第7卷 第12期
1987年12月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 7, No. 12
December, 1987

自聚焦透镜成像矩阵公式的近似性

程 希 望
(中国科学院西安光学精密机械研究所)

提 要

本文从光线方程出发，对自聚焦透镜成像矩阵公式做了详细推导，由推导过程即可看出该公式的近似性及其应用范围，纠正了一些文献上认为该公式可应用于非高斯光学成像的看法。

关键词：自聚焦透镜，成像矩阵。

一、引 言

自聚焦透镜成像矩阵公式(以下简称矩阵公式)在大量文献中均有引用[2,3]，但未予证明。本文从光线方程出发，对该公式做了详细推导，推导过程本身即是其近似性和应用范围的最好注释，从而说明该公式仅适用于高斯光学成像的原因，纠正了一些文献[5]上认为它可以应用于非高斯成像的看法。

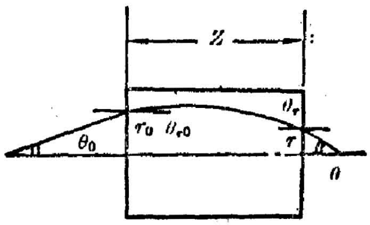

Fig. 1 Formula derivation diagram

二、公 式 推 导

自聚焦透镜的折射率分布一般表示为[4]

$$n=n_0\,\mathrm{sech}(gr), \tag{1}$$

n 是在半径上距轴 r 距离处的折射率，n_0 是轴心折射率，g 是聚焦常数。因自聚焦透镜属于弱非匀质，其幂级数展开式第二项 $(1/2)g^2r^2\ll1$，故通常将高次项略去，而将(1)式表示为平方分布(抛物线分布)

$$n=n_0\left(1-\frac{1}{2}g^2r^2\right)。 \tag{2}$$

在柱坐标系中，光线方程是[1]

$$\frac{d}{ds}\left[n(r,\ \theta,\ z)\frac{dr}{ds}\right]=\mathrm{grad}\,n。 \tag{3}$$

因折射率分布仅与 r 有关，且影响光行方向的有好多因素，即自变量不止一个，所以(3)式应写成偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[n(r)\frac{\partial r}{\partial s}\right]=\frac{\partial n}{\partial r}。 \tag{4}$$

将折射率近似表式(2)代入(4)式，得

收稿日期：1986年8月8日

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[n(r)\frac{\partial r}{\partial s}\right]=-n_0 g^2 r。 \tag{5}$$

对傍轴子午光线。此时

$$\partial s=\sqrt{(\partial r)^2+(\partial z)^2}=\sqrt{(\partial r/\partial z)^2+1}\,\partial z, \tag{6}$$

用$(\partial r/\partial z)^2$是二级小量,故近似有

$$\partial s\approx\partial z。 \tag{7}$$

当平面单色波射入该弱非匀质时,又有$n\approx n_0$, (5)式化为

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\approx-g^2 r。 \tag{8}$$

上式的解在数学上有三类,即$g^2<0$、$g^2=0$、$g^2>0$,前两种无意义,第三类解类似于有界弦的自由振动,即波迹振幅不变,亦即波迹角频ω(我们的g)不变,$g\gtrless 0$($-g$仅表明光行方向相反,属坐标规定问题)。通常所说的全反射原理,在此处仅是边界衔接条件。解偏微分方程(8)式,得

$$r=B\cos(gZ)+C\sin(gZ), \tag{9}$$

z为镜长。上式实际上是两个特解的叠加,B、C由初始条件决定。当$Z\to 0$、$r_0\neq 0$时,由(9)式知(r_0为入射点离轴距离)

$$r_0=B。 \tag{10}$$

当$Z\to 0$、$r_0=0$时,

$$C\sin(gZ)=0 \quad (B=0)。 \tag{11}$$

由上式无法求出C,故以(9)式一阶偏导求之,因有

$$\frac{\partial r}{\partial z}=Cg\cos(gZ)=Cg, \tag{12}$$

$\frac{\partial r}{\partial z}$实际上是镜内光线轨迹始点(入射点)的斜率,在傍轴近似下,即

$$\frac{\partial r}{\partial z}=Cg=\mathrm{tg}\,\theta_{r_0}\approx\theta_{r_0}。 \tag{13}$$

