

# 激光散斑复合错位干涉图 频谱的统计分析

张朝晖 姬婉华 徐绪笃  
(西北工业大学应用物理系)

## 提 要

本文对一般复合错位照相系统,在诸错位像的记录孔径互不重叠的条件下所拍摄的散斑图,运用统计分析的分法,讨论了频谱强度的统计分布及其特性。特别对各基谱成份及谱域周界的分布,给予了较多的关心,并给出了几种典型情况的实验验证。文中的结论,对于改进滤波器的设计和滤波操作以及复合错位照相系统的孔径设计等方面,将是有益的。

## 一、引 言

在激光散斑错位干涉术中,傅里叶空间频率滤波是提取等值条纹的有效方法。Hung<sup>[1,2]</sup>等曾用几种散斑错位照相装置拍摄了物体变形的散斑错位干涉图,并且对这些散斑图的频谱分布及所用滤波器的大致形状作了定性说明。何毓宁指出了 Hung 的理论缺陷<sup>[3]</sup>,并就单劈错位镜情形,分析了散斑错位干涉图的频谱成分,提出了设计最佳滤波器的想法。但这种分析方法不便于散斑复合错位干涉。本文运用统计分析的方法,在诸错位像的记录孔径互不重叠的条件下,讨论了复合错位照相系统所拍摄散斑图的频谱分布及其特性。特别着重研究了各相关基谱成分的作用以及确定谱域周界的方法,为设计最佳滤波器提供了必要的依据。文中还给出了典型情况的实验验证。

## 二、频谱强度的统计分布

实际的散斑错位照相方式以及实施象错位的装置都不尽相同。为了便于分析,本文采用 Goodman 关于成像系统的一般模型<sup>[4]</sup>。考虑  $N$  个错位像的记录孔径互不重叠的复合错位照相系统。如图 1 所示,物面上的一个点经过复合错位照相系统后,在像面上出现  $N$  个像点。故复合错位照相系统的点扩散函数为

$$\left. \begin{aligned} h(x, y; \alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^N h_i(x, y; \alpha, \beta), \\ h_i(x, y; \alpha, \beta) &= \exp \left\{ ik \left[ \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2z_p} + \frac{x^2 + y^2}{2Mz_p} \right] \right\} \iint_{-\infty}^{+\infty} P_i(X, Y) \\ &\quad \times \exp \left\{ -i2\pi \left[ \frac{\alpha - L(x - a_i)}{\lambda z_p} X + \frac{\beta - L(y - b_i)}{\lambda z_p} Y \right] \right\} dX dY, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

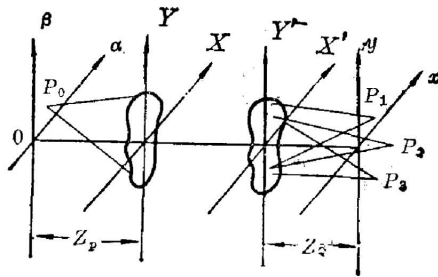


Fig. 1 Schematic diagram of the compound-shearing photographic system

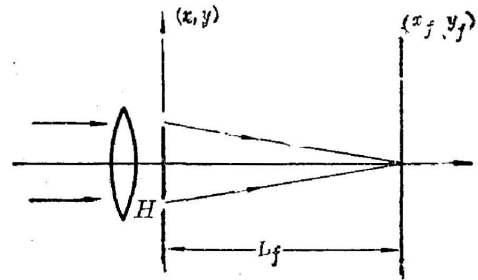


Fig. 2 Schematic illustration of the optical path for Fourier transformation

式中  $h_i(x, y; \alpha, \beta)$  是第  $i$  个错位像的点扩散函数,  $M_m$  为系统入瞳和出瞳之间的横向放大率,  $M = (z_q/z_p)$ ,  $L = (M_m/M)$ ,  $\lambda$  是记录散斑图所用的光波长, 矢量  $\{a_i, b_i\}$  为第  $i$  个错位像相对于原位像\*的位移,  $P_i(X, Y)$  为记录第  $i$  个错位像的入瞳孔径函数。由于任两个错位像的记录孔径互不重叠, 因此

$$\left. \begin{aligned} P_{i_1}(X, Y) \cdot P_{i_2}(X, Y) &= P_{i_1}(X, Y) P_{i_2}(X, Y) \delta_{i_1 i_2}, \\ \delta_{i_1 i_2} &= \begin{cases} 1, & (i_1 = i_2) \\ 0, & (i_1 \neq i_2) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

