

# 一维和二维傅里叶谱相位测量

徐克琦 计荣才 章志鸣  
(复旦大学物理系)

## 提 要

我们利用正交偏振方法将傅里叶谱的实部和虚部分开,从而测定了一维和二维傅里叶谱的相位。文中报道了位移狭缝和位移方孔傅里叶谱相位的测量结果,它们与用位移量计算出的相位值符合很好,因此证实了该方法的可靠性。在此基础上我们还考察了其它二维二进制图形傅里叶谱的实部和虚部。

关键词: 傅里叶谱。

## 一、引 言

在光学测量中,直接可测的量是光强。它是光场振幅模的平方。因此光场的相位在测量中是被丢失的信息。但它又是一种重要的信息。光学相位在光学逆散射研究和光源反演中扮演了重要角色,因此在材料结构研究、物体三维显示和天文星体探测中具有重要作用。国际上很多科学家致力于相位恢复的工作<sup>[1~3]</sup>。他们大多以理论计算作相位恢复并介决了不少问题。我们试图用实验直接测定傅里叶谱的相位。

## 二、一维傅里叶谱相位测量

对于一个实的非对称物函数  $f(x)$ , 它的傅里叶谱是空间频率  $f_x$  的复函数。要用实验直接测定其傅里叶谱的相位。先制作一个镜式对称的新函数  $f'(x)$ ;

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) & x \geq 0, \\ &= f(-x) & x \leq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

然后让  $f(x)$  和它的对称物  $f(-x)$  处于彼此正交的偏振态中,例如以沿  $x$  轴的线偏振光照明  $f(x)$ , 而  $f(-x)$  被沿  $y$  轴的线偏振光照明,这样,对称函数  $f'(x)$  可以写成矢量形式:

$$g(x) = \mathbf{i}f(x) + \mathbf{j}f(-x). \quad (2)$$

这里  $\mathbf{i}$  和  $\mathbf{j}$  代表沿  $x$  轴和  $y$  轴的单位矢量。把  $g(x)$  作为相干光信息处理系统的输入函数, (构成这个输入函数的过程见图1) 它的傅里叶变换为:

$$\begin{aligned} G(f_x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-2\pi i f_x x} dx \\ &= (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos 2\pi f_x x dx - \mathbf{j}(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin 2\pi f_x x dx. \end{aligned} \quad (3)$$

显然(3)式右边第一项是物函数  $f(x)$  傅里叶变换的实部,  $(\mathbf{i} + \mathbf{j})$  代表沿与  $x$  轴成  $45^\circ$  角的

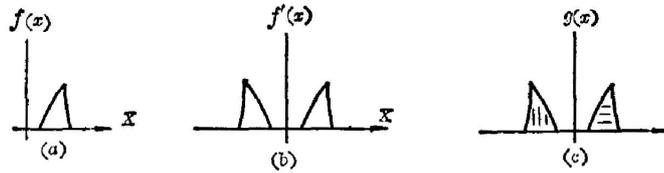


Fig. 1 (a) One dimensional asymmetrical object function. (b) symmetrical function formed from (a). (c) symmetrical function in (b) but under orthogonal linear polarization states.

线偏振光。第二项是物函数  $f(x)$  傅里叶变换的虚部,  $(i-j)$  代表与  $x$  轴成  $135^\circ$  的线偏振光。由于  $f(x)$  的傅里叶变换的实部和虚部偏振态彼此正交, 因此我们用偏振分析器很容易将它们分开, 从而分别可以测到傅里叶谱实部和虚部的光强分布:

$$I_r(f_x) = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos 2\pi f_x x dx \right]^2, \tag{4}$$

$$I_i(f_x) = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin 2\pi f_x x dx \right]^2. \tag{5}$$

因此物函数  $f(x)$  傅里叶谱的相位为:

$$\theta(f_x) = \tan^{-1} \left[ \frac{\pm \sqrt{I_i(f_x)}}{\pm \sqrt{I_r(f_x)}} \right]. \tag{6}$$

