

希尔伯特空间有限区域成像 积分算子的谱

宋 菲 君

(北京信息光学仪器研究所)

张 涛

(美国斯坦福大学物理系)

提 要

本文讨论了希尔伯特空间中有限区域成像积分算子的本征值和本征函数,研究了非对称核的情形,并用微扰和有限秩方法计算了衍射受限和离焦情况下的本征值和本征函数。

关键词: 希尔伯特空间物限域; 成像积分算子谱。

一、引 言

许多作者讨论过有限区域成像积分算子的本征值和本征函数,并用它们来评价线性光学系统的成像质量,研究本征值与成像自由度、光学系统信道容量的关系^[1~7]。但所讨论的成像系统限于衍射受限系统,对于像差光学系统及普遍情况下非对称核积分算子没有详细研究。

本文以希尔伯特空间中自伴算子的谱理论为基础,讨论了有限区域成像积分算子的本征值和本征函数的一般理论,研究了非对称核积分算子,这正是光学系统具有彗差、像散等非对称像差的情形。作者用微扰论的方法,求出了本征方程的普遍解,并用有限秩方法计算了若干低阶本征值和本征函数的近似值。

二、希尔伯特空间中有限区域成像积分算子

一维空间中有限区域 $[-a, a]$ 通过非相干光学系统成像的一般过程可用下式描述:

$$I_i(x) = \int_{-a}^a h(x, \xi) I_o(\xi) d\xi, \quad (1)$$

式中 I_o 和 I_i 分别为物和像的光强分布, $h(x, \xi)$ 为线扩散函数或系统的脉冲响应。相应的本征方程为

$$\lambda \psi(x) = \int_{-a}^a h(x, \xi) \psi(\xi) d\xi, \quad (2)$$

式中 λ 为本征值, $\psi(x)$ 为属于 λ 的本征函数。

定义算子

$$L = \int_{-a}^a d\xi h(x, \xi), \quad (3)$$

则(2)式可写作

$$(\lambda I - L)\psi(x) = 0, \quad (4)$$

其中 I 为单位算子。

假定 $\psi(x) \in L_2(-a, a)$, $h(x, \xi) \in L_2((-a, a) \times (-a, a))$, $L_2(-a, a)$ 为定义在区间 $(-a, a)$ 上的勒贝格可积函数空间, 并定义内积

$$(\psi, \varphi) = \int_{-a}^a \psi(x)\varphi^*(x)dx, \quad (5)$$

则范数

$$\|\psi\| = \sqrt{(\psi, \psi)} = \left(\int_{-a}^a |\psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

这样定义内积后的空间 L_2 为希尔伯特空间, 算子 $L: L_2(-a, a) \rightarrow L_2(-a, a)$ 。也就是说, 我们假定光学系统的横向放大倍率为 1。在倍率不为 1 的情形下, 我们可以认为 I_g 为光学系统的几何像。

进一步假设系统满足平移不变条件。否则我们总可以把成像区间分成足够多个“等晕区”, 在每个小区域中系统满足平移不变条件^[8], 则 $h(x, \xi)$ 可表为

$$h(x, \xi) = h(x - \xi) = h_+(x - \xi) + h_-(x - \xi), \quad (7)$$

其中 h_+ 和 h_- 分别表示 h 中关于宗量反演的不变号及变号的分量, 亦即对称和反对称的分量:

$$\left. \begin{aligned} h_+(x - \xi) &= \frac{1}{2} [h(x - \xi) + h(\xi - x)], \\ h_-(x - \xi) &= \frac{1}{2} [h(x - \xi) - h(\xi - x)] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

且有

$$\left. \begin{aligned} h_+(\xi - x) &= h_+(x - \xi), \\ h_-(\xi - x) &= -h_-(x - \xi), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

从而 L 可以分成两部分:

$$\left. \begin{aligned} L &= L_+ + L_-, \\ L_+ &= \int_{-a}^a d\xi h_+(x - \xi), \\ L_- &= \int_{-a}^a d\xi h_-(x - \xi). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

