

# 等效电流方法计算单模光纤 的辐射损耗

王子华  
(上海科学技术大学)

## 提 要

本文将无源的不规则波导看作有源的理想波导,求等效极化电流电场,直接得到单一光波导模间耦合和辐射损耗问题的解。用这个方法计算了阶跃单模光纤折射率轴向不均匀变化的损耗。这种方法完全脱离了耦合波的概念,它不但物理意义明确,而且求解问题的方法简洁。最后以单模光纤弯曲和微弯损耗为例,说明等效电流方法还适用于广义耦合波理论才能求解的问题。

关键词: 单模光纤, 辐射损耗。

## 一 引 言

等效电流方法即文献[1]中的激发概念,在微波理论中很好地解决了金属波导问题。吴彝尊<sup>[2]</sup>提出用等效电流理论计算耦合系数,并求得耦合波方程。他用此理论求解了平面光波导之间的横向耦合问题。在此基础上,本文将无源的不规则波导看作有源的理想波导,用洛仑兹原理求等效极化电流的电场,直接得到单一波导模间耦合问题和光波导辐射损耗问题的解。本文方法完全脱离了耦合波的概念<sup>[3,4]</sup>,其物理概念明确,公式推导简洁。

作为本文方法的一个应用,我们计算了阶跃单模光纤折射率轴向不均匀变化的辐射损耗,这对单模光纤的设计和工艺是十分有意义的。最后以单模光纤微弯损耗为例,说明本方法同样适用只能以广义的耦合波理论<sup>[5,6]</sup>求解的问题。

## 二、等效电流方法

光波导折射率分布  $N(z)$  如图 1 实线所示,其电磁场满足麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = i\omega N^2\epsilon_0\mathbf{E}, \quad (1)$$

式中  $\mathbf{E}$  为电场强度矢量,  $\mathbf{H}$  为磁场强度矢量,  $\omega$  为频率,  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  为真空介电常数和导磁率。选取一个无边界畸变,折射率无轴向变化的理想波导如图 1 虚线所示,其电磁场为一组理想模式

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{e}_n(x, y)\exp(-i\beta_n z), \quad \mathbf{H}_n = \mathbf{h}_n(x, y)\exp(-i\beta_n z), \quad (2)$$

$\mathbf{E}_n$  和  $\mathbf{H}_n$  为(1)式中  $N^2(z)$  换成  $n^2$  时的解,  $x, y, z$  为空间坐标,下标  $n$  为模式序号,  $n$  为正(负)代表正(负)  $z$  方向传播的模,  $\mathbf{e}_n$  和  $\mathbf{h}_n$  为电场和磁场的矢量模式函数,  $\beta_n$  为传播常数

且有

$$\beta_{-n} = -\beta_n, \mathbf{h}_{-n} = -\mathbf{h}_{nt} + \mathbf{h}_{nz}, \mathbf{e}_{-n} = \mathbf{e}_{nt} - \mathbf{e}_{nz} \quad (3)$$

下标  $t$  和  $z$  分别表示横向和纵向分量。对于离散谱的导行模, 其正交归一关系为

$$\frac{1}{2} \iint_S (\mathbf{e}_{nt} \times \mathbf{h}_{mt}) \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 1, & (m=n), \\ 0 & (m \neq n), \end{cases} \quad (4)$$

式中积分区域为无穷大横截面  $S$ 。将(1)式改写成

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega n^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{J}, \quad (5)$$

$$\mathbf{J} = i\omega(N^2 - n^2)\varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (6)$$

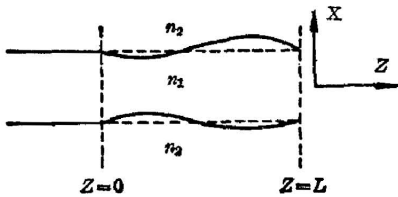


Fig. 1 Non-ideal optical waveguide with index profile  $\tilde{n}(z)$  (solid line) and ideal optical waveguide with index profile  $n$  (dashed lines)

