第7卷 第1期
1987年1月
光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA
Vol. 7, No. 1
January, 1987

激光器纵模数与模竞争

潘少华
(中国科学院物理研究所)

提 要

本文用激光器半经典理论，特别是模竞争的观点，系统地阐述了纵模数同激光参量的关系。

一、引 言

激光器的模数是激光物理及其应用中的一个基本问题。文献[1]给出纵模数如下：

$$M=2\Delta\nu/\delta\nu, \tag{1}$$

式中 $\delta\nu=c/2L$ 代表纵模间隔，$2\Delta\nu$ 代表有效增益带宽。但是(1)式仅描述无源腔模数。激光器的实际模数与激光参量的关系，并非如此简单。本文用激光器半经典理论，系统地阐述这种关系。但本文所导出的关系是以常用的三阶非线性理论为基础的，故仅能较精确地描述相对激发程度在1.2之内的近阈值运转，而对远离阈值的情况则只有定性的参考意义。

二、模竞争与共存模数

泵浦作用使激光器中激活介质产生布居反转。布居反转使激光场得到放大增益，由于各激光模共享这种增益作用，各模之间存在着竞争，因此激光场中共存模的数目应与这种竞争效应有关。这两者间的关系宜用激光器半经典理论加以阐述，因为这种理论能较好地说明模之间的耦合和竞争。

根据激光器半经典理论[2,3]，可给出模约化光子数 Q_j 的运动方程如下：

$$dQ_j/dt=[\alpha_j(1-P\sum_k Q_k)-\gamma_j]Q_j-(1-P)\alpha_j Q_j^2, \tag{2}$$

式中 α_j 和 γ_j 分别表示增益和损耗系数；Q_j 与模光子数 n_j 的关系为 $Q_j=A_j n_j$。A_j 为自饱和系数同增益系数的比值，其典型值为 10^{-12}，它具有增益介质的荧光线型，因而对于 n_j 有显著值的所有激光模来说，A_j 可近似地看成是一个与频率 ν_j 无关的常数。所以下文仍简称 Q_j 为模光子数，而省略约化两字。(2)式中 P 为交叉饱和系数与自饱和系数的比值，它同激光器运转类型有关，例如单向行波腔 $P=1$ 和驻波腔 $P\approx 2/3$[4]。对 P 值的物理意义还可说明如下：如果将交叉饱和及自饱和分别看成是对其它模光子及对自身模光子的增益竞争效应，则 P 表示这两种竞争强度之比。显然，$(1-P)$ 值越大，这两种竞争强度之差越大，因而最高增益模越难以抑制邻近模，即多模共存的可能性就越大。(2)式右端以 $(1-P)$ 为比例

收稿日期：1986年3月18日；收到修改稿日期：1986年5月11日

系数的非线性项，就代表 j 模光子对自身模光子的附加饱和效应，即附加的竞争效能。

当激光器处于稳态运转时，$dQ_j/dt=0$，(2)式成为：

$$1-P\sum_k Q_k-(1-P)Q_j=\gamma_j/\alpha_j, \tag{3}$$

先讨论 $P\neq1$ 的一般情形，将 $P=1$ 的特例留在第 3 节讨论。将(3)式对 j 求和得到 $\sum_k Q_k$ 后，代回(3)式，求得光子数方程如下：

$$Q_j=\left\{\left[1-\frac{\gamma_j}{\alpha_j}-\left(1+\frac{1-P}{PM}\right)^{-1}\left[1-\left(\sum_M\frac{\gamma_k}{\alpha_k}\Big/M\right)\right]\right\}\Big/(1-P), \tag{4}$$

式中 M 是激光器模数，$\sum_M$ 表示对 M 个模求和。在稳态激光运转条件下，一般可忽略自发辐射的贡献而认为，由于模竞争效应，M 模以外的模光子数为零，即 $Q_\pm=Q(\nu_\pm)=0$，$\nu_\pm$ 对应于中心模左右两侧光子数降为零的频率。于是由(4)式得模数方程如下：

$$\frac{PM}{1-P}\left[\frac{\gamma_\pm}{\alpha_\pm}-\frac{1}{M}\sum_M\frac{\gamma_k}{\alpha_k}\right]=1-\frac{\gamma_\pm}{\alpha_\pm}, \tag{5}$$

现在以腔内不加调频元件且激活介质具有洛伦兹增益线型为例，这时

$$\gamma_j=\gamma_0;\quad \alpha_j=\alpha_0\Big/\left[1+\left(j\frac{\delta\nu}{\Delta\nu}\right)^2\right]。 \tag{6}$$

由上式得：

$$\frac{1}{M}\sum_M\frac{1}{\alpha_k}=\frac{1}{\alpha_0}\left[1+\frac{M^2-1}{12}\left(\frac{\delta\nu}{\Delta\nu}\right)^2\right], \tag{7}$$

由于零模以外的激光模数为 $M-1$，故左右两侧光子数为零的起始模频率为 $\nu_\pm=\nu_0\pm\left(\frac{M-1}{2}+1\right)\delta\nu$，将此关系代入(6)式得：

$$\alpha_\pm=\alpha_0\Big/\left[1+\left(\frac{M+1}{2}\frac{\delta\nu}{\Delta\nu}\right)^2\right], \tag{8}$$