后面我们将讨论如何决定(6)式中分子分母的符号, 一旦决定了分子分母的正负就可唯一确定傅里叶平面的相位。

图 2 是用来测量傅里叶谱相位的最简单的光学系统, 它是一个具有两个正交偏振通道的相干光信息处理系统。图 2 中傅里叶变换透镜  $L$  的前焦面上有一个液门, 它包含一个振幅透过率正比于  $f'(x)$  的函数及两片透射面相互正交的偏振片, 其透射面一个在  $x$  轴方向, 一个在  $y$  轴方向。在  $L$  的后焦面前有一个偏振分析器, 相继将它的透射面旋转到  $45^\circ$  和  $135^\circ$  可以分别测到原物函数傅里叶谱的实部和虚部的强度分布。然后用一根一头通向光电倍增管的光纤在  $L$  的后焦面上扫描, 并用记录仪或数字电压来记录所测得的光强分布。

为了验证该方法的可靠性, 取一个偏振透过率如图 3(a) 所示的中心偏离光轴的狭缝作

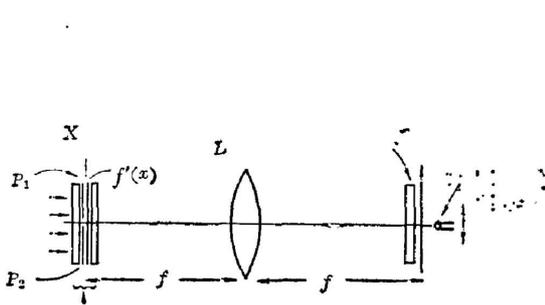


Fig. 2 The optical system with orthogonal linear polarization channels

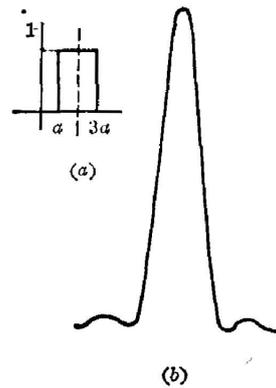


Fig. 3 (a) A shifted slitas an object. (b) The Fourier spectrum intensity] distribution of the object function in (a).

为物函数, 狭缝的宽度为  $2a$ , 它的中心对光轴的偏离也是  $2a$ , 其振幅透过率可表示为:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq 3a, \\ 0 & x \text{ 为其它值。} \end{cases} \quad (7)$$

它的傅里叶变换是

$$F(f_x) = 2a \operatorname{sinc}(2\pi a f_x) e^{-j2\pi \cdot 2a f_x} \quad (8)$$

一般, 只能测到它的功率谱, 相位因子  $e^{-j2\pi \cdot 2a f_x}$  将被丢掉, 不管狭缝中心偏离光轴多少距离, 我们得到的强度分布如图 3(b) 所示:

$$I(f_x) = [2a \operatorname{sinc}(2\pi a f_x)]^2. \quad (9)$$

现在采用我们的办法, 如图 5(a) 构成系统的输入函数:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq 3a & \text{用沿 } x \text{ 方向的线偏光照明,} \\ -1 & -a \geq x \geq -3a & \text{用沿 } y \text{ 方向的线偏光照明,} \\ 0 & x \text{ 为其它值。} \end{cases}$$

相继将偏振分析器放在与  $x$  轴夹  $45^\circ$  和  $135^\circ$  的位置, 可分别测得傅里叶谱的实部和虚部光强分布:

$$I_r(f_x) = [2a \operatorname{sinc}(2\pi f_x a) \cos 4\pi f_x a]^2, \quad (10)$$

$$I_i(f_x) = [2a \operatorname{sinc}(2\pi f_x a) \sin 4\pi f_x a]^2. \quad (11)$$

图 4 中的 (a)、(b)、(c) 对应于狭缝傅里叶谱以及它的实部和虚部的强度分布, 这组曲线是用光学多道分析器测得的。图 4 中的 (d)、(e)、(f) 是在傅里叶平面拍到的傅里叶谱和它的实部、虚部的强度照片。