若在像面上记录物体变形前后的散斑错位干涉图, 并假定物体的变形仅引起其像光场位相的变化\*\*。则由(1)式和(2)式可得散斑图所记录的总光强为

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N g_m(x, y) g_k^*(x, y) \{1 + \exp[i\Delta_{mk}(x, y)]\}, \\ g_i(x, y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} O(\alpha, \beta) h_i(x, y; \alpha, \beta) d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

式中  $g_i(x, y)$  为第  $i$  个错位像的复振幅,  $\Delta_{mk}(x, y)$  为物体变形引起  $m, k$  两个错位像之间相对位相的变化, 它是物体表面应变的函数<sup>[1, 2]</sup>,  $O(\alpha, \beta)$  为物面光场数。

现采用图2所示的傅里叶变换光路对散斑图  $H$  进行频谱分析。

由于  $I(x, y)$  的随机性决定了散斑图频谱分布的随机性, 因此只有考虑其频谱强度  $I_G(\xi, \eta)$  的集平均  $\langle I_G(\xi, \eta) \rangle$  的空间分布, 才有实际意义。根据 Goodman 对物体表面的统计假设<sup>[5]</sup>, 在物体平缓变形(与散斑的大小比较)的条件下, 由(3)式不难求得

$$\left. \begin{aligned} \langle I(x, y) \rangle &= \text{常数}, \\ \langle I(x, y) I(x + \Delta x, y + \Delta y) \rangle &= \text{常数} + \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N P_{mm}(\Delta x, \Delta y) P_{kk}^*(\Delta x, \Delta y) |1 + \exp[i\Delta_{mk}(x, y)]|^2, \\ P_{ii}(\Delta x, \Delta y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} P_i(X, Y) \exp\left\{-i2\pi\left[\frac{L\Delta x}{\lambda z_p} X + \frac{L\Delta y}{\lambda z_p} Y\right]\right\} dX dY, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

在线性记录的条件下, 由(4)、(5)式得到散斑复合错位干涉图频谱强度的统计分布为

\* 原位像即系统不加错位装置时所成的像。

\*\* 这是通常意义下散斑错位干涉度量的先决条件, 更为一般的变形情形我们将另文讨论。

$$\begin{aligned} \langle I_G(\xi, \eta) \rangle = & c_0 \delta(\xi, \eta) + c_1 \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N P_m(X_0, Y_0) \star P_k(X_0, Y_0) \\ & \times \iint_{\sigma} \cos^2 \left[ \frac{\Delta_{mk}(x, y)}{2} \right] dx dy, \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $c_0, c_1$  为常数,  $X_0 = (\lambda z_p/L)\xi$ ,  $Y_0 = (\lambda z_p/L)\eta$ ,  $\xi = (x_f/\lambda' L_f)$ ,  $\eta = (y_f/\lambda' L_f)$ ,  $\star$  表示相关运算,  $\lambda, \lambda'$  分别为记录散斑图和傅氏变换时所用的光波波长,  $\sigma$  是散斑图上的积分区域。

### 三、频谱的统计特性

从(6)式看出,除  $\delta$  函数在谱面中心给出一个亮点外,求和项表明,频谱强度的统计分布取决于入瞳孔径的相关函数。而物体的变形仅以余弦平方因子的积分形式影响每个互相关函数数值的大小。据此,可得散斑图频谱的一些重要的统计特性如下:

(1) 散斑复合错位干涉图的频谱强度是所有“相关基谱”的线性叠加,令

$$\left. \begin{aligned} W_{mk}(\xi, \eta) &= P_m(X_0, Y_0) \star P_k(X_0, Y_0), \\ A_{mk}(\xi, \eta) &= \iint_{\sigma} \cos^2 \left[ \frac{\Delta_{mk}(x, y)}{2} \right] dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

略去  $\delta$  函数项,由(6)式得

$$\langle I_G(\xi, \eta) \rangle = \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N A_{mk} W_{mk}(\xi, \eta). \quad (8)$$

