

云纹技术测量透镜焦距和折射率*

姜绵虎 陈炳泉 王钦华
(苏州大学物理系)

提 要

本文给出会聚球面波光场下 Talbot 长度的计算公式和用云纹技术测量透镜焦距和折射率的一种新方法, 避免了近两年来提出的方法不足之处。

关键词: 云纹技术; Talbot 效应。

一、引 言

测量透镜的折射率通常用无损液浸准直法。这种方法不但麻烦而且会产生许多误差。R. S. Kasana 等人建议使用 Murty 剪切干涉仪来测量透镜的折射率^[1]。该方法的缺点是需很长的光具座。L. Glatt 等人提出用云纹偏折仪^[2~3]来测量透镜的焦距和折射率。Y. Nakano 等人提出用云纹技术和 Talbot 效应进行测量^[4]。但在理论推导中, 一些地方进行了近似, 例如把第一块光栅到焦点的距离(见图 1)近似当作焦距 f ; 把有透镜时转角云纹的间距近似看作等于无透镜时转角云纹的间距等。这样, 在理论上就引入了较大的误差。在测量很长焦距透镜的焦距时, 以及在测量透镜材料折射而选用的浸液折射率跟透镜材料折射率相接近, 使透镜的等效焦距变得很长时, 则测量误差较小。否则, 实验结果将出现较大的误差。

本文给出的方法在理论推导过程中没有上述的近似, 从而避免了其不足之处, 并从理论上证明了分别用平面光波和会聚球面波照射光栅时, 其对应的 Talbot 长度不等。用作图法和 Fourier 光学原理, 计算了以会聚球面光波照射光栅时 Talbot 长度的理论公式和在 Talbot 长度上像栅的周期。

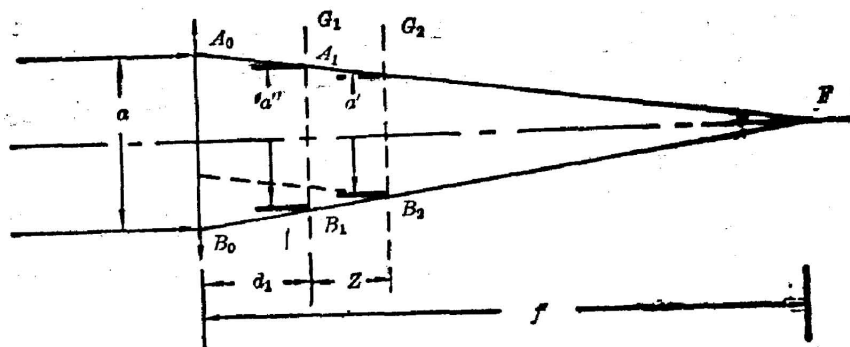


Fig. 1 The sketch of measuring focal length

收稿日期: 1986年1月22日; 收到修改稿日期: 1986年4月14日

* 此文曾在中国光学学会 1985 年年会上宣读。

二、理 论

当用平面光波照射周期为 p 的光栅 G_1 时, 由于 Talbot 效应, 在离 G_1 为

$$Z = \frac{2kp^2}{\lambda} \quad (1a)$$

或

$$Z' = \frac{(2k-1)p^2}{\lambda}, \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (1b)$$

平面上的光场具有周期结构, 其周期为 p , 与 G_1 栅周期相同。即在这些平面上形成清晰的 G_1 栅的像, 在 Z' 上的像栅是 G_1 的负像, 在 Z 上为正像^[4]。

当用会聚球面波照射 G_1 栅时, 在(1a)和(1b)式所表示的位置处, 不出现清晰的像栅, 清晰的像栅位置发生变化, 即 Talbot 长度与平面波时不同。

1. 出现 Talbot 效应位置的公式推导

a. 作图法 在图 2 中 设 G_1 为矩形振幅光栅, 周期为 p , 栅线方向平行于 y_1 轴, 则其复振幅透射率函数为矩形函数与 δ -函数的卷积, 即

$$t_1(x_1) = \text{rect}\left(\frac{x_1}{\tau}\right) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x_1 - np), \quad (2)$$