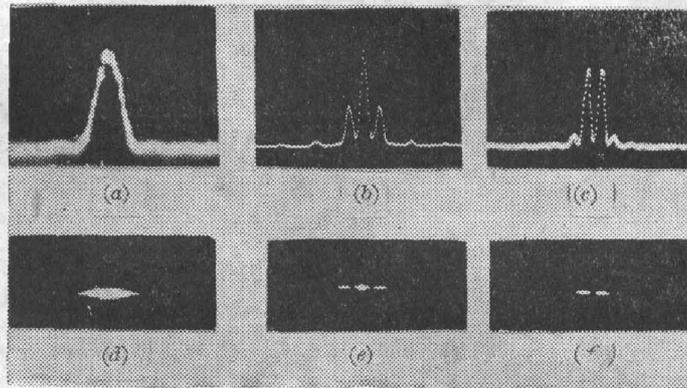


Fig. 4 The intensity distributions and the intensity patterns of the Fourier transform for the shifted slit

图 5 的曲线是在傅里叶平面采用光纤、光电倍增管和记录仪测到的实部和虚部的强度分布曲线, 利用这些强度数据和 (6) 式可以得到位移狭缝在不同空间频率处傅里叶谱相位的测量值。这些相位数值也可以由已知的狭缝的位移量  $2a$  来计算。在图 6 中将相位测量值 (十用字叉表示) 和计算值 (用实线表示) 作了比较, 从图中可以看到, 两者符合较好。从实验数据计算相位值时, 必须确定 (6) 式中分子分母的符号。图 5 标出了实部和虚部振幅的正负

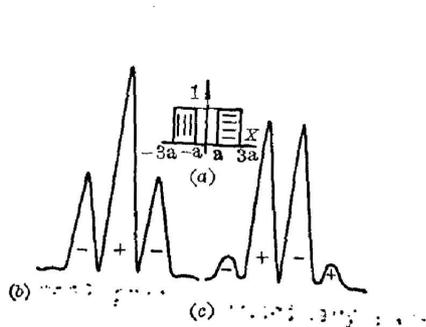


Fig. 5 The intensity distributions of the real and imaginary parts for the Fourier spectrum of a shifted slit

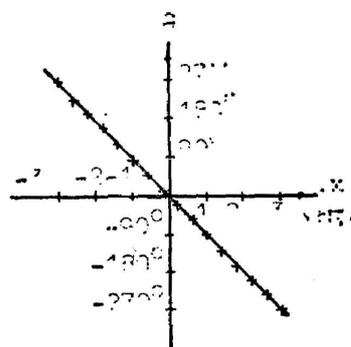


Fig. 6 The phase values of Fourier spectrum obtained by measuring and calculation for shifted slit

范围。对于实际的物函数，它们总是定义在一定区域，假设它们定义在区域 $(a, b)$ 中，按照(3)式，傅里叶谱实部和虚部的振幅为：

$$A_r(f_x) = \int f(x) \cos 2\pi f_x x dx, \quad (12)$$

$$A_i(f_x) = - \int f(x) \sin 2\pi f_x x dx. \quad (13)$$

在图1中我们将 $f(x)$ 定义在 $a, b$ 均大于零的区域，因此对于正的实函数 $f(x)$ ，当满足

$$0 < f_x x < \frac{1}{2}$$

时，也就是 $f_x$ 在稍大于零的区域，按(13)式， $A_i(f_x)$ 为负，然后 $A_i(f_x)$ 通过零点后将改变符号，按此，可确定(6)式中分子的符号。同理，在频率平面中心 $A_r(f_x) > 0$ ， $A_r(f_x)$ 过零点改变符号，因此(6)式中分母的符号也可确定，因而在我们的实验中相位的数值可以唯一地确定。

### 三、测量二维函数傅里叶谱的相位

对于一个振幅透过率为 $f(x, y)$ 的二维非对称实函数，我们可以构成一个对坐标原点对称的新函数：

$$\begin{aligned} f'(x, y) &= f(x, y) & x > 0, y > 0, \\ &= 0 & x < 0, y > 0, \\ &= f(-x, -y) & x < 0, y < 0, \\ &= 0 & x > 0, y < 0. \end{aligned} \quad (14)$$