由于  $W_{mk}(\xi, \eta)$  取决于入瞳  $P_m(X, Y)$  与  $P_k(X, Y)$  的相关函数,并构成了频谱的基本成分,故可称  $W_{mk}(\xi, \eta)$  为“相关基谱”。 $A_{mk}$  是由  $\Delta_{mk}(x, y)$  的分布所确定的常数,对相关基谱  $W_{mk}(\xi, \eta)$  起加权作用。所以,散斑复合错位干涉图的频谱强度是所有相关基谱线性叠加的结果。

(2) 每一对孔径所形成的互相关基谱分量,携带一个错位方向上物体变形的应变信息;而单一孔径所形成的自相关基谱分量,则不携带此项信息。

事实上,当  $m \neq k$  时,散斑图上不同点对  $W_{mk}(\xi, \eta)$  的频谱贡献由  $\cos^2 \left[ \frac{\Delta_{mk}(x_i, y_i)}{2} \right]$  决定,并且与  $(\xi, \eta)$  无关。此时,散斑图的像将受  $\cos^2 \left[ \frac{\Delta_{mk}(x_i, y_i)}{2} \right]$  调制。但当  $m = k$  时,  $A_{mk}$  等于散斑图上的积分面积,  $W_{mk}(\xi, \eta)$  变成自相关基谱,与物体的变形无关。又由于  $A_{mk} = A_{km}$ , 所以每一对孔径  $P_m(X, Y)$  和  $P_k(X, Y)$  所形成的互相关基谱  $W_{mk}(\xi, \eta)$  和  $W_{km}(\xi, \eta)$  将携带着一个错位方向上物体变形的同一应变信息,而自相关基谱则不携带任何应变信息。

(3) 既然相关基谱  $W_{mk}(\xi, \eta)$  取决于孔径函数  $P_m(X, Y)$  与  $P_k(X, Y)$  的相关函数,并且对于确定的系统,孔径的形状都是确定的,因此每个相关基谱  $W_{mk}(\xi, \eta)$  的分布区域由相关函数  $P_m(X_0, Y_0) \star P_k(X_0, Y_0)$  唯一确定。这个区域可由相关运算推得,也可用做图法求出。如果改变记录系统各入瞳孔径的大小、形状及相对位置,就可改变各相关基谱分布区域的大小、形状及相对位置。

根据上述特性,不难获得对滤波操作具有指导意义的两点结论:

(1) 如果在一种互相关基谱( $W_{mk}$  和  $W_{km}$ )单独存在的区域开孔滤波, 可得到一种应变信息的高衬比条纹; 如果在几种互相关基谱重叠的区域开孔滤波, 将得到几种应变条纹叠加的云纹条纹; 如果在自相关基谱与互相关基谱重叠的区域开孔滤波, 则条纹的衬比将下降。

(2) 恰当设计记录系统的孔径, 可为获得单一应变信息的高衬比条纹, 提供有利的滤波条件。

### 四、谱域分布

从(6)式能够对频谱强度的统计分布作出定量分析。但对于滤波的实施, 只需要知道各相关基谱的分布区域也就够了。根据

$$W_{iis}(\xi, \eta) = \iint P_{i_1}(U, V) P_{i_2}\left(U - \frac{\lambda z_p}{L} \xi, V - \frac{\lambda z_p}{L} \eta\right) dU dV$$

可知, 若让  $P_{i_1}(U, V)$  位置不动, 将  $P_{i_2}(U, V)$  沿  $U, V$  轴分别平移  $(\lambda z_p \xi / L), (\lambda z_p \eta / L)$  使其变成  $P_{i_2}[U - (\lambda z_p / L) \xi, V - (\lambda z_p / L) \eta]$ , 然后将两者相乘再求积分, 即可求得相关基谱的分布。由于现在关心的是相关基谱的分布区域, 故只需定出两者乘积不为零的周界即可。将所有相关基谱的周界叠加在一起, 便构成了散斑图的谱域周界分布图。

设图 3 的(a)、(b)、(c)是记录系统的几种入瞳孔径, 则用上述方法得到的各谱域周界分布图依次如图 4(a)、(b)、(c)所示。图中已将  $(\xi, \eta)$  换成谱面空间坐标  $(x_f, y_f)$ , 且阴影部分表示一种互相关基谱单独存在的区域,  $R = \frac{2\lambda' L + |L|}{\lambda z_p} r_0$ 。