θ_{r_0}是入射点镜内折射角,由(13)式得

$$C\approx\theta_{r_0}/g。 \tag{14}$$

镜外入射角θ_0可由折射定律求出,由于讨论的是弱非匀质中的傍轴子午光线,且仅涉及平面单色波,故有

$$\theta_0\approx n_{r_0}\theta_{r_0}\approx n_0\theta_{r_0}。 \tag{15}$$

n_0是轴心折射率,由(14)、(15)式可知

$$C\approx\theta_0/n_0 g。 \tag{16}$$

将B、C的表示式代入(9)式,则出射高度r便可表为

$$r\approx r_0\cos(gZ)+\frac{\theta_0}{n_0 g}\sin(gZ)。 \tag{17}$$

下面我们导出出射角度θ的表示式。将(17)式求偏导,得

$$\frac{\partial r}{\partial z}\approx-r_0 g\sin(gZ)+\frac{\theta_0}{n_0}\cos(gZ)。 \tag{18}$$

上式实际上是镜内临出射前的光线斜率$\mathrm{tg}\,\theta_r(\approx\theta_r)$,对出射高度$r$处的出射光线应用折射

定律，则出射角度 θ 为

$$\theta \approx n_r\theta_r \approx n_r \frac{\partial r}{\partial z} \approx -n_r r_0 g \sin(gZ) + \frac{\theta_0 n_r}{n_0}\cos(gZ)。 \tag{19}$$

根据讨论(8)、(15)式时同样的理由，亦即仅涉及弱非匀质中傍轴子午光线，且仅就平面单色波而言，因而又有 $n_r \approx n_0$。这样，(19)式便化为

$$\theta \approx -r_0 n_0 g \sin(gZ) + \theta_0 \cos(gZ)。 \tag{20}$$

将(17)、(20)式用矩阵公式表出，则为

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \cos(gZ) & \frac{1}{n_0 g}\sin(gZ) \\ -n_0 g \sin(gZ) & \cos(gZ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

上式就是文献上大量引用的自聚焦透镜高斯光学成像矩阵公式。

目前文献上的自聚焦透镜光学参数公式，均是按照各参数的定义而由(21)式导出的，如焦距、截距、主平面、物像关系，放大率等等。

在推导过程中着重说明了所取各种近似的物理含义，因此可以明显看出矩阵公式的应用范围仅限于傍轴子午光线，而不能用于非高斯光学成像计算。尤其是当引进 $n_{r_0} \approx n_0$ 和 $n_r \approx n_0$ 的近似后，更限制了该公式的应用。这是在援引它进行测量或计算时需特别加以注意的。

参 考 文 献

[1] 大越孝敬ほカ《光ファイバ》，(オーム社，东京，1983)，44。
[2] H. Kita *et al.*; *J. Amer. Ceram. Soc.*, 1971, **54**, No. 7 (Jul), 321.
[3] 西沢紘一;《光学技術コンタクト》,1978, **16**, No. 5(May), 25。
[4] S. Kawakami, J. Nishizawa; *IEEE Trans. Microwave Theory & Techn.*, 1968, **MTT-16**, No. 10 (Oct), **814**.
[5] S. Wang, L. Ronchi; *《6th GRIN Meeting Papers Abstract, Sicily*, 1985, Sep. 26~27》, 35.

Approximate property of the imaging matric formula for selfoc lens

CHENG XIWANG

(Xian Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 8 August 1986)

Abstract

Based on the ray equation, imaging matric formula of the selfoc lens is derived is detail in this paper. Approximate property and applicable range of this formula can be seen from the derivation process, and the view of considering the formula applicable to the imaging of non-Gaussian optics should be corrected.

KeyWords: Selfoc lens; Imaging matric.