第7卷 第1期
1987年1月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 7, No. 1
January, 1987

双频激光在等离子体中的共振自聚焦

徐铁峰 徐至展
(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

本文从理论上详细地研究了双频激光在等离子体中的共振自聚焦。本章从流体方程出发，导出了双频激光驱动下等离子体的非线性介电常数，从而清楚地展示了等离子体波有质动力的影响。接着，具体地处理了等离子体纵向静电场，进而反映出共振自聚焦的具体特征。最后还讨论了共振自聚焦对拍频波加速器中粒子加速过程的影响。

关键词: 双频激光 共振自聚焦

一、引 言

当双频激光入射到等离子体时，如果满足共振条件 $\omega_1-\omega_2=\omega_p$($\omega_1$, ω_2 是入射激光频率，ω_p 是等离子体频率)，那么就可以在等离子体中激发起振幅很大的电子等离子体波。由于等离子体波的有质动力可以远大于激光束的有质动力，因而激光束在等离子体中的自聚焦效应就会大大增强。据此，Toshi 等人[1]提出了“共振自聚焦”的概念。这是激光束在等离子体中的自聚焦这一研究领域的新课题。

根据标准的自聚焦理论，假设激光束为高斯型的

$$E(z)=[E_0/f(z)]\exp(-r^2/a^2), \tag{1}$$

式中 $f(z)$ 是束宽因子，a 是在 $z=0$ 处的束宽。在近轴光线近似下，得到决定 $f(z)$ 的方程为

$$\frac{df(z)}{dz}=-[R_0^{-2}+2U(1)-2U(f)]^{1/2}, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} U(f)&=\frac{2}{k_0^2a^4f^2}+\frac{\exp(-\eta^2/f^2)}{k_0^2a^2\delta^2},\\ \eta&=\frac{e^2E_0^2}{2m\omega_0^2(T_e+T_i)},\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式中 δ 是无碰撞趋肤深度 $\delta=(c/\omega_p)$，$R_0=(-df/dz)_0^{-1}$ 是入射波前的曲率半径。

为了把标准的自聚焦理论推广到共振自聚焦情形，Joshi 等人考察了激光束和电子等离子体波的有质动力[1]。

$$F_{NLB}=-(\omega_p^2/\omega_0^2)\nabla(\langle E_0^2\rangle/8\pi), \tag{4}$$

$$F_{NLP}=-\nabla(\langle E_p^2\rangle/8\pi), \tag{5}$$

$$A=\frac{F_{NLP}}{F_{NLB}}\simeq\left(\frac{n_1/n_0}{v_0/c}\right)^2, \tag{6}$$

收稿日期: 1986年4月1日; 收到修改稿日期: 1986年8月21日

式中 F_{NLB}、F_{NLP} 分别表示激光束和等离子体的有质动力。由于它们的比值 A 可以很大(如对 $(n_1/n_0)=1\%$, $I_0=10^{10}\,\mathrm{W\cdot cm^{-2}}$, $A=122$)[1],因此,激光束的有质动力可以忽略,于是在(3)式中用 $A\eta^2$ 代替 η^2,就可直接得到描述共振自聚焦的方程[1]。这就是 Joshi 等人对共振自聚焦的处理方法。

显然,Joshi 等人的处理方法是不够严格的。首先,他们没有给出在双频激光驱动下等离子体的稳态密度分布,也没有给出等离子体波有质动力是怎样影响非线性介电常数的。因而他们的推广是缺少一定基础的。其次,他们对等离子体静电场 $\boldsymbol{E}_p$ 没有进行详细的处理,所以不能反映出共振自聚焦的具体特征。

本文首先从流体运动方程出发,导出双频激光驱动下电子密度的稳态分布,给出非线性介电常数的表达式,由此反映出等离子体波有质动力的影响。进一步得到决定束宽因子 $f(z)$ 的方程。然后通过求解关于静电场 $\boldsymbol{E}_p$ 的方程,得到 $\boldsymbol{E}_p$ 的近似解析解,从而反映出共振自聚焦的具体特征。