式中 τ 为光栅一个周期中的透光部分宽度。进行 Fourier 分解, 写成

$$t_1(x_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp\left(j2\pi \frac{m}{p} x_1\right). \quad (3)$$

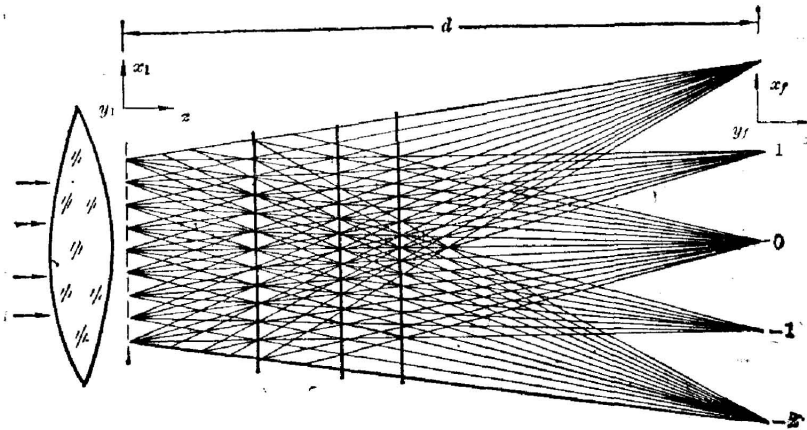


Fig. 2 The Talbot effect in the converging spherical light fields

单色平面波通过透镜产生会聚球面波, 然后通过光栅 G_1 。由[5]知透镜的作用相当于一只 Fourier 变换元件, 略去常数因子, 则在透镜后焦面上光波复振幅 $U_f(x_f)$ 为 $t_1(x_1)$ 的傅氏变换, 即

$$\begin{aligned} U_f(x_f) &= \mathcal{F}[U_1(x_1)] = \mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{x_1}{a}\right) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x_1 - np)\right] \\ &= \frac{1}{p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{x_f}{\lambda d} - \frac{n}{p}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

该式表明, 谱面(后焦面)上, 在

$$x_f = \frac{n\lambda d}{p} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5)$$

处为亮点, 即由各光栅刻线出射的零级光线会聚于 $x_f=0$ 处, 而各光栅刻线出射的 $+1$ 级光线会聚于 $x_f = \frac{\lambda d}{p}$ 处等等。

由图 1 的几何关系, 不难求得, 在 Z 为

$$Z_k = \frac{kd}{\frac{\lambda d}{p^2} + k} \quad (6)$$

处出现 Talbot 效应。

b. Fourier 分析法 设振幅为 A 的单色平面波垂直照射透镜, 则投射到光栅 G_1 上的是一束向透镜后焦点会聚的球面波。用傍轴近似, 则由 G_1 所透射的光场复振幅可写成^[5]

$$\begin{aligned} U_1(x_1) &= \frac{Af}{d} \left[\exp\left(-j \frac{\pi}{\lambda d} x_1^2\right) \right] t_1(x_1) \\ &= \frac{Af}{d} \exp\left(-j \frac{\pi}{\lambda d} x_1^2\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp\left(jZ\pi \frac{m}{p} x_1\right). \end{aligned} \quad (7)$$

离 G_1 为 Z 处的光场复振幅为

$$\begin{aligned} U_Z(x_2, Z) &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Af}{d-Z} \exp\left(-j \frac{\pi}{\lambda d} x_1^2\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(j2\pi \frac{m}{p} x_1\right) \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda Z} (x_2 - x_1)^2\right] dx_1 \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} AA_m \frac{f}{d-Z} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ \frac{\pi}{\lambda Z} \left[(x_2 - x_1)^2 + 2\lambda Z \frac{m}{p} x_1 - \frac{Z}{d} x_1^2 \right] \right\} dx_1, \end{aligned}$$

经整理化简, 上式可写成

$$\begin{aligned} U_Z(x_2, Z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} AA_m \frac{f}{d-Z} \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda Z} x_2^2\right) \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda} \frac{Zd}{d-Z} \left(\frac{1}{Z} x_2 - \lambda \frac{m}{p}\right)^2\right] \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ j \frac{\pi}{\lambda d} \frac{d-Z}{Z} \left[x_1 - \frac{Zd}{d-Z} \left(\frac{1}{Z} x_2 - \lambda \frac{m}{p}\right)\right]^2 \right\} dx_1, \end{aligned}$$