L_+ 为自伴算子, 即对于任意 $\psi(x), \varphi(x) \in L_2(-a, a)$, 均有

$$(\psi, L_+\varphi) = (\varphi, L_+\psi), \quad (11)$$

这样一来, 根据希尔伯特空间中积分方程的理论^[7], 算子 L_+ 具有一系列实的本征值 $\{\gamma_n\}$ 及相应的本征向量序列 $\{\psi_n\}$, 每个非零的本征值只有有限的多重性, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\gamma_n \rightarrow 0$ 。 $\{\psi_n(x)\}$ 为 L_+ 所作用的希尔伯特空间中的完备正交归一的向量集合。

对于反对称的算子 L_- , 我们可以引入

$$\hat{L}_- = -iL_-, \quad (12)$$

容易证明 \hat{L}_- 为自伴的, 所以它有实的本征值 δ_n 及本征函数 φ_n , 满足

$$\delta_n \varphi_n(x) = -i \int_{-a}^a h_-(x-\xi) \varphi_n(\xi) d\xi,$$

上式可改写为

$$(i\delta_n) \varphi_n(x) = \int_{-a}^a h_-(x-\xi) \varphi_n(\xi) d\xi = L_- \varphi_n(x). \quad (18)$$

可见 L_- 的本征值为纯虚数, 且当 $n \rightarrow 0$ 时 $\delta_n \rightarrow 0$, $\{\varphi_n\}$ 同样构成区间 $(-a, a)$ 上的完备的正交归一化的向量集合。

由于本征值不依赖于基的选择, 可以认为算子 L 具有复本征值 λ_n ,

$$\lambda_n = \gamma_n + i\delta_n, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

其中 γ_n 和 δ_n 都是实数。 $\{\lambda_n\}$ 称为算子 L 的谱。我们从上面的讨论可以看到:

- (1) 在被成像区间为有限的情形下, 成像积分算子的谱为分立谱。
- (2) 当线扩散函数不对称时, 复本征值具有不为 0 的虚部 (相当于 $PTF \neq 0$)。

三 成像积分算子本征问题的求解

1. 微扰方法

在公式(4)中, 设

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}, \\ \psi &= \psi^{(0)} + \psi^{(1)}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中 $\lambda^{(k)}$ 和 $\psi^{(k)}$ ($k=0, 1$) 分别为 k 阶本征值和本征函数。算子 L 也同样进行分解:

$$L = L^{(0)} + L^{(1)}. \quad (16)$$

由于一般情形下 h 的弥散不大, 因此可以取

$$\left. \begin{aligned} L^{(0)} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi h(x-\xi), \\ L^{(1)} &= - \left(\int_{-a}^{-\infty} + \int_a^{\infty} \right) d\xi h(x-\xi). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

零级方程为

$$\lambda_n^{(0)} \psi_{n\alpha}^{(0)} = L^{(0)} \psi_{n\alpha}^{(0)}, \quad (18)$$

式中 $\alpha=1, 2, \dots, \alpha_n$, α_n 为简并度 $\psi_{n\alpha}^{(0)}$ 为属于同一本征值 $\lambda_n^{(0)}$ 的本征函数。

设 h 只有对称的分量, 则上式的解为

$$\left. \begin{aligned} \psi_{n1}^{(0)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp(i2\pi f_n x), \\ \psi_{n2}^{(0)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp(-i2\pi f_n x), \\ f_n &= \frac{n}{2a} = \frac{n}{S}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中 $S=2a$ 为空域尺寸。 f_n 可称为广义空间频率。代入(17), 解出与这些本征函数对应的本征值

$$\lambda_n^{(0)} = (L^{(0)} \psi_{n\alpha}^{(0)}, \psi_{n\alpha}^{(0)}) = H(f_n), \quad (20)$$

其中 H 表示为 h 的傅里叶变换, 即 OTF。可见在零级近似下, 本征值位于 OTF 曲线上。

$H(f_n)$ 可称为广义的传递函数。

由(19)式可知, 在 $h(x-\xi)$ 关于两个宗量对称的情形下除 $n=0$ 外存在二重简并。我们不妨将本征函数的简并集

$$\{\psi_{n\alpha}^{(0)} | n=0, 1, \dots; \alpha=\varepsilon_n\} \quad \left(\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{当 } n=0 \\ 2, & \text{其它} \end{cases} \right)$$

展开成为单值集

$$\{\psi_n^{(0)} | n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

相应的本征值集为

$$\{\lambda_n^{(0)} | n=0, 1, 2, \dots\}。$$

这两个集均为可列集。当 $a \rightarrow \infty$ 时, 它们却成为不可列的, 本征值将密集成为连续函数, 即 OTF。可见 OTF 是大视场光学系统的近似描述。