二、非线性介电常数

为简单起见,设入射双频激光 ω_1, ω_2 的光强相等,即 $E_1=E_2=E_0$,且 $[(|\omega_1-\omega_2|)/\omega_{p0}]\cong1$。其中 $\omega_{p0}^2=(4\pi n_0e^2/m)$, n_0 是等离子体平均密度。则电子的流体方程为(见附录1)。

$$mn\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-en\boldsymbol{E}_p-\frac{2\omega_{p0}^2}{\omega_0^2}\nabla\frac{\langle E_0^2\rangle}{8\pi}-\frac{n}{n_0}\nabla\frac{E_p^2}{8\pi}-\frac{\omega_p^2}{4\pi\omega_0^2}\nabla\langle\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2\rangle-\nabla P, \tag{7}$$

这里已经取 $\omega_1\cong\omega_2=\omega_0$ 且 $\omega_0\gg\omega_{p0}$, m 是电子质量, e 是电子电荷, n 是电子密度, $\omega_p^2=(4\pi ne^2/m)$, $\boldsymbol{E}_p$ 是纵向静电场, $P=nT_e$(T_e 是电子温度)是电子热压强。将(7)式按平行于 z 方向和垂直于 z 方向分解为二个分量表示式

$$mn\frac{\partial v_\perp}{\partial t}=-enE_{p\perp}-\frac{2\omega_{p0}^2}{\omega_0^2}\nabla_\perp\frac{\langle E_0^2\rangle}{8\pi}-\frac{n}{n_0}\nabla_\perp\frac{E_p^2}{8\pi}-\frac{\omega_p^2}{4\pi\omega_0^2}\nabla_\perp\langle\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2\rangle-\nabla_\perp P, \tag{8}$$

$$mn\frac{\partial v_{/\!/}}{\partial t}=-enE_{p/\!/}-\frac{2\omega_{p0}^2}{\omega_0^2}\nabla_{/\!/}\frac{\langle E_0^2\rangle}{8\pi}-\frac{n}{n_0}\nabla_{/\!/}\frac{E_p^2}{8\pi}-\frac{\omega_p^2}{4\pi\omega_0^2}\nabla_{/\!/}\langle\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2\rangle-\nabla_{/\!/}P, \tag{9}$$

式中 $v_\perp$, $v_{/\!/}$ 分别是垂直于 z 方向和平行于 z 方向的速度, $\nabla_\perp$、$\nabla_{/\!/}$ 分别是 ∇ 算子在垂直于 z 方向和平行于 z 方向的投影。为了求稳态的电子密度分布,还须加上与(8)式对应的离子的运动方程

$$m_in_i\frac{\partial v_{i\perp}}{\partial t}=en_iE_{p\perp}-\nabla_\perp P_i。 \tag{10}$$

由于离子质量远大于电子质量,这里就忽略了作用于离子的有质动力。上式中 m_i 是离子质量, n_i 是离子密度, $P_i=n_iT_i$ 是离子热压强。

由(9)式和(10)式求得电子的稳态密度分布为

$$n=n_0\exp\left[-\frac{1}{8\pi n_0(T_e+T_i)}\left(\langle E_p^2\rangle+\frac{2\omega_{p0}^2}{\omega_0^2}\langle E_0^2\rangle\right)\right]。 \tag{11}$$

这是激光束的有质动力和等离子体波的有质动力与热压强平衡的结果。与单频激光驱动下的稳态密度分布[2]

$$n=n_0\exp\left[-\frac{1}{8\pi n_0(T_e+T_i)}\frac{\omega_{p0}^2}{\omega_0^2}\langle E_0^2\rangle\right],\tag{12}$$

相比，说明等离子体波有质动力对密度分布的影响与激光束的有质动力对密度分布的影响是处于同等地位的，即它们以相同的方式影响等离子体密度分布。如果等离子体波的有质动力远大于激光束的有质动力，那么就可忽略激光束的有质动力。这正是 Toshi 等人将标准的自聚焦理论推广到共振自聚焦情形的依据。

等离子体非线性介电常数为

$$\varepsilon=1-\frac{\omega_{p0}^2}{\omega_0^2}\exp\left[-\frac{1}{8\pi n_0(T_e+T_i)}\left(\langle E_p^2\rangle+\frac{2\,\omega_{p0}^2}{\omega_0^2}\langle E_0^2\rangle\right)\right]。\tag{13}$$