上式中的费涅尔积分为一个常数因子, 可略去, 于是

$$\begin{aligned} U_Z(x_2, Z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} AA_m \frac{f}{d-Z} \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda Z} x_2^2\right) \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda} \frac{Zd}{d-Z} \left(\frac{1}{Z} x_2 - \lambda \frac{m}{p}\right)^2\right] \\ &= A \frac{f}{d-Z} \exp\left(-j \frac{\pi}{\lambda(d-Z)} x_2^2\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp\left(j \frac{2\pi d}{d-Z} \frac{m}{p} x_2\right) \\ &\quad \times \exp\left(-j\pi Z \frac{d}{d-Z} \frac{\lambda}{p^2} m^2\right). \end{aligned} \quad (8)$$

该式中, Σ 前面的因子表示球面波。下面我们研究主光轴(Z 轴)上光场分布, 即当 $x_2=0$ 时, 有

$$U_Z(Z) = A \frac{f}{d-Z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp\left(-j\pi \frac{d}{d-Z} \frac{m^2 \lambda}{p^2} Z\right). \quad (9)$$

由(9)式显见, 在 Z 轴上光场振幅周期变化, 其基频半周期为 $\frac{d-Z}{d} \frac{p^2}{\lambda}$, 于是显现 Talbot 效应的位置为 $Z_k = k \frac{d-Z_k}{d} \frac{p^2}{\lambda}$, 整理得: $Z_k = \frac{kd}{\frac{\lambda d}{p^2} + k}$, 即为(6)式。

当 k 分别为奇数和偶数时, 其对应的 U_Z 分别为

$$U_z(Z_*) = A \frac{f}{d-Z_*} (A_0 - 2A_1 + 2A_2 - 2A_3 + 2A_4 \cdots),$$

$$U_z(Z_{**}) = A \frac{f}{d-Z_{**}} (A_0 + 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 + 2A_4 \cdots),$$

即 Z 轴上, 在 Z_* 位置处为暗点, 在 Z_{**} 位置处为亮点。由于在 $Z=0$ 处是亮光栅刻线, 又由 (8) 式可知在 Z_k 处垂直于 Z 轴平面上的光场在 x_2 方向是周期变化的, 形成 G_1 的 Fourier 像栅是负像, k 为偶数时是正像。而像栅基频的周期 (即像栅的周期) 为

$$p' = \frac{d-Z_k}{d} p. \quad (10)$$

由以上分析显见, 以会聚球面波照明光栅时, (1) Talbot 效应不再是等间距出现, 而是按 (6) 式规律变化。(2) 象栅的周期变小, 为 $p' = \frac{d-Z_k}{d} p$, 且随 Z_k 的增大而减小。

2. 透镜焦距的测量

在 Z_k 处, G_1 的像栅的节距 (周期) 为 p' , 若在该位置放置光栅 G_2 , 且 G_2 和 G_1 的光栅刻线平行, 节距相等为 p , 则由平行云纹法知, 将会形成等间距的平行云纹, 云纹间距^[6]为

$$W = \frac{pp'}{p-p'}. \quad (11)$$

设 a 为光阑直径 (参见图 1) 会聚光在 G_1 上光斑直径为 a' , 在 G_2 上为 a'' 。因为 a' 上所含像栅光栅刻线数跟 a'' 上的相等, 于是