然后让 $f(x, y)$ 和它的对称物 $f(-x, -y)$ 处于彼此正交的偏振态中，例如以 $x$ 方向和 $y$ 方向的线偏振光分别照明它们，可以得到系统的输入函数，这一过程表示在图7中， $g(x, y)$ 及其傅氏变换为

$$g(x, y) = if(x, y) + jf(-x, -y), \quad (15)$$

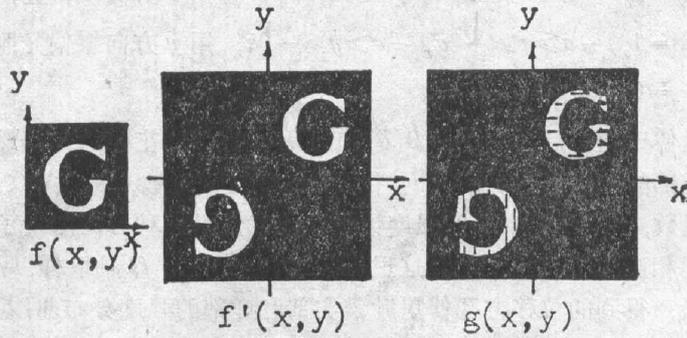


Fig. 7 The procedures formed an input function from a two dimensional object function for Fourier phase measuring.

$$\begin{aligned}
 G(f_x, f_y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \exp[-2\pi j(f_x x + f_y y)] dx dy \\
 &= (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cos 2\pi(f_x x + f_y y) dx dy - j(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \\
 &\quad \times \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \sin 2\pi(f_x x + f_y y) dx dy. \tag{16}
 \end{aligned}$$

式(16)中傅里叶谱的实部和虚部偏振态也是彼此正交的，因此可以将它们分离而测出它们的强度分布  $I_r(f_x, f_y)$ ,  $I_i(f_x, f_y)$ ，频率空间各点的相位为：

$$\theta(f_x, f_y) = \tan^{-1} \left[ \frac{\pm \sqrt{I_i(f_x, f_y)}}{\pm \sqrt{I_r(f_x, f_y)}} \right]. \tag{17}$$

为了检验这一方法对二维傅里叶相位测定的实用性，我们也取一个中心在  $x=2a$ ,  $y=2a$  的方孔作为物函数来验证，它的振幅透过率为：

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= 1 \quad a \leq x \leq 3a, \quad a \leq y \leq 3a, \\
 &= 0 \quad x, y \text{ 为其它值.} \tag{18}
 \end{aligned}$$

它的傅里叶变换为：

$$F(f_x, f_y) = 4a^2 \sin c 2\pi f_x a \sin c 2\pi f_y a e^{-2\pi j(2af_x + 2af_y)}. \tag{19}$$

同样，在一般测量中，式(19)中的相位因子将失去而得到图 9(a)中的强度花样，现按图 8 的过程将物函数位移方孔变成系统的输入函数：

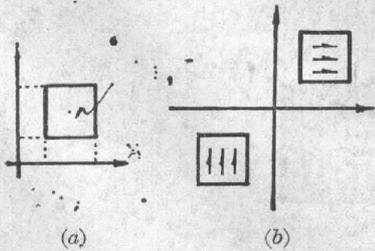


Fig. 8 (a) A shifted square as an object. (b) The input function formed from (a)

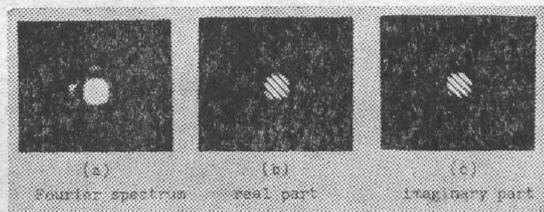


Fig. 9 The intensity patterns of the Fourier spectrum and the real part, imaginary part for a shifted square

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= 1, & a \leq x \leq 3a, & a \leq y \leq 3a, & \text{用 } x \text{ 方向线偏光照明,} \\
 &= 1, & -a \geq x \geq -3a, & -a \geq y \geq -3a, & \text{用 } y \text{ 方向线偏光照明,} \\
 &= 0 & x, y \text{ 为其它值.} & & (20)
 \end{aligned}$$