有了非线性介电常数以后，我们很容易得到决定束宽因子 $f(z)$ 的方程为

$$\frac{df(z)}{dz}=-[R_0^{-2}+2V(1)-2V(f)]^{1/2},\tag{14}$$

$$V(f)=\frac{2}{k_0^2a^4f^2}+\frac{\exp(-\xi^2/f^2)}{k_0^2a^2\delta^2},\tag{15}$$

$$\xi^2=\frac{1}{8\pi n_0(T_e+T_i)}\left(\langle E_p^2\rangle+\frac{2\omega_p^2}{\omega_0^2}\langle E_0^2\rangle\right)。\tag{16}$$

因此，为了研究 $f(z)$ 与入射激光强度及等离子体各参数之间的关系，必须给出 $\langle E_p^2\rangle$ 的表达式。实际上，入射的双频激光首先在等离子体中激发起电子等离子体波，而等离子体波又会加剧自聚焦效应，从而影响了入射的激光场。

三、拍频波激发的等离子体纵向静电场

如前所述，双频激光与被激发的等离子体波之间会相互影响，要给出完全严格的描述，在数学上会遇到很大困难。因此，作这样的近似：在讨论等离子体波的激发时，把入射的双频激光看作平面波。考虑到在导出关于 $f(z)$ 的方程时已经作了近轴光线近似，这个近似是合适的。

如果设入射激光为平面波，则拍频波激发静电场的方程[见附录 2]为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2E}{dz^2}+E=\epsilon\left[-2\gamma E\frac{dE}{dz}+\sin\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}z\right],\\&\epsilon=\frac{k_peE_0}{2m\omega_0^2},\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

式中 $E=(E_p/E_0)$，E_0 是激光场强；$\gamma=(\omega_0^2/\omega_{p0}^2)$；$\Delta\omega$ 是两种频率之差 $\Delta\omega=|\omega_1-\omega_2|$。(17)式方程的意义是很明确的：方程等号右边第二项表示拍频场共振地驱动等离子体波；第一项则表示产生的等离子体波的有质动力会影响等离子体电子的运动，从而影响等离子体波的激发。

要得到(1)式的严格解析解是困难的。为了求方程的近似解析解，首先让我们来估算一下参数 ϵ 的量级。通过简单计算可得

$$\epsilon=1.3\times10^{-20}[\lambda(\mu\mathrm{m})]^2[I_0(\mathrm{W\cdot cm^{-2}})n_0(\mathrm{cm^{-3}})]^{1/2}$$

对 $\lambda=10.6\,\mu\mathrm{m}$，即使 $n_0=10^{18}\,\mathrm{cm^{-3}}$，$I_0=10^{14}\,\mathrm{W\cdot cm^{-2}}$，$\epsilon$ 也只有 1.5%。因此，ϵ 可看作小参数，用 Poincaré 的小参数展开法[8]求(17)式的近似周期解析解。

设(17)式的周期解为

$$E=E_0+\epsilon E_1+\epsilon^2E_2+\cdots,$$

式中 E_0, E_1, E_2, …都是周期函数。经过运算(见附录3),求得近似到 $O(\epsilon)$ 的解为

$$\left.\begin{aligned}E&=\frac{1}{\alpha_0}\left(1+\frac{\epsilon\gamma^2}{3\alpha_0^2}\right)\sin\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z+\frac{\epsilon\gamma}{3\alpha_0^2}\sin 2\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z,\\ \alpha_0&=\frac{1-(\Delta\omega/\omega_{p0})^2}{\epsilon},\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

式中 α_0 是 $O(1)$ 阶量。只要密度 n_0 不太高,一般有 $\gamma\gg1$,故(18)式可以导出

$$\langle E^2\rangle\cong\left(1+\frac{\epsilon\gamma^2}{3}\right)^2。\tag{19}$$

经过简单计算,$\epsilon\gamma^2$ 与光强、密度及波长的关系为

$$\epsilon\gamma^2=1.5\times10^{18}\lambda^2I_0^{1/2}n_0^{-3/2},$$

为明确起见,以 $\lambda=10.6\,\mu\text{m}$ 为例。这时

$$\epsilon\gamma^2=1.7\times10^{20}I_0^{1/2}n_0^{-3/2},$$

当 $I_0\gg10^8\,\text{W}\cdot\text{cm}^{-2}$, $n_0\ll10^{16}\,\text{cm}^{-3}$ 时, $\epsilon\gamma^2\gg1$; 当 $I_0\ll10^8\,\text{W}\cdot\text{cm}^{-2}$, $n_0\gg10^{16}\,\text{cm}^{-3}$ 时, $\epsilon\gamma^2\ll1$。这样我们就可写出 $\langle E^2\rangle$ 的定标关系为

$$\langle E^2\rangle=\begin{cases}1.0, & (I_0\ll10^8[\text{W}\cdot\text{cm}^{-2}],\ n_0\gg10^{16}[\text{cm}^{-3}])\\ 1.0\times10^{40}I_0n_0^{-3}, & (I_0\gg10^8[\text{W}\cdot\text{cm}^{-2}],\ n_0\ll10^{16}[\text{cm}^{-3}])\end{cases}\tag{20}$$

