sin(2\omega-\Omega)t\right]\right\}\\
&-\frac{(\omega-\omega_0)\omega_r^2}{2\omega(\Omega^2+\gamma^2)}(1-\cos 2\omega t)-\frac{\gamma\omega_r^2}{2\omega(\Omega^2+\gamma^2)}\sin 2\omega t,
\end{aligned}\tag{9}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&A=\Omega(2\omega+\Omega)-\gamma^2,\quad B=\Omega(2\omega-\Omega)+\gamma^2,\\
&C=2\gamma(\Omega+\omega),\quad D=2\gamma(\Omega-\omega),\\
&M=2\Omega(\Omega^2+\gamma^2)[(2\omega+\Omega)^2+\gamma^2],\\
&N=2\Omega(\Omega^2+\gamma^2)[(2\omega-\Omega)^2+\gamma^2]。
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

高阶解 $\boldsymbol{B}_n(t)$, $(n\geqslant 2)$，满足下列方程:

$$\dot{\boldsymbol{B}}_n(t)=(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{B}_{n-1}(t)-\gamma\boldsymbol{B}_{n-1}(t),\tag{11}$$

它也可由积分法求得。下面将会看到，当 $\omega_r<\omega$ 时，一阶解具有足够好的精确度。

三、讨　论

我们对上能级占有几率

$$|a_2(t)|^2=[1-w(t)]/2\tag{12}$$

和吸收分量 $v(t)$ 同其计算机解作了比较。图 1 和图 2 分别表示在 $\omega_r=0.2\omega$, $\gamma=0.02\omega$ 条

件下，共振情况 $\omega_0=\omega$ 和非共振情况 $\omega_0=0.8\omega$ 时 $|a_2(t)|^2$ 和 $v(t)$ 作为 ωt 的函数曲线。其中实线和虚线分别表示一阶近似解和数值积分解。

比较表明，一阶叠代解以足够好的精度反映了精确解的主要特征。各曲线均以频率

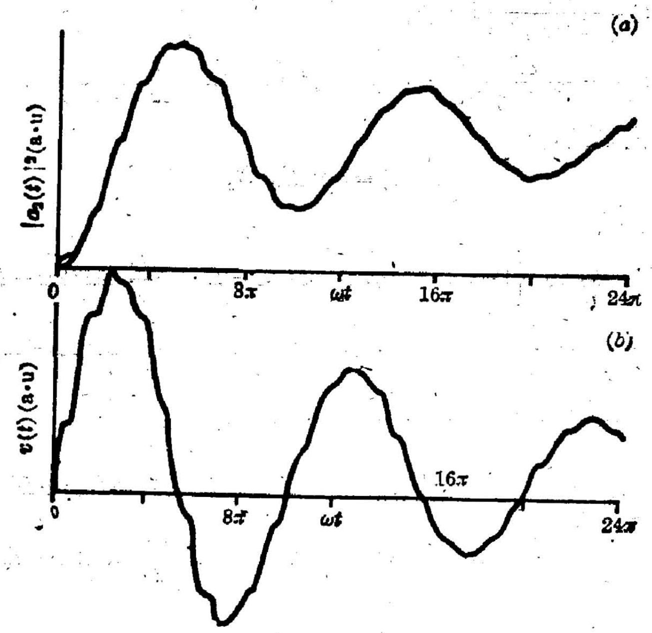

Fig. 1 Time dependence of the occupation probability (a) and absorption component (b) for $\omega_r=0.2\omega$, $\gamma=0.02\omega$ and $\omega_0=\omega$

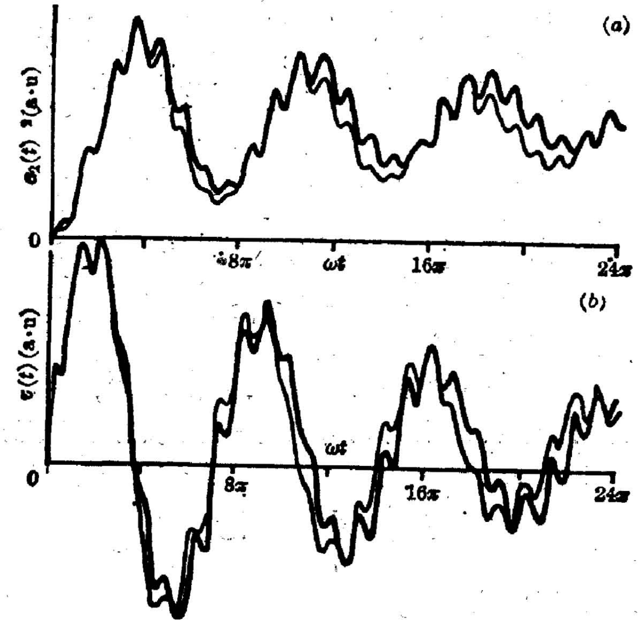

Fig. 2 Time dependence of the occupation probability (a) and absorption component (b) for $\omega_r=0.2\omega$, $\gamma=0.02\omega$ and $\omega_0=0.8\omega$

$\Omega=\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+\omega_r^2}$ 随时间缓慢变化，同时还含有频率为 $2\omega\pm\Omega$ 等的快振动成分。场强 ω_r 越大，快振动成分就越大；场频 ω 偏离原子系统的共振频率 ω_0 越远，快振动成分的影响就越显著。最大振幅随时间作指数衰减，在 $t\to\infty$ 时趋于一稳定值。在无阻尼情况下，其结果与文献[2]一致。这一结果表明，强场下的光章动现象中存在着弱的高次效应。