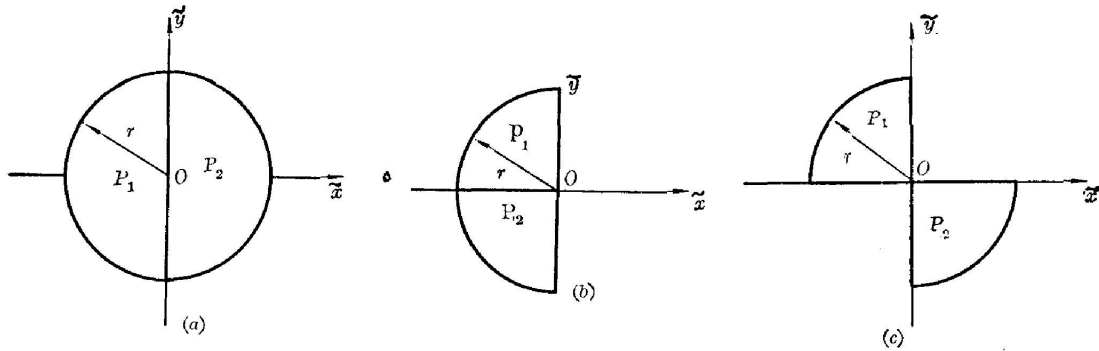


Fig. 3 Schematic diagrams of various apertures for recording specklegrams

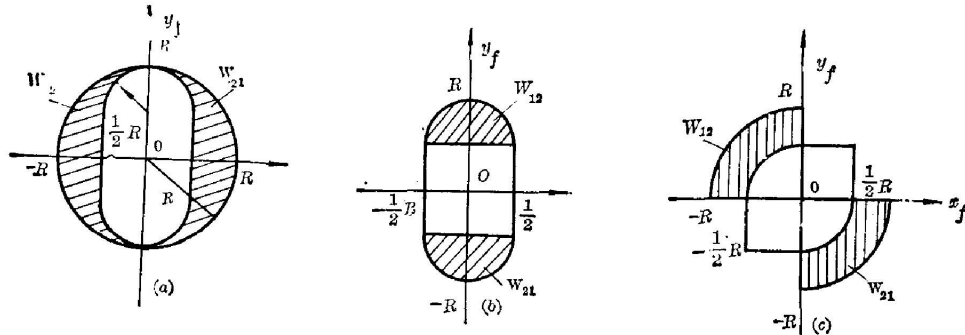


Fig. 4 Diagrams illustrating various distributions of the peripheries of spectral regions

## 五、实验验证

我们采用图 5 所示的光路拍摄散斑图, 并对本文所得到的有关结论进行了验证。在图 5 中, 透镜  $L$ 、错位镜  $S$  和孔径光阑  $P$  紧靠在一起, 待测物体是一中心加载、周边固定、直径为 4.0 cm 的金属薄圆板, 其上涂有细微粒的散射物质。采用 1:1 成像, 且

$$z_p = z_q = 40.0 \text{ cm}.$$

(1) 采用单劈错位镜实现错位, 并使错位镜与孔径光阑一起形成图 3(a)、(b)、(c) 所示的记录孔径, 且

$$2r = 4.5 \text{ cm}$$

分别拍摄物体变形前后两次曝光的散斑图。然后用图 2 的变换光路分别拍摄其谱晕, 并取  $L_f = 20.0 \text{ cm}$ , 得到的照片如图 6(a)、(b)、(c) 所示。照片上的白线是根据

$$R = (2\lambda' L_f |L| r / \lambda z_p)$$

推算得到的谱晕周界。由于“记录”和“变换”均使用的是氦-氖激光, 因此  $\lambda = \lambda'$ 。根据给出的参数容易得到  $R = r$ 。

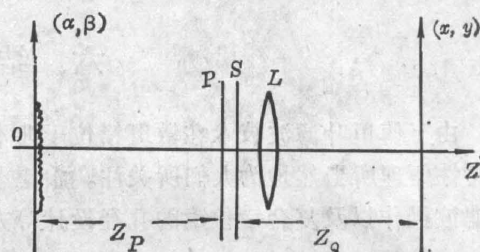


Fig. 5 Schematic illustration of the arrangement in recording specklegrams

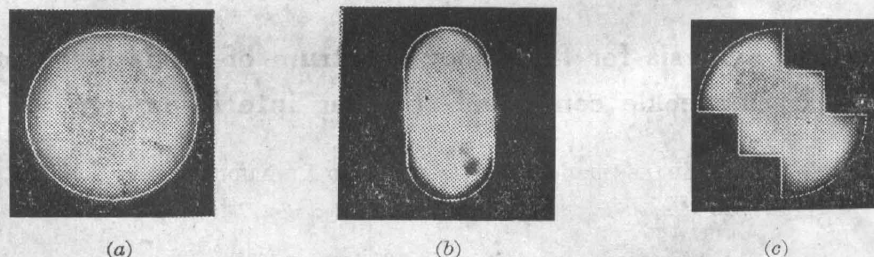


Fig. 6 Photographs of various diffraction haloes and their theoretical peripheries depicted by white curves

