第7卷 第10期
1987年10月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 7, No. 10
October, 1987

相位算子在单模压缩态中的行为

姚 德 民
(中国科技大学基础物理中心, 合肥)

提　　要

本文仔细讨论了相位算子在单模压缩态光场中的行为，计算了压缩态下相位算子的平均值和涨落。在得到了严格的、普遍性的结果后我们详细地讨论了压缩真空态这一特殊情形下的结果。此外，本文还讨论了严格的结果在经典极限下的渐近行为。

关键词：压缩态，相位算子，涨落，相干态。

一、引　　言

压缩态光场是近年来量子光学中一个新的研究领域[1]。压缩态是相干态的推广，但一般的压缩态具有与相干态不同的量子统计行为，它可以在相空间的两个正交分量之一上具有较小的零点噪声。用压缩态光作为信息的载体用于光通信可以获得比用激光最高的信噪比[2]；用压缩态光作为探针可以探测物质中更精细的结构和更微弱的相互作用[3]。对压缩态性质的理论研究以及实验上压缩态光场的产生、探测和应用都已引起了人们的广泛兴趣。

本文讨论了相位算子在单模理想压缩态中的行为，其结果有助于人们对压缩态性质的深入了解。本文首先给出了压缩态和相位算子在相干态下的表示。相干态表示和积分表达式的运用使得严格计算成为可能。其次我们计算了相位算子在压缩态下的平均值和涨落，作为特例仔细讨论了所谓压缩真空态的相位涨落。最后讨论了在经典极限下所得结果的渐近性质。

二、压缩态以及相位算子在相干态下的表示

按一般的定义[1]，压缩态由两个复参数来表征，即(显然是归一化的)

$$|\alpha,\ \xi\rangle=D(\alpha)S(\xi)\,|0\rangle, \tag{1}$$

其中 $D(\alpha)$ 和 $S(\xi)$ 分别为平移算子和压缩算子，它们是两个幺正算子

$$D(\alpha)=\exp(\alpha\hat{a}^{+}-\alpha^{*}\hat{a}), \tag{2}$$

$$S(\xi)=\exp\Big(\frac{\xi}{2}\,\hat{a}^{2}-\frac{\xi^{*}}{2}\,\hat{a}^{+2}\Big), \tag{3}$$

若记 $\xi=|\xi|\exp(i\Theta)=\gamma\exp(i\Theta)$，则可以证明[4,5]

$$S(\xi)=\exp\Big(-\frac{\mathrm{th}\,\gamma}{2}\,e^{i\Theta}\hat{a}^{+2}\Big)\exp[-(\ln\mathrm{ch}\gamma)\hat{a}^{+}\hat{a}]\,(\mathrm{sech}\gamma)^{1/2}\exp\Big(\frac{\mathrm{th}\,\gamma}{2}\,e^{i\Theta}\hat{a}^{2}\Big), \tag{4}$$

收稿日期：1986年6月2日；收到修改稿日期：1986年11月5日

$$S(\xi)|0\rangle=\sqrt{\operatorname{sech}\gamma}\exp\left(-\frac{\operatorname{th}\gamma}{2}e^{i\Theta}\hat{a}^{+2}\right)|0\rangle, \tag{5}$$

在相干态表象下

$$\begin{aligned}S(\xi)|0\rangle&=\int\frac{d^2\beta}{\pi}|\beta\rangle\langle\beta|S(\xi)|0\rangle\\&=\int\frac{d^2\beta}{\pi}|\beta\rangle\langle\beta|\sqrt{\operatorname{sech}\gamma}\exp\left(-\frac{\operatorname{th}\gamma}{2}e^{-i\Theta}\hat{a}^{+2}\right)|0\rangle\\&=\int\frac{d^2\beta}{\pi}|\beta\rangle\sqrt{\operatorname{sech}\gamma}\exp\left(-\frac{|\beta|^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{\operatorname{th}\gamma}{2}e^{-i\Theta}\beta^{*2}\right),\end{aligned} \tag{6}$$

这里用到了关于相干态$|\beta\rangle$的性质，

$$\langle\beta|f(\hat{a}^+)=\langle\beta|f(\beta^*)=f(\beta^*)\langle\beta|,\quad\langle\beta|0\rangle=\exp\left(-\frac{|\beta|^2}{2}\right)。$$