这样就把图 1 实线所示微扰系统无源场等效成图 1 虚线所示理想系统有源场, 这个源就是实际折射率与理想波导折射率差所产生的极化电流。

由于理想模的完备性, 使得  $\mathbf{E}$  可表示为理想波导模的迭加, 对于  $N$  有轴向变化的微扰系统由文献 [4] 得轴向坐标  $z$  处

$$\mathbf{E}(z) = \sum_n a_n(z) \left[ \mathbf{e}_{nt} + \frac{N^2(z)}{n^2} \mathbf{e}_{nz} \right] \exp(-i\beta_n z), \quad (7)$$

求和号也包括对连续谱辐射模的积分。每一个电场模式产生极化电流

$$\mathbf{J}_n(z) = i\omega(N^2 - n^2)\varepsilon_0 a_n(z) \left[ \mathbf{e}_{nt} + \frac{N^2(z)}{n^2} \mathbf{e}_{nz} \right] \exp(-i\beta_n z). \quad (8)$$

假定在  $z=0$  处开始有折射率微扰, 经过一段距离  $L$  的有源理想波导传输后, 极化电流激发的各理想模的幅度由洛伦兹互易原理求得<sup>[7]</sup>

$$b_{nm} = \frac{1}{4} \int_0^L \iint_S \mathbf{J}_n \cdot \mathbf{E}_{-m} dS dz, \quad (9)$$

式中  $b_{nm}$  表示由  $\mathbf{J}_n$  激发的第  $m$  个理想模在  $z=L$  处的幅度(当  $z=0$  时,  $b_{nm}=0$ )。(9) 式就是第  $n$  个模与第  $m$  个模的耦合公式。

对于辐射模, 传播常数为连续谱, 只能用横向传播常数  $\rho$  兼作模式序号, 不同的  $\rho$  就代表不同的辐射模。每一个辐射模的功率为  $|b_{n\rho}|^2$ , 那么极化电流所激发的辐射模功率总和为

$$P_r = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} |b_{n\rho}|^2 d\rho, \quad (10)$$

辐射模所携带的功率被认为损耗了。由此可求光波导不均匀微扰的辐射损耗。功率损耗系数为单位长度上辐射功率与总功率之比<sup>[3]</sup>, 即

$$2\alpha = \left( \frac{P_r}{\sum_n |a_n|^2 L} \right) = \frac{P_r}{L}, \quad (11)$$

式中已将总功率归一, 且近似认为辐射损耗后总功率还是 1。

用等效电流方法解模间耦合及边界畸变产生的辐射损耗与 Marcuse 的结果一致, 但本文的方法简洁, 物理概念明确。

### 三、阶跃单模光纤折射率轴向不均匀的损耗

在用 MCVD 法制造阶跃单模光纤的过程中, 纤芯只沉积一到二层, 车床转速及火距移动的快慢、火焰温度的变化以及拉丝速度都会产生纤芯折射率的周期性轴向变化或甚至是随机的变化。我们用等效电流方法来计算其辐射损耗。

设实际单模光纤折射率分布为

$$n^2(z) = \begin{cases} n_1^2 + f(z), & (r \leq a), \\ n_2^2, & (r > a), \end{cases} \quad (12)$$

式中  $a$  为纤芯半径,  $f(z)$  表示随  $z$  的微小变化。取理想单模光纤的纤芯折射率为  $n_1$ ,  $f(z)$  作为微扰。由于单模光纤是弱导的, 电场轴向分量可以忽略, 并假定传输  $y$  方向极化的  $LP_{01}$  模, 由文献[3]的式(2.2-21)纤芯内的场为

$$\left. \begin{aligned} E_y &= AJ_0(Ur/a) \exp[-iX_0z/a], & (r \leq a), \\ A &= [2\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} W^2 / \pi a^4 n(n_1^2 - n_2^2) k^2 J_1^2(U)]^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$A$  为归一化常数,  $X_0 = \beta_0 a$  为传播常数,  $v = [(kn_1 a)^2 - X_0^2]^{1/2}$ ,  $W = [X_0^2 - (kn_2 a)^2]^{1/2}$  分别为纤芯和包层的横向传播常数,  $k = \omega_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ,  $J_0$  表示零阶贝塞尔函数。由于实际光纤与理想光纤包层折射率相同, 极化电流只存在于纤芯内部, 并与  $LP_{01}$  模电场同方向

$$J_y = \begin{cases} i\omega \epsilon_0 f(z) AJ_0(Ur/a) \exp(-iX_0z/a), & (r \leq a) \\ 0, & (r > a) \end{cases} \quad (14)$$