可以证明, 当 h 具有非对称的分量时, 简并现象一般不再存在。

一级方程为

$$\lambda_n^{(1)} \psi_n^{(0)} = L^{(1)} \psi_n^{(0)}, \quad (21)$$

这里为简单起见, 略去表示简并的参数 α 。

一级本征值为

$$\begin{aligned} \lambda_n^{(1)} &= (L^{(1)} \psi_n^{(0)}, \psi_n^{(0)}) \\ &= -\lambda_n^{(0)} + \frac{1}{2a} \int_{-a}^a dx \int_{x-a}^{x+a} h(\xi) \exp(-i2\pi f_n \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (22)$$

从而有近似到一级的本征值表达式

$$\lambda_n = \lambda_n^{(0)} + \lambda_n^{(1)} = \int_{-1}^1 d\xi \int_{\xi-1}^{\xi+1} h(ax) \exp(-in\pi x) dx. \quad (23)$$

用分部积分法, 解出

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n &= \gamma_n + i\delta_n, \\ \gamma_n &= \int_0^1 (1-x) h_+(2ax) \cos(2n\pi x) dx, \\ \delta_n &= -\int_0^1 (1-x) h_-(2ax) \sin(2n\pi x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

设 h_+ 和 h_- 可以展开为幂级数:

$$\left. \begin{aligned} h_+(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}, \\ h_-(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{2k-1}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

代入(24)得到^[3]

$$\left. \begin{aligned} \gamma_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2(2k+1)} [F(2k+1, 2k+2, i2n\pi) + F(2k+1, 2k+2, -i2n\pi)] \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2(2k+2)} [F(2k+2, 2k+3, i2n\pi) + F(2k+2, 2k+3, -i2n\pi)], \\ \delta_n &= i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{4k} [F(2k, 2k+1, i2n\pi) - F(2k, 2k+1, -i2n\pi)] \\ &\quad - i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2(2k+2)} [F(2k+1, 2k+2, i2n\pi) - F(2k+1, 2k+2, -i2n\pi)], \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式中 $F(\alpha, \gamma, z)$ 为合流超几何函数。

衍射受限系统的线扩散函数(圆光瞳)

$$h(x) = h_+(x) = \frac{H_1(2x)}{2x^2} = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-(nSWx)^2]^k}{(2k+1)!!(2k+3)!!}, \quad (27)$$

式中 H_1 为一阶 Struve 函数, SW 为系统的空间带宽积 ($W = 2f_c$ 为带宽, f_c 为 OTF 的截止频率)。以

$$SW = 16$$

代入(26)式算出 γ_n , 如图 1 所示(由于对称性, 只画出

$$n \geq 0$$

的部分, γ_0 是在取极限的意义上得到的)。图中横坐标为 n 或广义空间频率 f_n 。在同一图中画出相应的 OSF 曲线。OTF 具有截止频率 f_c , 但 $\{\gamma_n\}$ 为无限集, 一直向高频扩展, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\gamma_n \rightarrow 0$ 。在 $n \geq 0$ 的范围内, 明显不为 0

的本征值个数 N 均为 SW 的一半, 在这一意义下的最高空间频率

$$f_N = \frac{N}{S} = \frac{W}{2} = f_c.$$

超出 f_N 的那些本征谱项可能淹没在噪声中测不出来, 由它们荷载的图象信息可能丢失。由于本征函数的个数相当于系统的自由度, 可以说空间带宽积是系统自由度的度量。这一结论和抽样理论得出的结论是一致的。

2. 有限秩方法

L 是希尔伯特空间中的线性算子, 它的核 $h(x, \xi)$ 如果满足连续且平方可积条件, 则可以用有限秩算子 L_N 按范数来任意逼近^[10]。成像积分算子的核一般来讲总是满足上述条件的。

定义 $[-a, a]$ 上的正交函数集合

$$\varphi_\mu^{(N)}(x) = \begin{cases} 1, & -a + \frac{\mu-1}{N}l \leq x < -a + \frac{\mu}{N}l \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (28)$$

其中 $l = 2a$, $\mu = 1, 2, \dots, N_0$ 定义

$$h_N(x, \xi) = \sum_{\mu, \nu=1}^N M_{\mu\nu} \varphi_\mu^{(N)}(x) \varphi_\nu^{(N)}(\xi), \quad (29)$$