进一步利用

$$D(\alpha)|\beta\rangle=\exp\left[\frac{1}{2}(\alpha\beta^*-\beta\alpha^*)\right]|\alpha+\beta\rangle, \tag{7}$$

则可得一般压缩态在相干态表象下的形式

$$\left.\begin{aligned}|\alpha,\xi\rangle&=\sqrt{\operatorname{sech}\gamma}\int\frac{d^2\beta}{\pi}\exp\left[\frac{1}{2}(\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)\right]\exp\left(-\frac{|\beta|^2}{2}\right)\\&\quad\times\exp\left(-\frac{\operatorname{th}\gamma}{2}e^{-i\Theta}\beta^{*2}\right)|\alpha+\beta\rangle,\\ \text{或}\quad|\alpha,\xi\rangle&=\sqrt{\operatorname{sech}\gamma}\int\frac{d^2\beta}{\pi}\exp\left[\frac{1}{2}(\alpha\beta^*-\beta\alpha^*)\right]\exp\left(-\frac{|\beta-\alpha|^2}{2}\right)\\&\quad\times\exp\left[-\frac{\operatorname{th}\gamma}{2}e^{-i\Theta}(\beta^*-\alpha^*)^2\right]|\beta\rangle。\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

单模光场的两个相位算子$\hat{\varphi}$和$\hat{\psi}$可由下式给出[6]

$$\left.\begin{aligned}\cos\hat{\varphi}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\hat{a}^+\hat{a}+1}}\hat{a}+\hat{a}^+\frac{1}{\sqrt{\hat{a}^+\hat{a}+1}}\right),\\\sin\hat{\psi}&=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\sqrt{\hat{a}^+\hat{a}+1}}\hat{a}-\hat{a}^+\frac{1}{\sqrt{\hat{a}^+\hat{a}+1}}\right)。\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

并可求得它的积分表示

$$\left.\begin{aligned}\cos\hat{\varphi}&=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dt\,t^{-\frac{1}{2}}[\hat{a}\exp(-\hat{a}^+\hat{a}t)+\exp(-\hat{a}^+\hat{a}t)\hat{a}^+],\\\sin\hat{\psi}&=\frac{1}{2i\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dt\,t^{-\frac{1}{2}}[\hat{a}\exp(-\hat{a}^+\hat{a}t)-\exp(-\hat{a}^+\hat{a}t)\hat{a}^+]。\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

及其在相干态下的对角表示

$$\left.\begin{aligned}\cos\hat{\varphi}&=\int\frac{d^2\beta}{\pi}|\beta\rangle\langle\beta|C(\beta),\quad C(\beta)=\frac{\operatorname{Re}\beta}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^t\exp[-(e^t-1)|\beta|^2]dt,\\\sin\hat{\psi}&=\int\frac{d^2\beta}{\pi}\beta\rangle\langle\beta|S(\beta),\quad S(\beta)=\frac{\operatorname{Im}\beta}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^t\exp[-(e^t-1)|\beta|^2]dt。\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

注意到$\hat{\varphi}\neq\hat{\psi}$，有关系$[\cos\hat{\varphi},\sin\hat{\psi}]=\frac{i}{2}|0\rangle\langle 0|$，$\cos^2\hat{\varphi}+\sin^2\hat{\psi}=1-\frac{1}{2}|0\rangle\langle 0|$。为了计算涨落之用，进一步计算出$\cos^2\hat{\varphi}$和$\sin^2\hat{\psi}$的表达式

$$\left.\begin{aligned}
&\cos^2\hat{\varphi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}|0\rangle\langle 0|+\int\frac{d^2\beta}{\pi}|\beta\rangle\langle\beta|C_2(\beta),\\
&\sin^2\hat{\psi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}|0\rangle\langle 0|-\int\frac{d^2\beta}{\pi}|\beta\rangle\langle\beta|C_2(\beta),\\
&C_2(\beta)=\frac{\operatorname{Re}\beta^2}{\pi}\int_0^\infty h(t)e^{2t}\exp[-(e^t-1)|\beta|^2]dt,\\
&h(t)=\int_0^{\pi/2}\exp(-t\sin^2\theta)d\theta。
\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

三、$\cos\hat{\varphi}$ 和 $\sin\hat{\psi}$ 在压缩态的平均值和涨落

1. $\langle\alpha,\ \xi|\sin^m\hat{\psi}|\alpha,\ \xi\rangle$ 和 $\langle\alpha,\ \xi|\cos^m\hat{\varphi}|\alpha,\ \xi\rangle$ 的表达式