根据  $J_y$  的对称性, 它仅激发  $y$  极化且无周向变化的辐射模  $LP_{0e}$ , 取文献[3]中式(2.4-7)所示,  $LP_{0e}$  模纤芯内的电场为

$$\left. \begin{aligned} E_{0ey} &= BJ_0(Sr/a) \exp(-iX_0z/a), & (r \leq a) \\ B &= [\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} 8Q / 2n\pi^3 a |QJ_0(S)H_1^{(1)}(Q) - SJ_1(S)H_0^{(1)}(Q)|^2]^{1/2}, \\ S &= \sigma a = [(kn_1 a)^2 - X^2]^{1/2}, & Q = \rho a = [(kn_2 a)^2 - X^2]^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中  $S$  为辐射模的纤芯和  $Q$  为包层横向传播常数,  $X = \beta a$  为传播常数,  $H_1^{(1)}$  和  $H_0^{(1)}$  表示一和零阶第一类汉克尔函数。将(14)式和(15)式代入(9)式、(10)式和(11)式, 算出对横截面积分后得

$$2\alpha = \int_{-n_2ka}^{n_1ka} \frac{2W [SJ_0(U)J_1(S) - UJ_0(S)J_1(U)]^2 |X| \cdot |F(X_0 - X)|^2 dx}{\pi^2 a^2 n^2 (n_1^2 - n_2^2) J_1^2(U) |QJ_0(S)H_1^{(1)}(Q) - SJ_1(S)H_0^{(1)}(Q)|^2 (S^2 - U^2)^2}, \quad (16)$$

式中已用  $d\rho = |X| (dX/aQ)$  将  $\rho$  的积分变换成对  $x$  的积分, 积分限表示迅衰模不携带功率, 只对传播的辐射模积分, 且

$$F(X_0 - X) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L f(z) \exp[-i(X_0 - X)z/a] \quad (17)$$

为微扰函数的傅里叶变换。

讨论

#### 1. 纤芯折射率正弦变化

单模光纤制造过程中最容易产生的不均匀是周期性的, 任何周期性变化都可以分解为

正弦变化之和, 因此计算折射率正弦变化单模光纤的损耗。设微扰函数为

$$f(z) = b \sin \theta z, \tag{18}$$

将(18)式代入(17)式和(16)式, 利用文献[3]中式(4.2-24)化简后得

$$\frac{2\alpha a}{b^2} = \frac{W^2 [S_1 J_0(U) J_1(S_1) - U J_0(S_1) J_1(U)]^2 |X_1|}{\pi n^2 (n_1^2 - n_2^2) J_1^2(U) |Q_1 J_0(S_1) H_1^{(1)}(Q_1) - S_1 J_1(S_1) H_0^{(1)}(Q_1)|^2 (S_1^2 - U^2)^2}, \tag{19}$$

式中  $X_1 = X_0 - \theta a$ ,  $Q_1 = [(kn_2 a)^2 - X_1^2]^{1/2}$ ,  $S_1 = [(kn_1 a)^2 - X_1^2]^{1/2}$ ,  $(2\alpha a/b)$  为表征单模光纤固有损耗特性的无量纲参数。设阶跃单模光纤包层和纤芯折射率分别为  $n_2 = 1.4473$ ,  $n_1 = 1.4516$ , 归一化频率  $\nu = 2.44$  及工作波长  $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$  时, 由(19)式算得无量纲损耗参数

随正弦函数空间频率  $\theta a$  变化的曲线示于图 2。

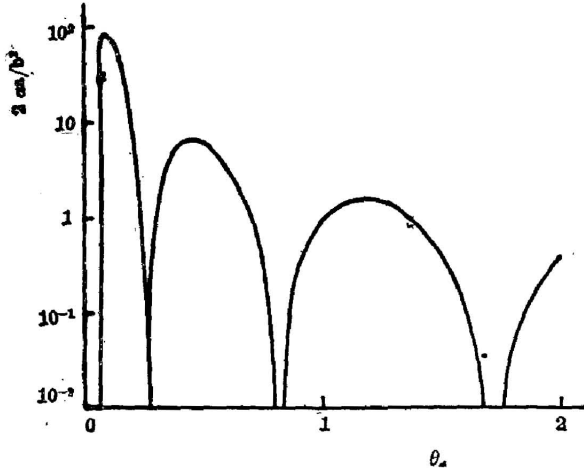


Fig. 2 Dimensionless loss caused by periodical non-uniformities of core index  $2\alpha a/b^2$  vs. spacial frequency of sinusoidal non-uniformities  $\theta a$