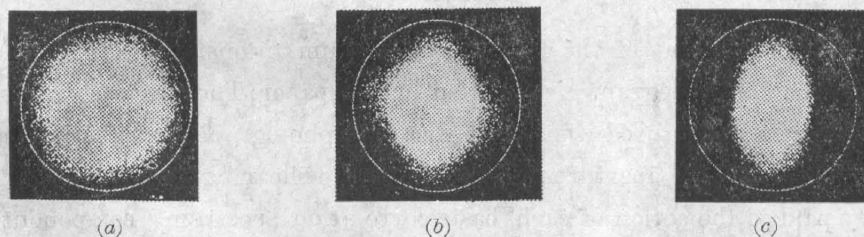


Fig. 7 Photographs revealing the variation of basic crosscorrelation spectra with the squared-cosine factor (the white curve representing the largest theoretical periphery)

### (2) 频谱成分

用一细激光束对散斑图进行扫描, 并用观察屏接收其衍射晕, 可观察到散斑图上不同点的衍射晕是不同的。图 7(a)、(b)、(c) 是激光束在用图 3(a) 的孔径记录的散斑图上扫描时, 显示出互相关基谱受到  $\cos^2[A_{12}(x, y)/2]$  调制的三张衍射晕照片。图 7(a) 表明互相关基

谱  $W_{12}$  和  $W_{21}$  最强,  $(\cos^2[\Delta_{12}(x, y)/2] \approx 1)$ ; 图 7(b) 表明  $W_{12}$  和  $W_{21}$  减弱  $(\cos^2[\Delta_{12}(x, y)/2] < 1)$ ; 图 7(c) 则表明  $W_{12}$  和  $W_{21}$  基本消失  $(\cos^2[\Delta_{12}(x, y)/2] = 0)$ , 只剩下自相关基谱  $W_{11}$  和  $W_{22}$ 。当激光束在用图 3(b)、(c) 所示的记录孔径记录的散斑图上扫描时, 也得到了类似的结果。

## 六、结 束 语

由于傅里叶滤波技术在散斑错位干涉术中的重要作用, 散斑错位干涉图的频谱分布及其特性便理所当然地为人们所关注。希望本文给出的分析及有关结论能在改进滤波器设计和滤波操作以及复合错位镜的孔径设计等方面产生积极的影响。

### 参 考 文 献

- [1] Y. Y. Hung, C. Y. Liang; *Appl. Opt.*, 1979, **18**, No. 7 (Apr), 1046~1050.
- [2] Y. Y. Hung, A. J. Durelli; *J. Strain Analy.*, 1979, **14**, No. 3 (Jul), 81~88.
- [3] 何毓宁; 《光学学报》, 1985, **5**, No. 3 (Mar), 241~246.
- [4] J. W. Goodman; 《傅里叶光学导论》, (科学出版社, 北京, 1979), 115~120.
- [5] J. W. Goodman; 《激光散斑及有关现象》, (J. C. Dainty 主编, 科学出版社, 北京, 1981), 第二章。

## Statistical analysis for frequency spectrum of a specklegram in laser-speckle compound-shearing interferometry

ZHANG ZHAOHUI, JI WANHUA AND XU XUDU

(Department of Applied Physics, Northwestern Polytechnical University, Xian)

(Received 9 July 1986; revised 27 January 1987)

### Abstract

A statistical treatment of the frequency spectrum intensity distribution and its characteristics of a specklegram is presented in this paper. The specklegram is assumed to be taken by a generalized compound-shearing photographic system without any cross overlap between the apertures at recording the shearing images. Attentions are particularly paid to the action of each "basic correlation spectrum" component and to the peripheral distribution of each spectral region. Typical experimental verifications are given. Results shown in this paper may be beneficial to the improvement in the filter design, the filtering operation, and the design of aperture in a compound-shearing photographic system.