这里我们的任务是求：$\langle\alpha,\ \xi|\cos^m\hat{\varphi}|\alpha,\ \xi\rangle$、$\langle\alpha,\ \xi|\sin^m\hat{\psi}|\alpha,\ \xi\rangle$ $m=1,\ 2$。利用前面所给出的压缩态以及相位算子在相干态下的表示，不难得到要求的量，结果不能用初等函数来表达，而可以用积分表达式来表示。这种表达式为进一步近似计算提供了方便。

考虑 $\cos\hat{\varphi}$ 在 $|\alpha,\ \xi\rangle$ 下的平均值，利用(8)式、(11)式和文献[4]结果，经计算得到

$$\left.\begin{aligned}
\langle\alpha,\ \xi|\cos\hat{\varphi}|\alpha,\ \xi\rangle=&\operatorname{sech}\gamma\int\frac{d^2\beta}{\pi}\frac{d^2\delta}{\pi}\exp\Big[\frac{1}{2}(\alpha^*\beta-\alpha\beta^*)\Big]\exp\Big[-\frac{1}{2}|\beta-\alpha|^2\Big]\\
&\times\exp\Big[-\frac{\operatorname{th}\gamma}{2}e^{i\Theta}(\beta-\alpha)^2\Big]\exp\Big[\frac{1}{2}(\alpha\delta^*-\alpha^*\delta)\Big]\\
&\times\exp\Big[-\frac{\operatorname{th}\gamma}{2}e^{i\Theta}(\delta^*-\alpha^*)^2\Big]\exp\Big[-\frac{1}{2}|\delta-\alpha|^2\Big]\exp\Big(-\frac{|\beta|^2}{2}\Big)\\
&\times\exp\Big(-\frac{|\delta|^2}{2}\Big)\int\frac{d^2\gamma}{\pi}C(\gamma)\exp(-|\gamma|^2+\beta^*\gamma+\gamma^*\delta),\\
\int\frac{d^2\gamma}{\pi}C(\gamma)\exp(-|\gamma|^2+\beta^*\gamma+\gamma^*\delta)=&\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\exp(e^{-t}\beta^*\delta)\cdot(\delta+\beta^*)dt。
\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

于是得到

$$\left.\begin{aligned}
&\langle\alpha,\ \xi|\cos\hat{\varphi}|\alpha,\ \xi\rangle=\frac{\operatorname{sech}\gamma}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}I_1(t)dt,\\
&I_1(t)=\exp[-|\alpha|^2-\operatorname{th}\gamma\cdot\operatorname{Re}(\alpha^2e^{i\Theta})]\int\frac{d^2\beta}{\pi}\frac{d^2\delta}{\pi}\exp(e^{-t}\beta^*\delta)\cdot(\beta^*+\delta)\\
&\qquad\times\exp\Big[-|\beta|^2-\frac{\operatorname{th}\gamma}{2}e^{i\Theta}\beta^2+(\alpha^*+\alpha\operatorname{th}\gamma e^{i\Theta})\beta\Big]\\
&\qquad\times\exp\Big[-|\delta|^2-\frac{\operatorname{th}\gamma}{2}e^{-i\Theta}\delta^{*2}+(\alpha+\alpha^*\operatorname{th}\gamma e^{-i\Theta})\delta^*\Big]。
\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

再利用文献[4]结果分别对 δ 和 β 积分可得

$$\begin{aligned}
I_1(t)=&2\exp[-|\alpha|^2-\operatorname{th}\gamma\operatorname{Re}(\alpha^2e^{i\Theta})]\cdot\frac{\operatorname{Re}[(\alpha+\alpha^*\operatorname{th}\gamma e^{-i\Theta})(1-\operatorname{th}\gamma e^{i\Theta}e^{-t})]}{(1-\operatorname{th}^2\gamma e^{-2t})^{3/2}}\\
&\times\exp\Big\{e^{-t}\frac{|\alpha+\alpha^*\operatorname{th}\gamma e^{-i\Theta}|^2-\operatorname{th}\gamma\operatorname{Re}[e^{i\Theta}(\alpha+\alpha^*\operatorname{th}\gamma e^{-i\Theta})^2]e^{-t}}{1-\operatorname{th}^2\gamma e^{-2t}}\Big\}。
\end{aligned}\tag{15}$$