由图 2 可见, 损耗曲线是振荡的, 这可能是由于相对着的边界上的辐射之间产生干涉, 使得某一空间频率恰好互相抵消, 辐射损耗为零。曲线凹陷部分的空间频率范围很窄, 而峰值部分的空间频率范围较宽。总的趋势是随着空间频率的增加, 损耗降低。  $\theta a$  小于 0.0511 时, 对应  $Q_1^2 \leq 0$ , 无传播的辐射模存在, 因此辐射损耗为零, 这相当于正弦形变化非常缓慢, 近似于理想波导无损耗。空间频率不大也不小时, 辐射损耗最大, 单模光纤制造过程中应当尽量避免产生。

### 2. 纤芯折射率随机变化

更一般情况下, 折射率变化是随机的, 表征随机变量的特征参数是方差与相关函数或功率谱(相关函数的傅里叶变换)。我们不知道折射率随机变化的功率谱, 所以取文献[5]中(27)式所示的两种形式

$$|F(X_0 - X)|^2 = 2\bar{\sigma}^2 a D / [D^2 (X_0 - X)^2 + 1], \tag{20}$$

$$|F(X_0 - X)|^2 = \sqrt{\pi} \bar{\sigma}^2 a D \times \exp\left\{-\left[\frac{D(X_0 - X)}{2}\right]^2\right\}, \tag{21}$$

其中  $\bar{\sigma}^2$  为微扰函数  $f(z)$  的方差,  $D = (L_c/a)$  为归一化相关长度。单模光纤其它参数不变,  $\nu$  分别等于 2.44, 2.17 和 1.9 时, 用(20)式功率谱代入(16)式算得的无量纲损耗参数  $(2\alpha a/\bar{\sigma}^2)$  随相关长度的变化曲线由图 3 中的三条实线表示。

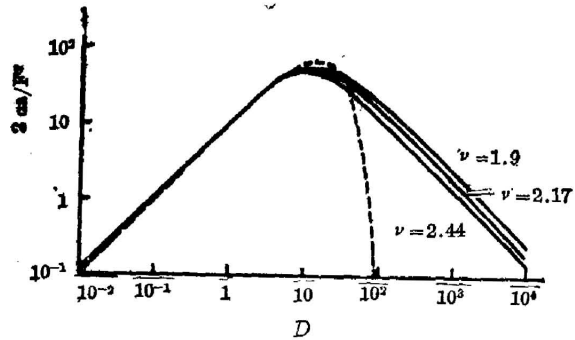


Fig. 3 Dimensionless loss  $2\alpha a/\bar{\sigma}^2$  vs. correlation length  $D$  of random perturbation (solid line is for power spectrum of Eq. (22) and dashed lines are for power spectrum of Eq. (33))

$\nu = 2.44$  时, 用式(21)功率谱算得的相应曲线用

虚线画出。

由图 3 可见, 不同功率谱, 不同  $\nu$  值的损耗参数随  $D$  变化的规律是一样的,  $D$  很小或很大时损耗都减小, 极大值出现的位置都在  $D=10$  附近。相关长度  $D$  很小时, 不同功率谱和不同  $\nu$  值的曲线靠得很近。 $D$  很大时由 (20) 式表示的功率谱的损耗曲线逐渐趋于零(到后来近于直线), 而 (21) 式功率谱的损耗曲线急剧趋于零。另外  $\nu$  值越大, 当  $D$  很大时损耗越小, 这是因为  $\nu$  值大, 能量束缚越紧, 辐射损耗就小。