前者表示等离子体波是线性激发的,而后者则是非线性的。

根据(16)式,我们可以用比值 $\langle E_p^2\rangle/[(2\omega_{p0}^2/\omega_0^2)\langle E_2^0\rangle]$ 的大小来衡量共振自聚焦的强弱。

$$S=\frac{\langle E_p^2\rangle}{(2\omega_{p0}^2/\omega_0^2)\langle E_0^2\rangle}=\gamma\langle E^2\rangle。\tag{21}$$

仍以 $\lambda=10.6\,\mu\text{m}$ 为例,则

$$S=\begin{cases}1.1\times10^{19}n_0^{-1}, & (I_0\ll10^8[\text{W}\cdot\text{cm}^{-2}],\ n_0\gg10^{16}[\text{cm}^{-3}])\\ 1.1\times10^{59}I_0n_0^{-4}。 & (I_0\gg10^8[\text{W}\cdot\text{cm}^{-2}],\ n_0\ll10^{16}[\text{cm}^{-3}])\end{cases}\tag{22}$$

由(22)式可以看到,只要密度不是太高,或是光强足够强,就有 $S\gg1$,即自聚焦效应是很强的。

作为本节的结束,讨论一下共振自聚焦的阈值功率 P_c^f。仿照文献[2]的方法可以得到

$$P_c^f=\frac{1}{\gamma}P_c=\frac{1}{\gamma}n_0(T_e+T_i)\left(\frac{k_0c^2}{\omega_0}\right)\pi\lambda^2\left[\pi^{-2}\left(\frac{\omega_0}{\omega_{p0}}\right)^4\right],\tag{23}$$

式中 P_c 是一般自聚焦的阈值功率。由(23)式有

$$\frac{P_c^f}{P_c}=\frac{1}{\gamma}=1.0\times10^{-21}n_0\lambda^{-2}。\tag{24}$$

表1是对各种波长及密度计算所得的 (P_c^f/P_c) 之值。

Table 1

$n_0(\text{cm}^{-1})$		10^{16}	10^{17}	10^{18}
P_c^f	($\lambda=1.06\,\mu\text{m}$)	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
P_c	($\lambda=10.6\,\mu\text{m}$)	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}

四、共振自聚焦对粒子加速的影响

众所周知，近年来双频激光与等离子体的相互作用之所以引起了人们的广泛重视，很重要的一个原因是拍频波加速器研究的需要。入射到等离子体的双频激光当满足共振条件时($\omega_1-\omega_2=\omega_p$)，就可以在等离子体中激发起大振幅、高相速的等离子体波。与此同时，从外界注入预加速的带电粒子束，这些带电粒子束在等离子体波的势场中被俘获，从而加速到很高的能量[4]。这就是拍频波加速器的一般原理。下面讨论共振自聚焦对粒子加速过程的影响。

首先，由(12)式可以看到，等离子体电子密度在激光束所在区域是呈指数分布的。在光强强的地方粒子数少，弱的地方粒子数多，并且由于等离子体波有质动力的存在而大大加剧了这种分布趋势。这样，当带电粒子注入时，与其它粒子碰撞的几率就大大地减少了。这对提高粒子的加速能量以及保持粒子运动的准直性，都是很有利的。