其中

$$M_{\mu\nu} = \left(\frac{N}{l}\right)^2 \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a \varphi_\mu^{(N)}(x) \varphi_\nu^{(N)}(\xi) h(x, \xi) d\xi. \quad (30)$$

现在我们用有限秩的线性算子 L_N 来逼近 L , L_N 定义为

$$L_N = \int_{-a}^a d\xi h_N(x, \xi), \quad (31)$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, L_N 的本征值趋近于 L 的本征值, L_N 的本征函数按范数趋近于 L 的本征函数。

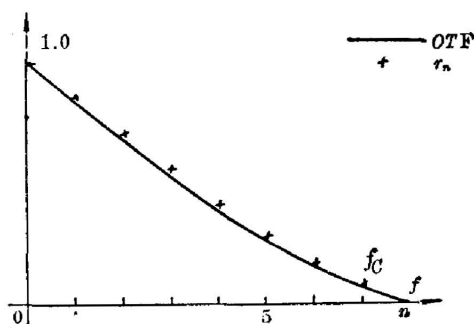


Fig. 1

让我们对于一个充分大的 N 求解方程

$$L_N \psi_n^{(0)}(x) = \lambda_n \psi_n^{(0)}(x), \quad (32)$$

设 $\psi^{(0)}(x)$ 在第 μ 个子区间上的平均值为 $O_\mu^{(n)}$, 则有

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\mu=1}^N M_{\mu\nu} O_\mu^{(n)} &= \lambda_n^{(0)} O_\nu^{(n)}, \\ \nu &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

求解方程(33), 就得到近似的本征值 $\lambda_n^{(0)}$ 和本征函数 $\psi_n^{(0)} = \{O_\mu^{(n)}, \mu=1, 2, \dots, N\}$ 。

四、离焦情形下的算子的谱

离焦是一类最简单的像差。衍射受限系统离焦时的传递函数可以表为

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{4}{\pi\alpha} \cos(\alpha f) \left\{ J_1(\alpha)\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-)^k}{2k} [(2k+1)J_{2k+1}(\alpha) \right. \\ &\quad \left. + (2k-1)J_{2k-1}(\alpha)] \sin(2k\theta) \right\} \\ &\quad - \frac{4}{\pi\alpha} \sin(\alpha f) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-)^k}{2k-1} [2kJ_{2k}(\alpha) + (2k-2)J_{2k-2}(\alpha)] \sin(2k-1)\theta, \end{aligned} \quad (34)$$

式中 f 是规范化空间频率, $\alpha = 4\pi A^2 \left(\frac{\delta}{\lambda}\right) f$, $\theta = \cos^{-1} f$, δ 为离焦量, A 为数值孔径, λ 为波长。所以离焦时的算子是完全确定的, 利用有限秩方法, 可以算出不同离焦情况的本征值和本征函数。

图 2 画出离焦情形下的本征值和相应的传递函数(即 $\alpha \rightarrow \infty$ 时的谱)。对比曲线 4 和 5 可以发现, MTF 在空间频率较高的区域出现振荡, 但本征值 γ_n 却随 n 的增大而单调递减, 这是由算子的性质决定的。

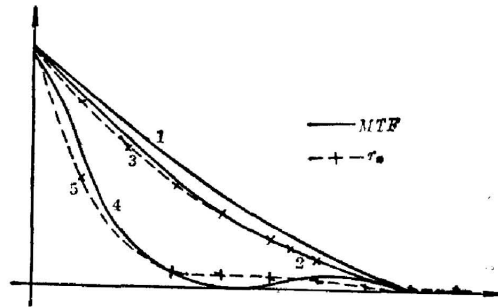


Fig. 2 MTF and γ_n for a focusing error system with circular pupil, $A=0.65$

1: $\delta/\lambda=0$, MTF 2: $\delta/\lambda=1$, MTF 3: $\delta/\lambda=1$, γ_n
4: $\delta/\lambda=3$, MTF 5: $\delta/\lambda=3$, γ_n

图 3 画出 $A=0.65$, 离焦量 $\delta/\lambda=0$ 及 3.0 时的前五个本征函数, 分别用实线及虚线表示。在前一情形下, 曲线形状很接近于正弦或余弦曲线, 只在区间边缘附近稍有偏离, 在 $[-a, a]$ 中极值个数 $=n$ 。在后一情形下, 本征函数已明显偏离正弦或余弦曲线, 例如图 3(d), 而且极值个数一般 $\neq n$ 。