虽然我们对单模光纤的折射率随机变化规律还不十分清楚, 但可以肯定相关长度  $D$  是很大的<sup>[6]</sup>, 因此损耗也不会很大。为了有一个数量级的概念, 我们假定相关长度为几十毫米, 设  $D=10^4$ 、 $\nu=2.44$ , 由图 3 曲线可得 (20) 式功率谱的无量纲损耗参数  $(2\alpha\alpha/\bar{\sigma}^2) = 0.126$ 。假如纤芯折射率平方的方差为  $\bar{\sigma}^2=10^{-4}$ (大约为纤芯、包层折射率平方差的 1/10), 那么  $2\alpha\approx 1.2$  dB/km。而 (21) 式功率谱的单模光纤损耗为零。

#### 四、单模光纤的弯曲和微弯损耗

单模光纤的弯曲和微弯损耗不能直接用耦合波理论求解。Gambling 等<sup>[5]</sup>用修正耦合波方程的概念解决了这个问题。黄宏嘉<sup>[6]</sup>用本地和超本地模概念求解, 得到了相同的结果。用上述的广义耦合波理论求解是比较复杂的, 物理概念也不很明确。本文用等效电流方法求解这个问题。

弱导光纤弯曲的影响, 可以用纤芯有效折射率分布为

$$n_e = n_1 [1 + (r \cos \varphi / R)] \quad (22)$$

的直波导表示, 其中  $r$ 、 $\varphi$  为光纤端面的极坐标,  $R$  为轴向弯曲的曲率半径。包层的折射率近似认为不变。该直波导又可看作是纤芯折射率  $n_1$  的理想波导加上折射率微扰  $f(z) = (n_1 r \cos \varphi / R)$ 。由 (13) 式得单模光纤折射率微扰产生的极化电流为

$$J_y = i\omega\epsilon_0 (2n_1^2 r \cos \varphi / R) A J_0(Ur/a) \exp(-iXz/a), \quad (r \leq a) \quad (23)$$

式中  $J_y$  含有  $\cos \varphi$  因子, 由 LP 模的正交性, 它只激发 LP<sub>10</sub> 辐射模, 采用文献 [3] 中 (2.4-7) 式所示的 LP<sub>10</sub> 模电场

$$\left. \begin{aligned} E_{1ry} &= B J_1(Sr/a) \exp(-iXz/a), \quad (r \leq a) \\ B &= [\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} (8Q/2n\pi) |S J_0(S) H_1^{(1)}(Q) - Q J_1(S) H_0^{(1)}(Q)|^2]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

将 (24) 式代入 (9) 式和 (10) 式, 算出横截面积分, 将对  $\rho$  的积分换成对  $X$  的积分, 并注意  $S^2 - U^2 = X_0^2 - X^2$ , 最后得到文献 [5] 中 (9) 式和 (10) 式。

可见等效电流方法十分简洁、概念明确, 不必解耦合波方程而直接得出各类问题的解。

#### 参 考 文 献

- [1] 黄宏嘉;《微波原理》, (科学出版社, 1963), 244.
- [2] 吴彝尊;中国科学 A 辑, 1983, 5, No. 5 (May), 466.
- [3] D. Marcuse;《Theory of Dielectric Optical Waveguides》, (Academic Press, New York and London, 1974), Chap. 3.
- [4] A. W. Snyder; *J. O. S. A.*, 1972, 62, No. 11 (Nov), 1267.
- [5] W. A. Gambling et al.; *Opt. & Quant. Electron.*, 1979, 11, No. 1 (Jan), 43.
- [6] 黄宏嘉;《应用科学学报》, 1985, 3, No. 2 (Apr), 95.
- [7] E. Collin;《Field Theory of Guided Waves》, (McGraw-Hill Book Co., 1960), Chap. 5.

## Calculation of radiation loss in single mode fibers by equivalent current method

WANG ZIHUA

*(Shanghai University of Science and Technology)*

*(Received 25 September 1986; revised 17 December 1986)*

### Abstract

Taking a non-ideal waveguide as an ideal waveguide in the presence of polarization currents giving rise to electric and magnetic fields, we can directly solve the problems of mode coupling and radiation loss of an optical waveguide. By using this method, we have calculated the radiation loss of single mode fibers caused by periodical and random non-uniformities of the core index. It is an alternative method of coupled mode theory, but is mathematically simpler and physically more intuitive than the coupled mode theory. At last, taking bending and microbending loss for single mode fibers as an example, we see that this method also applied to problems which can be solved by generalized coupled mode theory.

**Key Words:** single mode fibers; radiation loss.