$$\frac{p'}{p} = \frac{a'}{a''}, \quad (12)$$

因 $\triangle A_1 B_1 F \cong \triangle A_2 B_2 F$, 故有

$$\frac{a'}{a''} = \frac{f'-d_1-Z}{f'-d_1}. \quad (13)$$

又因 $\triangle C B_0 B_2 \cong \triangle A_0 B_0 F$, 故有

$$\frac{d_1+Z}{f'} = \frac{a-a'}{a}, \quad (14)$$

联立 (12)~(14) 式消去 d_1 和 a'' , 得

$$\frac{p'}{p} = \frac{a'f'}{a'f'+Za}, \quad (15)$$

(11) 式可进一步化为

$$\frac{p'}{p} = \frac{\omega}{\omega+p}, \quad (16)$$

通过简单计算就可得

$$f' = \frac{aZW}{a'p}, \quad (17)$$

p 和 a 为已知量, a' 和 W 通过实验测得, 通常实验时 G_2 不易很精确地放在 Z_k 位置上, 故 Z 也需实测。

由于该方法应用了云纹技术, 并在推导中消去了 d_1 (透镜第二主平面和 G_1 光栅间的距离), 所以测量透镜焦距时, 虽然透镜的第二主平面和主点的位置不知道, 且透镜焦点也没有在实验中显示出来, 却能方便地测得第二主点和焦点的距离 (焦距 f)。显然, 该方法不仅适

用于测量薄透镜焦距,还适用于厚透镜和透镜组。同样也适用于测量浸在液槽中透镜的等效焦距,此时将透镜、液体和液槽的前、后通光玻璃窗当作一个透镜组,其等效焦距就为该透镜组第二主点和焦点 F' 的距离。

3. 透镜材料折射率 n 的测量

对于薄透镜, f' 和 n 及透镜几何形状有下述关系:

$$\frac{1}{f'_i} = (n - n_i) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (18)$$

其中 r_1 和 r_2 为透镜表面的曲率半径。 n_i 为透镜周围介质的折射率。又

$$f'_i = \frac{\alpha}{p} \cdot \frac{Z_i W_i}{a_i}. \quad (19)$$

若将透镜分别浸没于折射率为 n_1 和 n_2 的介质中进行测量,则有

$$\frac{f'_2}{f'_1} = \frac{n - n_1}{n - n_2}, \quad \frac{f'_2}{f'_1} = \frac{Z_2 W_2 / a_2'}{Z_1 W_1 / a_1'}$$

于是求得

$$n = \frac{n_1 W_1 Z_1 a_2' - n_2 W_2 Z_2 a_1'}{W_1 Z_1 a_2' - W_2 Z_2 a_1'}. \quad (20)$$

因此,只需分别记录透镜在两种介质中形成云纹图时的有关量,就可方便地计算出透镜材料的折射率 n 。

三、实验和实验结果

图 3 为实验装置示意图, He-Ne 激光经扩束、针孔滤波后,再由透镜组 L 准直成单色平面波,并通过孔径光阑垂直入射于待测透镜 TL , TL 置于充满液体(例如水)的液槽中,在槽后放置 G_1 、 G_2 光栅,两光栅的刻线相互平行,且都垂直于主光轴,两光栅间距离调在任一 Z_i 附近。

实验可采用下述两种方法:

1. 在紧靠 G_2 后放置毛玻璃屏 P , 在无透镜时,测量沿光栅刻线方向光斑直径 α , 在有透镜时,测量沿光栅刻线方向光斑直径 α' 和云纹间距 W 。实验中 G_2 栅的药膜朝后焦点。

2. 双曝光法: 紧贴在 G_2 栅后放感光板, 有透镜和无透镜时分别曝光一次, 经显影、定影处理后测得 α 、 α' 和 W 即可。 α 、 α' 、 W 和 Z 的测量精度直接影响 f' 和 n 的测量精度, 建议用移测读数显微镜测量。采用双曝光法的优点是可消除由液槽引入的初始条纹和噪音。

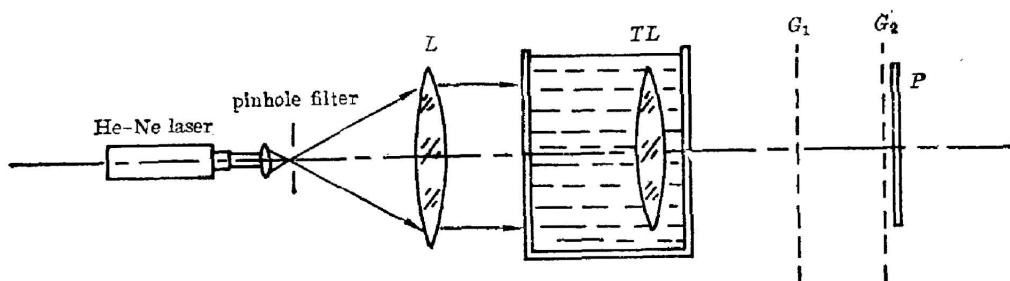
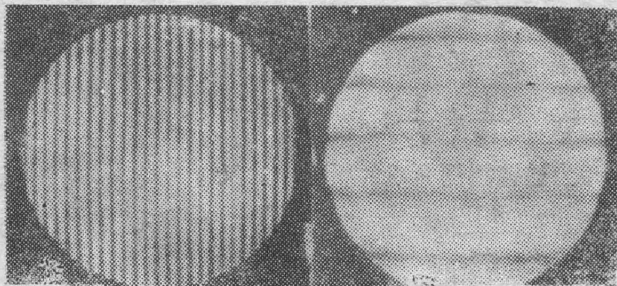