这个输入函数经过傅氏变换后得到了图 9(b)和图 9(c)的强度花样,它们分别是位移方孔傅氏变换的实部和虚部的强度照片。图 9(b)中条纹的数目为奇数,中央条纹强度最大,而图 9(c)中条纹数为偶数,频率平面中心的强度为极小。我们沿各种方向测量了图 9(b)和(c)的强度分布并得到了相应的相位测量值。这里仅举二例:一是沿  $f_x$  轴取样,另一个沿  $f_x$  为某一常数的方向测量,得到的位移方孔傅里叶谱实部和虚部的强度分布曲线及相位测量值分别表示在图 10 和图 11 中,相位图中十字叉丝表示相位的测量值,而实线是用方孔中心的位移量计算出来的相位值。比较两者,仍然符合得很好,因此证实了这一方法对二维傅里叶相位测量也是实用的。

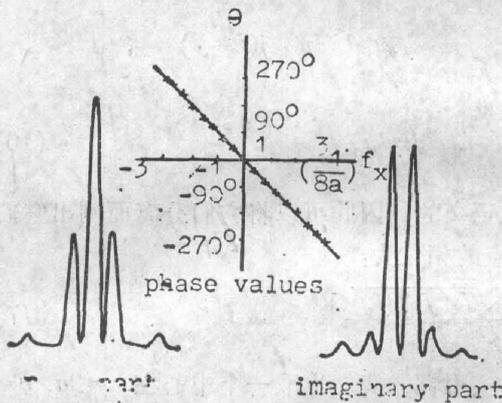


Fig. 10 The intensity distributions of the real and imaginary parts of Fourier spectrum and the Fourier phase function measured along  $f_x$ -axis for shifted square

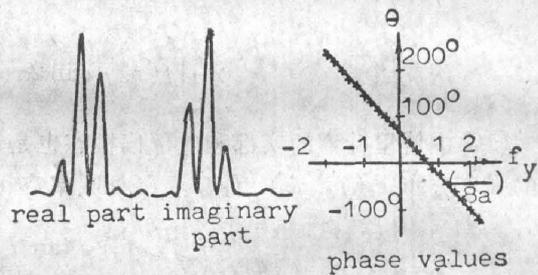


Fig. 11 The intensity distributions of the real and imaginary parts of Fourier spectrum and the Fourier phase function sampled as  $f_x = -0.36 \text{ mm}^{-1}$  for the shifted square

我们对其它二维二进制图形傅里叶谱的实部和虚部进行了考察。例如图 12 是字母“f”的傅里叶谱及其实部和虚部的强度花样。图 13 和图 14 是沿  $f_x$  和  $f_y$  轴测量到的实部和虚部的强度分布。

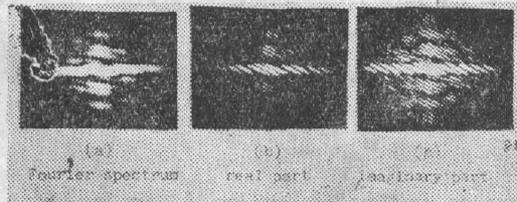


Fig. 12 The intensity patterns of the Fourier spectrum and its real part, imaginary part for a letter “f”

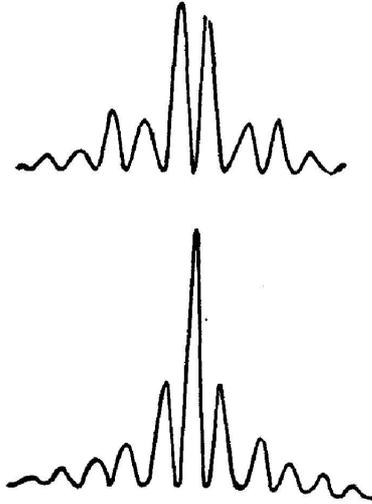


Fig. 13 The intensity distributions of the imaginary and real parts of Fourier spectrum measured along  $f_x$ -axis for letter "f"