其次，由于自聚焦效应，在光束焦点附近的光强会大大提高。让我们来估计一下焦点处的场强。

设入射激光光强为 $I_0=(E_0^2c/8\pi)$，光束的初始半径为 a；焦点处的光强为 $I_f=(E_f^2c/8\pi)$，E_f 为焦点处场强，光束半径为 $f_{\min}a$，$f_{\min}$ 为焦点处的束宽因子。根据能量守恒有

$$I_0\pi a^2=I_f\cdot\pi(f_{\min}a)^2。$$

这里已经忽略了转化为等离子体波的能量，因为当$(\omega_p/\omega_0)\ll1$ 时，这部分能量是很小的[4]。于是可得

$$E_f=\frac{1}{f_{\min}}E_0$$

由于在焦点处 $f_{\min}\ll1$，故(E_f/E_0)可以很大。

在 Surfatron* 中，粒子的单位长度的能量增益由下式给出[5]

$$\frac{\Delta U}{\Delta y}=\frac{1}{\lambda_\mu}30\,[\mathrm{GeV\cdot cm^{-1}}]\frac{B_{\mathrm{kG}}}{n_{16}\lambda_\mu},\tag{25}$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta x}=0.1\,[\mathrm{GeV\cdot cm^{-1}}]\frac{B_{\mathrm{kG}}\sqrt{n_{16}}}{n_{16}\lambda_\mu}。\tag{26}$$

并且各参数的取值满足约束条件

$$\frac{B_{\mathrm{kG}}}{n_{16}\lambda_\mu}<\alpha,\tag{27}$$

式中 B_{kG} 是以 kG 为单位的磁场强度，λ_μ 是以 μm 为单位的波长，$\alpha=[E_p/(4\pi en_0/k_p)]$。

由于自聚焦使得等离子体中的光强大大提高，约束条件(27)可以在较小的入射光强下满足，从而在保持加速能量不变的条件下减弱对入射光强的要求。

表 2 给出在考虑和不考虑自聚焦效应两种情况下为了达到 1 TeV 加速能量所需入射光强的比较，I_t 是不考虑自聚焦所需的光强，I_t' 是考虑自聚焦所需的光强。

* 一种改进的拍频波加速器。

Table 2 $f_{min}=0.05$

$n_0(cm^{-3})$	$\lambda(\mu m)$	α	$I_4(W\cdot cm^{-2})$	$I_4^f(W\cdot cm^{-2})$
10^{17}	10	0.9	10^{15}	2.5×10^{12}
10^{18}	1	0.5	10^{16}	2.5×10^{13}
10^{20}	0.3	0.2	5×10^{16}	1.25×10^{14}

附 录

1. 关于(7)式的推导

一般的流体方程为(如不计阻尼和热压强)

$$mn\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}=-en\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right), \tag{1A}$$

式中 m 是电子质量, n 是电子密度, e 是电子电荷, c 是光速, $\boldsymbol{v}$ 是速度场, $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 是等离子体中的总的场强。

设入射的双频激光的场强为 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$, 频率分别为 ω_1、ω_2。当频率差 $|\omega_1-\omega_2|\simeq\omega_{p0}$ 时, 就会在等离子体中共振地激发起电子等离子体波。所以等离子体中的场强应由三部分组成: $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$ 及 $\boldsymbol{E}_p$($\boldsymbol{E}_p$ 是伴随等离子体波的纵向静电场)。设它们的形式为

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_{10}\exp[i(\omega_1t-\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r})],\ \boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{20}\exp[i(\omega_2t-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r})],\ \boldsymbol{E}_p=\boldsymbol{E}_{p0}\exp[i(\omega_{p0}t-\boldsymbol{k}_p\cdot\boldsymbol{r})]。 \tag{2A}$$

根据麦克斯韦方程, 与 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$ 及 $\boldsymbol{E}_p$ 对应的磁场为

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{ic}{\omega_1}\nabla\times\boldsymbol{E}_1,\quad \boldsymbol{B}_2=\frac{ic}{\omega_2}\nabla\times\boldsymbol{E}_2,\quad \boldsymbol{B}_p=\frac{ic}{\omega_{p0}}\nabla\times\boldsymbol{E}_p。 \tag{3A}$$

因此等离子体中的总场强可表为

$$\boldsymbol{E}=\sum_j E_j,\qquad \boldsymbol{B}=\sum_k\frac{ic}{\omega_k}\nabla\times\boldsymbol{E}_k。$$

求和指标 j, k 遍及 1, 2, p。根据一般的有质动力的推导方法, 我们将(1A)式改写为

$$mn\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=-en\boldsymbol{E}-\left[\frac{en}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}+mn\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right]。 \tag{4A}$$