Fig. 3 The sketch of experimental arrangement

实验中应先利用激光束调节光学系统的主光轴和激光束重合,而后再扩束准直,使像差影响主要来源于球差,而球差的影响还可通过下述方法之一减少:缩小孔径光阑和测量云纹图中心部分云纹的间距。此外,通过选用跟透镜材料折射率相近的液体,可使球差大大减小^[1]。顺便指出,该实验方法还可根据云纹间距知道球差严重与否。



(a) The picture in air (b) The picture in water

Fig. 4 The Moiré picture

实验中,我们使用的光源是He-Ne激光器,因此测得的折射率 n 是对 $0.6328\ \mu\text{m}$ 波长的色光而言,若采用其它波长的激光,则获得相应波长下的折射率。

实验中采用的 G_1 和 G_2 光栅的节距为 $p=0.08335\text{mm}$,用此长仪测定,透镜焦距 $f'=1173\text{mm}$ (空气中)。测量透镜折射率 n 时,液体是水,其折射率用阿贝折射率仪测量,以He-Ne激光作为阿贝折射率仪的照明光源,测得 $n_w=1.3341$ 。图4(a)为该透镜在空气中的云纹图,图4(b)为其浸没在水槽中的云纹图。由实验计算得 $f'=1173.65\text{mm}$, $n=1.5294$ 。

实验中采用的 G_1 和 G_2 光栅的节距为 $p=0.08335\text{mm}$,用此长仪测定,透镜焦距 $f'=1173\text{mm}$ (空气中)。测量透镜折射率 n 时,液体是水,其折射率用阿贝折射率仪测量,以He-Ne激光作为阿贝折射率仪的照明光源,测得 $n_w=1.3341$ 。图4(a)为该透镜在空气中的云纹图,图4(b)为其浸没在水槽中的云纹图。由实验计算得 $f'=1173.65\text{mm}$, $n=1.5294$ 。

四、结 论

使用该方法有以下优点:

1. 理论推导中没有引入近年来介绍方法中的理论误差。
2. 实验方法简单可靠,实验无需在很长的光具座上进行。
3. 被测透镜的焦距不受长焦距的限制。
4. 实验中可通过改变 G_1 与被测透镜间的距离 d_1 、 G_1 和 G_2 、 G_2 的间距 Z 获得适当密度的云纹,以保证测量精度。

参 考 文 献

- [1] R. S. Kasana and K. J. Rosenbruch; *Appl. Opt.*, 1983, **22**, No. 19 (Nov), 3526~3529.
- [2] I. Glatt and A. Livat; *Appl. Opt.*, 1984, **23**, No. 14 (Jul), 2241~2243.
- [3] Z. Karny and O. Kafri; *Appl. Opt.*, 1982, **21**, No. 18 (Sep), 3326~3328.
- [4] Y. Nakano and K. Murata; *Appl. Opt.*, 1984, **23**, No. 14 (Jul), 2296~2299.

Measuring focal length and refractive index of a lens using Moiré technique

JIANG JINHU, CHEN BINGQUAN AND WANG CHINHUA

(Department of Physics, Suzhou University)

(Received 22 January 1986; revised 14 April 1986)

Abstract

In this paper the calculating formula of the Talbot length under the condition of the light fields of converging spherical waves is given, and a new method of measuring the focal length and refractive index of a lens with Moiré technique is presented. It avoids the deficiencies of other methods proposed in the recent two years.

Key Words. Moiré technique; Talbot effect.