把(15)式代入(14)式即得到我们最终的结果，这是一个不能用初等函数表达的一个积分式。

当 $\gamma=0$(即 $\xi=\gamma\exp(i\Theta)=0$)时，即得到 $\cos\hat{\varphi}$ 在相干态 $|\alpha\rangle$ 的平均值

$$\langle\alpha|\cos\hat{\varphi}|\alpha\rangle=\frac{\exp(-|\alpha|^2)\,\mathrm{Re}\,\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\exp(|\alpha|^2e^{-t})dt。\tag{16}$$

与文献[6]给出的结果相同。

当 $\alpha=0$ 时，即得到在所谓压缩真空态($|\xi\rangle=S(\xi)|0\rangle$)下 $\cos\hat{\varphi}$ 的平均值为 0。

同理可得

$$\left.\begin{aligned}&\langle\alpha,\ \xi|\sin\hat{\psi}|\alpha,\ \xi\rangle=\frac{\mathrm{sech}\,\gamma}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}I_2(t)dt,\\&I_2(t)=2\exp[-|\alpha|^2-\mathrm{th}\,\gamma\,\mathrm{Re}(\alpha^2e^{i\Theta})]\cdot\frac{\mathrm{Im}[(\alpha+\alpha^*\,\mathrm{th}\,\gamma e^{-i\Theta})(1+\mathrm{th}\,\gamma e^{i\Theta}e^{-t})]}{(1-\mathrm{th}^2\gamma e^{-2t})^{3/2}}\\&\quad\times\exp\left\{e^{-t}\frac{|\alpha+\alpha^*\,\mathrm{th}\,\gamma e^{-i\Theta}|^2-\mathrm{th}\,\gamma\,\mathrm{Re}[e^{i\Theta}(\alpha+\alpha^*\,\mathrm{th}\,\gamma e^{-i\Theta})^2]e^{-t}}{1-\mathrm{th}^2\gamma e^{-2t}}\right\}。\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

当 $\xi=0$ 时

$$\langle\alpha|\sin\hat{\psi}|\alpha\rangle=\frac{\exp(-|\alpha|^2)\,\mathrm{Im}\,\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\exp(|\alpha|^2e^{-t})dt。\tag{18}$$

类似的计算给出

$$\left.\begin{aligned}&\langle\alpha,\ \xi|\cos^2\hat{\varphi}|\alpha,\ \xi\rangle=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\mathrm{sech}\,\gamma\exp[-|\alpha|^2-\mathrm{th}\,\gamma\,\mathrm{Re}(\alpha^2e^{i\Theta})]\\&\qquad+\frac{\mathrm{sech}\,\gamma}{2\pi}\int_0^\infty h(t)e^{-t}I_3(t)dt,\\&\langle\alpha,\ \xi|\sin^2\hat{\psi}|\alpha,\ \xi\rangle=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\mathrm{sech}\,\gamma\exp[-|\alpha|^2-\mathrm{th}\,\gamma\,\mathrm{Re}(\alpha^2e^{i\Theta})]\\&\qquad-\frac{\mathrm{sech}\,\gamma}{2\pi}\int_0^\infty h(t)e^{-t}I_3(t)dt,\\&I_3(t)=2\cdot\exp[-|\alpha|^2-\mathrm{th}\,\gamma\,\mathrm{Re}(\alpha^2e^{i\Theta})]\\&\quad\times\exp\left\{e^{-t}\frac{|\alpha+\alpha^*\,\mathrm{th}\,\gamma e^{i\Theta}|^2-\mathrm{th}\,\gamma\,\mathrm{Re}[e^{i\Theta}(\alpha+\alpha^*\mathrm{th}\gamma e^{i\Theta})^2]e^{-t}}{1-\mathrm{th}^2\gamma e^{-2t}}\right\}\left\{\frac{-\mathrm{th}\,\gamma\cos\Theta}{(1-\mathrm{th}^2\gamma e^{-2t})^{3/2}}\right.\\&\quad\left.+\frac{\mathrm{Re}[(\alpha+\alpha^*\,\mathrm{th}\,\gamma e^{i\Theta})^2(1+\mathrm{th}^2\gamma e^{-2i\Theta}e^{-2t})]-2\,\mathrm{th}\,\gamma\cos\Theta|\alpha+\alpha^*\,\mathrm{th}\,\gamma e^{-i\Theta}|^2e^{-t}}{(1-\mathrm{th}^2\gamma e^{-2t})^{5/2}}\right\}。\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