并设等号右边方括号中的量为小量, 进行叠代。首先有

$$mn\frac{\partial\boldsymbol{v}_0}{\partial t}=-en\boldsymbol{E}=-en\sum_j\boldsymbol{E}_j,$$

解得 $\boldsymbol{v}_0=(ie/m)\sum_j(\boldsymbol{E}_j/\omega_j)$。将 $\boldsymbol{v}_0$ 代入(4A)式, 就得

$$mn\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=-en\boldsymbol{E}-n\left[\frac{e}{c}\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}+m\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\boldsymbol{v}_0\right]。 \tag{5A}$$

但是必须注意的是, $\boldsymbol{v}_0$ 应取 $(ie/m)\sum_j(\boldsymbol{E}_j/\omega_j)$ 的实部代入(5A)式。进一步在激光的一个周期内取平均; (5A)式就化为

$$mn\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=-en\boldsymbol{E}_p-n\left\langle\frac{e}{c}\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}+m\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\boldsymbol{v}_0\right\rangle。 \tag{6A}$$

(6A)式等号右边第二项就是所谓的有质动力。将(2A)、(3A)式代入并进一步作矢量运算简化成

$$\begin{aligned}
&n\left\langle\frac{e}{c}\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}+m\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\boldsymbol{v}_0\right\rangle\\
&=n\left\langle\frac{e^2}{m}\mathrm{Re}\Big[i\sum_j(\boldsymbol{E}_j/\omega_j)\Big]\cdot\nabla\mathrm{Re}\Big(i\sum_k\boldsymbol{E}_k/\omega_k\Big)+\frac{e^2}{m}\mathrm{Re}\Big(i\sum_j\boldsymbol{E}_j/\omega_j\Big)\times\mathrm{Re}\Big(i\sum_k\nabla\times\boldsymbol{E}_k/\omega_k\Big)\right\rangle\\
&=\frac{\omega_p^2}{\omega_{p0}^2}\nabla\left(\frac{E_p^2}{8\pi}\right)+\frac{\omega_p^2}{\omega_1^2}\nabla\frac{\langle E_1^2\rangle}{8\pi}+\frac{\omega_p^2}{\omega_2^2}\nabla\left(\frac{\langle E_2^2\rangle}{8\pi}\right)+\frac{\omega_p^2}{4\pi\omega_1\omega_2}\nabla\langle\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2\rangle。
\end{aligned} \tag{7A}$$

在(7A)式中，E_1、E_2 及 E_p 已经取为实数。所以，在双频激光驱动下的流体方程为

$$mn\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-en\boldsymbol{E}_p-\frac{\omega_p^2}{\omega_{p0}^2}\nabla\frac{E_p^2}{8\pi}-\frac{\omega_p^2}{\omega_1^2}\nabla\frac{\langle E_1^2\rangle}{8\pi}-\frac{\omega_p^2}{\omega_2^2}\nabla\frac{\langle E_2^2\rangle}{8\pi}-\frac{\omega_p^2}{4\pi\omega_1\omega_2}\nabla\langle \boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2\rangle。 \tag{8A}$$

如果计及热压强，则很容易得到

$$mn\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-en\boldsymbol{E}_p-\frac{\omega_p^2}{\omega_{p0}^2}\nabla\frac{E_p^2}{8\pi}-\frac{\omega_p^2}{\omega_1^2}\nabla\frac{\langle E_1^2\rangle}{8\pi}-\frac{\omega_p^2}{\omega_2^2}\nabla\frac{\langle E_2^2\rangle}{8\pi}-\frac{\omega_p^2}{4\pi\omega_1\omega_2}\nabla\langle \boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2\rangle-\nabla P。 \tag{9A}$$

(9A)式即文中(7)式的结果。

2. 关于(17)式的推导

在一维情况下，设入射的双频激光为平面波，且 $\omega_1\simeq\omega_2=\omega_0$，此外，再忽略 ω_p^2 与 ω_{p0}^2 的差别，并记 $E_0^2=E_{10}E_{20}$。于是(9A)式简化成

$$mn\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-en\boldsymbol{E}_p-\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_p^2}{8\pi}\right)-\boldsymbol{e}_z\frac{\Delta k\omega_{p0}^2E_0^2}{4\pi\omega_0^2}\sin(\Delta\omega t-\Delta kz)-\boldsymbol{e}_z\frac{\partial P}{\partial z}, \tag{10A}$$