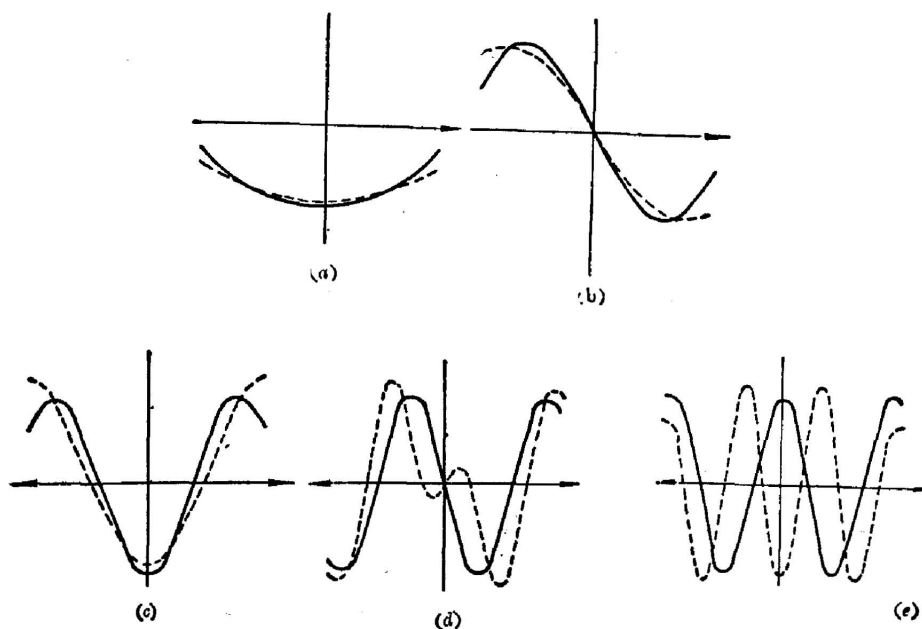


Fig. 3 First five eigenfunctions for $\delta/\lambda=0$ and 3.0; $\delta/\lambda=0$: solid line; $\delta/\lambda=3.0$: dotted line

参 考 文 献

- [1] G. Toraldo di Francia; *J. Opt. Soc. Am.*, 1969, **59**, No. 7 (Jul), 799.
- [2] M. Bendinelli *et al.*; *J. Opt. Soc. Am.*, 1974, **64**, No. 11 (Nov), 1498.
- [3] A. I. Deryugina, I. A. Deryugin *et al.*; *Opt. Spectrosc. (USSR)*, 1982, **53**, No. 5 (Nov), 863.
- [4] F. J. Song *et al.*; *ICO-13 Conference Digest* (Published by the Organizing Committee of ICO-13, Sapporo, 1984), 482.
- [5] 宋菲君, 张涛; 《仪器仪表学报》 1985, **IV**, No. 2 (May), 216.
- [6] M. Bertero, P. Boccacci *et al.*, *Optica Acta*, 1982, **29**, No. 12 (Dec), 1599.
- [7] M. Betero, E. R. Pike; *Optica Acta*, 1982, **29**, No. 6 (Jun), 727.
- [8] J. W. Goodman; *Introduction to Fourier Optics*, (McGraw-Hill Book Company, New York, 1968), 19.
- [9] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик; *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, (Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1971), 434.
- [10] F. W. 拜伦, R. W. 富勒; 《物理学中的数学方法》, (科学出版社, 北京, 1982), 598.

Spectrum of imaging integral operator of finite domain in the Hilbert space

SONG FEIJUN

(Beijing Information-Optics Instruments Institute)

TAO ZHANG

(Department of Physics, Stanford University, USA);

(Received 3 October 1986; revised 20 February 1987)

Abstract

The eigenvalues and eigenfunctions of the imaging integral operator of finite domain in the Hilbert space are studied in detail in this paper. The authors focus attention on the case of any asymmetrical kernels. The perturbation and finite rank methods are used to inverse the operator equations to obtain the eigenvalues and eigenfunctions for the defocusing systems.

Key Words: Finite domain in Hilbert space; Spectrum of imaging integral operator.