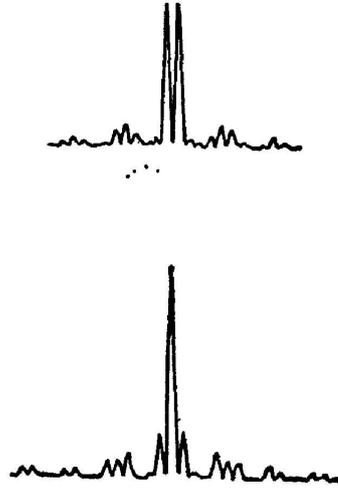


Fig. 14 The intensity distributions of the imaginary and real parts of Fourier spectrum sampled along  $f_y$  for letter "f"

#### 四、讨 论

我们首先考察傅里叶谱实部和虚部在空间频率为零时的数值,从(3)式和(16)式,我们可以看到不论是一维或二维问题,在频率平面的中心,傅里叶谱的实部具有极大值,因此图4(e)、图9(b)、图12(b)的中心强度最大。同样,从(3)和(16)式可知傅里叶谱的虚部在频率平面中心数值为零,因此图4(f)、图9(c)、图12(c)的中心为暗区。正因为频率零点处虚部数值为零,所以此点傅里叶谱的相位为零。

在二维问题中,只要物函数是定义在一有限区域(假设这个区域为  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ ),那么它的傅里叶谱是解析函数,这意味着傅里叶谱的实部和虚部是可微的和连续的,由于实部和虚部的连续性,因此它们的零点将是各自振幅正负值之间的交界点。从(16)式,并考虑到  $f(x, y)$  的上下界,二维傅里叶谱的实部和虚部的振幅分别为:

$$A_r(f_x, f_y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \cos 2\pi(f_x x + f_y y) dx dy, \quad (20)$$

$$A_i(f_x, f_y) = - \int_a^b \int_c^d f(x, y) \sin 2\pi(f_x x + f_y y) dx dy. \quad (21)$$

对于正的实的物函数  $f(x, y)$ , 当  $f_x = f_y = 0$  时,  $A_r(f_x, f_y) > 0$ , 因此实部振幅在通过频率中心的条纹中为正, [见图9(b)、12(b)], 跳过一个暗区, 振幅的符号改变, 由此可决定(17)式中分母的符号。

图7中我们将二维物函数定义在第一象限, 因此(21)式中  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  均大于零, 对于正的物函数, 当满足

$$0 < f_x x + f_y y < \frac{1}{2}$$

时,  $A_i(f_x, f_y) < 0$ , 满足这个条件的点处于频率零点的右上方(见图 9(c)、12(c)), 然后条纹跳过一个暗区, 振幅改变一次符号, 这样可以确定(17)中分子的符号。因此二维傅里叶谱的相位也可唯一确定。

### 参 考 文 献

- [1] H. A. Ferwerda; «*Inverse source problem in optics*», H. P. Baltes, ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1978) Chap. 2
- [2] G. Ross, M. A. Fiddy *et al.*; «*Inverse scattering problems in optics*» H. P. Baltes, ed (Springer-Verlag, Berlin, 1980)
- [3] J. R. Fienup; *Appl. Opt.*, 1982, **21**, No. 15 (Aug), 2758.
- [4] Xu Ke-shu, Ji Rong-cai *et al.*; *Optics Communications*, 1984, **50**, No. 2(May), 85.

## Measurement of phase functions of 1-D and 2-D Fourier spectra

XU KESHU, JI RONGCAI AND ZHANG ZHIMING

(*Department of Physics, Fudan University, Shanghai*)

(Received 5 December 1986; revised 20 February 1987)

### Abstract

By using a coherent optical information processing system with two orthogonal polarization channels we have measured the Fourier phases experimentally for one and two dimensional real objects. For a shifted slit and a shifted square, the Fourier phase values measured by experiment are in agreement with the calculated phase values quite well. Another object is a binary alphabet, the real and imaginary part of its Fourier spectrum has been investigated.

**Key Words:** Fourier spectrum.