式中 $\boldsymbol{e}_z$ 表示沿 z 方向的单位矢量。考虑到线性化的连续方程及其对 t 微分式和泊松(Poisson)方程，则有

$$\frac{\partial n_1}{\partial t}+n_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{11A}$$

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2}+n_0\nabla\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=0, \tag{12A}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}E_p=-4\pi en_1, \tag{13A}$$

式中 $n_1=n-n_0$。将(10A)式代入(12A)式得

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2}+\nabla\cdot\left[-\frac{en_0}{m}\boldsymbol{E}_p-\boldsymbol{e}_z\frac{1}{8\pi m}\frac{\partial}{\partial z}E_p^2-\boldsymbol{e}_z\frac{\Delta k\omega_{p0}^2E_0^2}{8\pi m\omega_0^2}\sin(\Delta\omega t-\Delta kz)-3T_e\nabla n_1\right]=0。 \tag{14A}$$

代入泊松方程，由(13A)式得

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2}+\omega_{p0}^2n_1-\frac{3T_0}{m}\frac{\partial^2 n_1}{\partial z^2}=\frac{1}{8\pi m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_p^2-\frac{(\Delta k)^2\omega_{p0}^2E_0^2}{8\pi m\omega_0^2}\cos(\Delta\omega t-\Delta kz)。 \tag{15A}$$

令 $T=\omega_{p0}t$, $z=k_pz$, $N=(n_1/n_0)$, $E=(E_p/E_0)$, $\beta=(3T_e/mc^2)$, $\alpha=(k_p^2E_0^2/8\pi mn_0\omega_0^2)$, $\delta=(4\pi en_0/k_pE_0)$。这时(13A)式和(15A)式变为

$$\frac{\partial E}{\partial z}=-\delta N, \tag{16A}$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial T^2}-\beta\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}+N=\alpha\left[\gamma\frac{\partial^2 E^2}{\partial z^2}-\cos\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}(z-T)\right]。 \tag{17A}$$

为了求(16A)、(17A)的波动解，我们作坐标变换

$$T'=T,\quad z'=z-T。$$

将方程(16A)、(17A)变换到(T', z')坐标系，并且令对 T' 的导数为零，合并之则有

$$(1-\beta)\frac{d^2E}{dz'^2}+E=-\alpha\delta\left[\gamma\frac{dE^2}{dz'}-\sin\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}z'\right]。 \tag{18A}$$

考虑到 $\beta\ll 1$，并记 $\epsilon=\alpha\delta$，为符号简单，仍用 z 代 z'，就得

$$\frac{d^2E}{dz^2}+E=\epsilon\left(-2\gamma E\frac{dE}{dz}+\sin\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}z\right)。 \tag{19A}$$

(19A)式即文中(17)式的结果。

3. 用 Poincare 小参数展开法求附录 2 中(19A)[即文中(17)式]周期解

对(19A)式考虑这样情况 $|1-(\Delta\omega/\omega_{p0})^2|\ll 1$，因此可以假设 $[1-(\Delta\omega/\omega_{p0})^2]=\alpha_0\epsilon$，其中 α_0 是 $O(1)$ 阶量。于是得到

$$\frac{d^2E}{dz^2}+\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)^2E=\epsilon\left(-2\gamma E\frac{dE}{dz}-\alpha_0E+\sin\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}z\right)。 \tag{20A}$$

设方程(20A)的周期解为

$$E=E_0+\epsilon E_1+\epsilon^2E_2+\cdots, \tag{21A}$$

式中 E_0, E_1, E_2, …都是周期函数。将(21A)式代入(20A)式，并按 ϵ 的幂次分解为下面的一系列方程

$$\frac{d^2E_0}{dz^2}+\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)^2E_0=0, \tag{22A}$$

$$\frac{d^2E_1}{dz^2}+\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)^2E_1=-2\gamma E_0\frac{dE_0}{dz}-\alpha_0E_0+\sin\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z, \tag{23A}$$

$$\frac{d^2E_2}{dz^2}+\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)^2E_2=-2\gamma\left(E_0\frac{dE_1}{dz}+E_1\frac{dE_1}{dz}\right)-\alpha_0E_1, \tag{24A}$$

$$\cdots\cdots$$

(22A)式的解为

$$E_0=M_0\cos\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z+N_0\sin\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z, \tag{25A}$$