当 $\xi=0$ 时，$\gamma=0$，则得在相干态 $|\alpha\rangle$ 下

$$\left.\begin{aligned}&\langle\alpha|\cos^2\hat{\varphi}|\alpha\rangle=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\exp(-|\alpha|^2)+\frac{\exp(-|\alpha|^2)\,\mathrm{Re}\,\alpha^2}{\pi}\int_0^\infty h(t)e^{-t}\exp(|\alpha|^2e^{-t})dt,\\&\langle\alpha|\sin^2\hat{\psi}|\alpha\rangle=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\exp(-|\alpha|^2)-\frac{\exp(-|\alpha|^2)\,\mathrm{Re}\,\alpha^2}{\pi}\int_0^\infty h(t)e^{-t}\exp(|\alpha|^2e^{-t})dt。\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

(20)式比文献[6]中给出的结果更简洁，更便于做渐近分析(比如讨论 $|\alpha|^2\to\infty$ 时的行为)。

由(14)、(15)以及(17)、(18)式可以讨论 $\cos\hat{\varphi}$ 和 $\sin\hat{\psi}$ 在压缩下的涨落为

$$\left.\begin{aligned}&\varDelta\cos\hat{\varphi}=(\langle\alpha,\ \xi|\cos^2\hat{\varphi}|\alpha,\ \xi\rangle-\langle\alpha,\ \xi|\cos\hat{\varphi}|\alpha,\ \xi\rangle^2)^{1/2},\\&\varDelta\sin\hat{\psi}=(\langle\alpha,\ \xi|\sin^2\hat{\psi}|\alpha,\ \xi\rangle-\langle\alpha,\ \xi|\sin\hat{\psi}|\alpha,\ \xi^2\rangle)^{1/2}。\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

当 $\xi=0$ 时，退化到在相干态 $|\alpha\rangle$ 下的涨落，这在文献[7]中已讨论过了。

2. 压缩真空态下的涨落

压缩真空态 $|\xi\rangle$ 下的涨落，即 $\alpha=0$ 时(21)式的特殊情况。此时

$$(\Delta\cos\hat{\varphi})^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{sech}\gamma-\operatorname{sech}\gamma\cdot\operatorname{th}\gamma\cdot\cos\Theta\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{h(t)e^{-t}}{(1-\operatorname{th}^2\gamma\cdot e^{-2t})^{3/2}}dt。\tag{22}$$

记 $R=\operatorname{th}\gamma$，则有

$$\left.\begin{aligned}(\Delta\cos\hat{\varphi})^2&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{1-R^2}-\frac{1}{2}\cos\Theta\cdot H(R),\\ H(R)&=\frac{2}{\pi}R\sqrt{1-R^2}\int_0^\infty\frac{h(t)e^{-t}}{(1-R^2e^{-2t})^{3/2}}dt。\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

下面考察 $H(R)$ 的行为，并试图用初等函数来适当地近似之。由分部积分不难得到

$$H(R)=R-\frac{1}{2}\sqrt{1-R^2}\arcsin R+\frac{2}{\pi}\sqrt{1-R^2}\int_0^\infty\frac{d^2}{dt^2}h(t)\arcsin(Re^{-t})dt。\tag{24}$$

由此可得渐近行为(不难做高阶展开)

$$\left.\begin{aligned}&H(R)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}R+\dfrac{1}{4}(\sqrt{3}-\sqrt{2})R^3+O(R^4), & (R\to0)\\ 1-C(1-R)^{1/2}+O(1-R), & (R\to1^-)\end{cases}\\ &C=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty\frac{d^2}{dt^2}h(t)\arcsin(e^{-t})\approx0.72。\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

我们还可以对 $H(R)$ 利用中值定理作整体近似，即在区间 $R\in[0,1)$ 上近似地用初等函数来表之，一个合理的近似*是

$$H(R)\approx R-\frac{1}{2}\sqrt{1-R^2}\arcsin[(2-\sqrt{2})R]。\tag{26}$$

由以上结果我们就有下述相位涨落的渐近行为

$$(\Delta\cos\hat{\varphi})^2\approx\begin{cases}\dfrac{1}{4}(1-\sqrt{2}R\cos\Theta), & (R\to0)\\ \sin^2(\Theta/2)。 & (R\to1^-)\end{cases}\tag{27}$$