由广义光学 Bloch 方程能够给出通常光学 Bloch 方程所得不到的一些结果，多光子吸收就是其中之一。从(5)和(8)式，求得吸收分量的长时间稳态解

$$v(\infty)=\frac{\omega_r\gamma}{\Omega^2+\gamma^2}+\frac{2\omega_r^3\gamma}{(4\omega^2-\Omega^2)^2+2(4\omega^2+\Omega^2)\gamma^2+\gamma^4}。\tag{13}$$

图 3 是由(13)式计算的在 $\gamma=0.02\omega_0$ 时，$\omega_r=0.10\omega_0$ 和 $\omega_r=0.15\omega_0$ 情况下的吸收系数与场频 ω/ω_0 的关系曲线。在 $\omega/\omega_0\sim1$ 时为单光子吸收，$\omega/\omega_0\sim1/3$ 时与三光子吸收相对应。随着 ω_r 的增大，多光子吸收增强，单光子吸收出现明显的功率增宽和饱和效应。

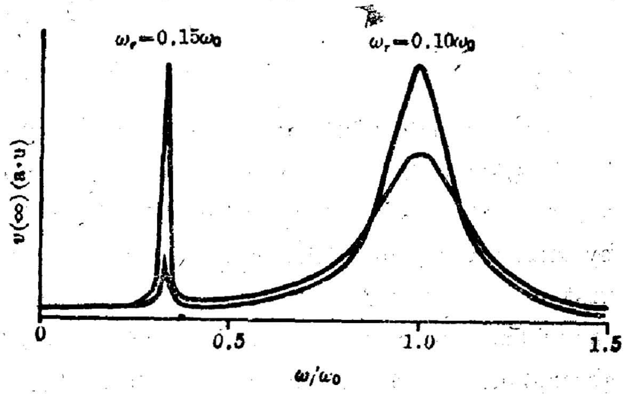

Fig. 3　The absorption coefficients as a function of ω/ω_0 for $\gamma=0.02\omega_0$

可以预料，二阶及 n 阶解与 5 光子及 $2n+1$ 光子吸收相联系。

此外，在非旋波近似下，原子系统的共振频率依赖于场强。对单光子或 3 光子吸收，其共振频率相对于 ω_0 或 $(1/3)\omega_0$ 产生一个频移，即 Bloch-Siegert 频移[3]。由(13)式的共振条件可以求得这一频移为

$$\Delta\omega=\omega_r^2/4\omega_0。\tag{14}$$

这一结果与由其他方法[4]所得的结果一致。由 n 阶叠代解，可以给出 $2n+1$ 光子吸收相应的频移为

$$\Delta\omega=\frac{1}{4n}\frac{\omega_r^2}{\omega_0}。\tag{15}$$

可见，用在未作旋波近似下导出的广义光学 Bloch 方程描述激光场与二能级原子系统的相互作用，物理图像清楚，叠代近似解的形式简明，与数值积分解符合得很好。从中得出了由通常的光学 Bloch 方程所得不到的多光子吸收和 Bloch-Siegert 频移等有价值的结果。

感谢日本东京理科大学铃木公博士所给予的帮助。

参 考 文 献

[1] D. R. Dion, J. O. Hirschfelder; «Advances in Chemical Physics, Vol. 35», (I. Prigogine, S. A. Rice Ed., John Wiley and Sons, New York, 1976), 265～350.
[2] 李长江;«光学学报», 1983, 3, No. 9 (Dec), 769～773。
[3] F. Bloch, A. Siegert; Phys. Rev., 1940, 57, No. 3 (Mar), 522～527.
[4] D. T. Pegg; J. Phys. (B), 1973, B6, No. 2 (Feb), 246～253.

Approximate solutions of the generalized Bloch equation with damping terms

LI CHANGJIANG
(*Beijing Institute of Chemical Technology*)

(Received 13 May 1986; revised 29 August 1986)

Abstract

Approximate solutions of the feneralized Bloch equations which describe a two-level system interacting with a strong no-rotating field are presented. The approximation is based on an iterative method. The accuruoy of solutions is discussed by comparing them with the numerically intefrated solutions. It is shown that the first order iterative solutions have sufficiently good accuracy. Several valuable conclusions on the time-dependence of the occupation probability, the multi-photon absorption, and the Bloch-Siegert shift are drawn.

Key Words: Optical Bloch equation; Iterative solution; Occupation probability; Multi-photon absorption; Bloch-Siegert shift.

《饶毓泰基础光学奖》开始首次评选

根据北京大学光学教研室(饶毓泰先生生前工作的单位)的倡议，在中国光学学会和我国知名光学专家王大珩的支持下，《饶毓泰基础光学奖》已正式设立。设立本奖的宗旨是：缅怀我国著名的科学家、教育家、曾为我国光学事业作出重大贡献的原北京大学教授饶毓泰先生、鼓励青年科学工作者攀登科学高峰，献身我国的光学事业。这是在我国设立的第一个光学领域内的荣誉称号和奖金。首届评奖委员会由王大珩教授任主席，由张志三、王之江、母国光、章志鸣、张合义、王国文、孙驹亨组成，秘书处设在北京大学物理系。根据《简则》规定：凡在国内基础光学研究工作中做出突出成就的青年科学工作者(一般不超过35岁)，均可直接向评委会提出申请，也可由光学方面的专家推荐。1987年度的评选工作在5月～8月进行，申请和推荐的截止日为1987年5月10日，希申请者和推荐者按时将参选论文和申请表(没有申请表的单位和个人可直接向秘书组索取)寄送北京大学物理系《饶毓泰基础光学奖》秘书组，黄显玲同志。