式中常数 M_0, N_0 由 E_1 为周期函数这一条件定出。

将(25A)式代入(23A)式

$$\frac{d^2E_1}{dz^2}+\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)^2E_1=-\alpha_0N_0\cos\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z+(1-\alpha_0N_0)\sin\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z$$
$$-\alpha_0\gamma\left[-\frac{1}{2}M_0^2\sin2\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z+\frac{1}{2}M_0^2\sin2\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z+M_0N_0\cos2\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z\right]。 \tag{26A}$$

为了使 E_1 为周期函数，必须使 $\cos\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z$ 以及 $\sin\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z$ 前面的系数为零，即 $-\alpha_0M_0=0$, $1-\alpha_0N_0=0$。从而

$$\left.\begin{aligned}&M_0=0,\quad N_0=(1/\alpha_0),\\&E_0=\frac{1}{\alpha_0}\sin\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z。\end{aligned}\right\} \tag{27A}$$

将(27A)式代入(23A)式得

$$\frac{d^2E_1}{dz^2}+\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)^2E_1=-\frac{\gamma}{\alpha_0^2}\sin2\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z。 \tag{28A}$$

其解为

$$E_1=M_1\cos\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z+N_1\sin\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z+\frac{\gamma}{3\alpha_0^2}\left(\frac{\omega_{p0}}{\Delta\omega}\right)^2\sin2\left(\frac{\partial\omega}{\omega_{p0}}\right)z。 \tag{29A}$$

同样地，M_1、N_1 由 E_2 为周期函数这一条件定出。结果为

$$\left.\begin{aligned}&M_1=0,\quad N_1=\frac{\gamma^2}{3\alpha_0^3}\left(\frac{\omega_{p0}}{\Delta\omega}\right)^2,\\&E_1=\frac{\gamma^2}{3\alpha_0^3}\left(\frac{\omega_{p0}}{\Delta\omega}\right)^2\sin\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z+\frac{\gamma}{3\alpha_0^2}\left(\frac{\omega_{p0}}{\Delta\omega}\right)^2\sin2\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z。\end{aligned}\right\} \tag{30A}$$

用这种方法我们可以得到任意阶的解，这样，方程近似到 $O(\epsilon)$ 阶的解为

$$E=\frac{1}{\alpha_0}\left[1+\frac{\epsilon\gamma^2}{3\alpha_0^2}\left(\frac{\omega_{p0}}{\Delta\omega}\right)^2\right]\sin\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z+\frac{\epsilon\gamma}{3\alpha_0^2}\left(\frac{\omega_{p0}}{\Delta\omega}\right)^2\sin2\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z$$
$$\simeq\frac{1}{\alpha_0}\left(1+\frac{\epsilon\gamma^2}{3\alpha_0^2}\right)\sin\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z+\frac{\epsilon\gamma}{3\alpha_0^2}\sin2\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_{p0}}\right)z。 \tag{31A}$$

(31A)式即文中(18)式的结果。

参 考 文 献

[1] C. Joshi, C. E. Clayton *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1982, **48**, No. 13 (Mar), 874~877.
[2] C. E. Max; *Phys. Fluids*, 1976, **19**, No. 1 (Jan), 74~77.
[3] Н. Г. 马尔金著；"非线性振动理论中的李雅普诺夫和邦加来方法"，(中译本，科学出版社，1959)。
[4] Paul J. Channeu; «*Laser Acceleration of Particles*», (Los Alamos, 1982).
[5] T. Katsouleas, J. M. Dawson; *Phys. Rev. Lett.*, 1983, **51**, No. 5 (Aug), 392~395.

Resonant self-focusing of two-frequency laser beams in plasmas

XU TIEFONG AND XU ZHIZHAN
(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*)

(Received, April 1986; revised 21 August 1986)

Abstract

In this paper, we have studied theoretically the resonant Self-focusing of two-frequency laser beams in plasmas. From the plasma fluid equations, we have derived the expression of the nonlinear dieletric contants of plasmas driven by two-frequency laser beams and showed the effect of the ponderomotive force of the plasma waves. After giving the approximate solution of longitudinal electrostatic field, the characters of resonant Self-focusing are showed. Finally, the influence of resonant Self-focusing on particle acceleration in beat wave accelerator also be discussed.

KeyWords: Two-frequency laser, resonant self-focusing