结果表明：当 $R\to0$(即 $\gamma\to0$)，即弱压缩情形下，角度 Θ 对涨落的影响很小，而 $\Delta\cos\hat{\varphi}\approx(1/2)$，即此时相位完全混乱；当 $R\to1^-$(即 $\gamma\to\infty$)，即在强压缩情形下，角度 Θ 对相位涨落起着决定性的作用。

下面我们讨论在所谓经典极限($|\alpha|\to\infty$, $\gamma=|\xi|$ 有限)下，上述严格结果的渐近行为。不难求得压缩态的平均光子数为**

$$\langle\alpha,\xi|\hat{a}^+\hat{a}|\alpha,\xi\rangle=|\alpha|^2+\operatorname{sh}^2\gamma。\tag{28}$$

因此，$|\alpha|\to\infty$ 的物理意义也就是平均光子数很大的情形。

用渐近展开的一般理论经运算可得到[7]。

$$\left.\begin{aligned}&\langle\alpha,\xi|\cos\hat{\varphi}|\alpha,\xi\rangle\approx\cos\theta,\quad\langle\alpha,\xi|\sin\hat{\psi}|\alpha,\xi\rangle\approx\sin\theta,\\ &\langle\alpha,\xi|\cos^2\hat{\varphi}|\alpha,\xi\rangle\approx\cos^2\theta,\quad\langle\alpha,\xi|\sin^2\hat{\psi}|\alpha,\xi\rangle\approx\sin^2\theta,\\ &\langle\alpha,\xi|\cos\hat{\varphi}\sin\hat{\psi}+\sin\hat{\psi}\cos\hat{\varphi}|\alpha,\xi\rangle\approx\sin2\theta,\\ &\langle\alpha,\xi|\cos\hat{\varphi}\sin\hat{\psi}-\sin\hat{\psi}\cos\hat{\varphi}|\alpha,\xi\rangle\approx0。\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

可见此时 $\hat{\varphi}$ 和 $\hat{\psi}$ 都对应 α 的幅角 θ。上述渐近行为与 ξ 无关，因而它也是相干态下相应各平均值在 $|\alpha|\to\infty$ 时的渐近行为。

最后，我们指出本文之所以能够得到严格的结果在很大程度上是因为利用了 Glanber

* 推导从略。

** 计算从略。

的 P 表示理论，否则计算将是难以进行的，例如直接由定义去计算 $\langle\alpha, \xi|\cos\hat{\varphi}|\alpha, \xi\rangle$ 几乎是走不通的。这也进一步显示了 P 表示理论的优越性。另外我们运用积分表达式不仅便于严格计算而且便于做渐近分析。

致谢：作者感谢同倪颖生先生的讨论。作者在二次修改此稿时注意到 Sanders 等最近的工作[8]。

参 考 文 献

[1] D. F. Walls; *Nature*, 1983, **306**, No. 5939 (Nov), 141～146.
[2] H. P. Yuen; *IEEE Trans Information Theory*, 1980, **IT-26**, No. 1 (Jan), 78～94.
[3] C. M. Caves *et al.*; *Rev. Mod. Phys.*, 1980, **52**, No. 2 (Apr), 341～392.
[4] 范洪义等；《中国科学(A)》, 1984, No. 1 (Jan), 61～76.
[5] 范洪义等；《光学学报》, 1985, **5**, No. 9 (Sep), 804～811.
[6] P. Carruthers *et al.*; *Rev. Mod. Phys.*, 1968, **40**, No. 2 (Apr), 411～440.
[7] C. M. Bender; 《*Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*》, (McGraw-Hill, New York 1978), 247.
[8] B. C. Sanders *et al.*; *Opt. Commun.*, 1986, **58**, No. 4 (Jun), 290～294.

Properties of phase operators in single-mode squeezed state of light

YAO DEMIN
(*Center for Fundamental Physics, University of Science and Technology of China, Hefei*)

(Received 6 June 1986; revised 5 November 1986)

Abstract

In this paper the properties of phase operators in single-mode squeezed state of light are discussed. Mean values and fluctuations of the usual phase operators are calculated and analyzed. Detailed discussions are made for the special squeezed vacuum state. Finally, the asymptotic properties of the results are derived in the classical limit.

Key Words: squeezed state; phase operator; fluctuation; coherent state.