运用(6)至(8)式于(5)式得相应的模数方程

$$\frac{M+1}{2}\left[\frac{PM(M+2)}{3(1-P)}+\frac{M+1}{2}\right]\left(\frac{\delta\nu}{\Delta\nu}\right)^2=\frac{\alpha_0}{\gamma_0}-1。 \tag{9}$$

此式为三次代数方程，易引用公式表出它的根。此外也不难直接运用(9)式作数值计算。但是为了更清楚地显示各种激光参量对模数 M 的依从关系，我们再给出 $M\gg1$ 时的简化式如下：

$$M=\left[\frac{6(1-P)}{P}\left(\frac{\alpha_0}{\gamma_0}-1\right)\left(\frac{\Delta\nu}{\delta\nu}\right)^2\right]^{1/3}。 \tag{10}$$

例如，固体介质的谱线展宽机制是原子与晶格的相互作用，称为碰撞展宽，这种机制给出洛伦兹线型[6]，如(6)式所示，故恰可作为检验(9)和(10)式的适当例子。以下为实用红宝石激光器的典型数据[6]：室温时荧光线宽 $2\Delta\lambda=5.5$ Å；波长 $\lambda=6943$ Å；谐振腔光程长 $L=75$ cm。由这些数据得纵模间隔 $\delta\lambda(=\lambda^2/2L)=3.214\times10^{-3}$ Å 和腔模数 $2\Delta\nu/\delta\nu$ $(=2\Delta\lambda/\delta\lambda)=1711$。将此值和 $P=2/3$(驻波腔)以及 $\alpha_0/\gamma_0=1.1\sim1.2$ 代入(9)式得 $M=59\sim75$(若改用(10)式计算则得 $M=60\sim76$，故差别很小)，或表为激光线宽 $(=M\delta\lambda)$ $=0.19\sim0.24$ Å。正如文献[6]所载，无选频元件的红宝石激光器的激光线宽，比荧光线宽减小一个数量级，按对红宝石泵浦的强弱，激光发射的线宽大约为 0.3～0.5 Å。本文基于三阶非线性理论，仅能对弱泵浦情形作比较(即上例只计算了比阈值高 0.1～0.2 的情形)。

从上述结果看，激光线宽的理论值(0.19～0.24 Å)稍许低于(即优于)实验值($\gtrsim$0.3 Å)，但两者至少在数量级上是符合的。

下面讨论选频腔的情形。当存在选频元件时，损耗系数为

$$\gamma_j=\gamma_0+\Delta\gamma_j, \tag{11}$$

式中 γ_0 相当于非选频腔的损耗，与模频率 ν_j 无关，它可表为[1]:

$$\gamma_0=(c/2L)T, \tag{12}$$

这里 $2L$ 表示光子在腔内单程往返的全长度，T 为激光器端面反射镜透过率总和。(11)式中的 $\Delta\gamma_j$ 为选频元件的附加损耗率，例如根据 F-P 标准具的透过率(或反射光栅的反射率)[7,8]，我们有

$$\Delta\gamma_j=(c/2L)[(\nu-\nu_0)/\Delta\nu]^2, \tag{13}$$

式中 $2\Delta\nu$ 与元件透过率(或反射率)半极大处的全宽度只相差一个接近于1的比例常数；ν_0 对于标准具是透过极大($T\approx1$)处的频率，对于反射光栅是反射极大($R\approx1$)处的频率。显然 ν_0 是可调的，以实现选频。将(12)和(13)式代入(11)式，并将 $\nu-\nu_0$ 表为 $j\delta\nu$ 得:

$$\gamma_j=\gamma_0[1+(j\delta\nu/\Delta\nu_{eff})^2],\quad \Delta\nu_{eff}=\sqrt{T}\Delta\nu。 \tag{14}$$

另外由于 $2\Delta\nu_{eff}$ 一般比激活介质的增益线宽窄得多，α_j 随频率的变化比 γ_j 的变化要缓慢得多，故对于选频腔可近似地认为 α_j 是与下标 j 无关的常数，

$$\alpha_j=\alpha_0。 \tag{15}$$

由(14)和(15)式得

$$\gamma_j/\alpha_j=(\gamma_0/\alpha_0)[1+(j\delta\nu/\Delta\nu_{eff})^2]。 \tag{16}$$

上式与前面曾经考虑过的洛伦兹增益介质的非选频腔的 γ_j/α_j，有相同的频率依从关系[见(6)式]，故(9)和(10)式仍然适用于本例，只需将该两式中的 $\Delta\nu$ 换成(14)式的 $\Delta\nu_{eff}$，并赋予相应的新意义即可。以下用选频腔的实际器件为例加以说明。文献[9]和[10]报道和分析了仅用一个反射光栅为选频元件的连续可调谐染料激光器，其参数和激光线宽如下：由光栅所决定的谱宽为 $2\Delta\lambda=46$ Å(文献[10]称之为无源的谱宽)，工作波长在 $\lambda=5520$ Å 附近；腔长 $L=12$cm；端面镜反射率 $R=95\%$(即透过率 $T=5\%$)；超过阈值后的激光光谱宽度实验值为0.6 Å(文献[10]称之为有源的光谱线宽)。由以上参数得 $\delta\lambda=1.27\times10^{-2}$Å，将此值以及上述的 T 和 $2\Delta\lambda$ 值代入(14)式得 $\Delta\nu_{eff}/\delta\nu(=\sqrt{T}\Delta\lambda/\delta\nu)=405$。将此数据以及 $P=2/3$ 和 $\alpha_0/\gamma_0=1.1\sim1.2$ 代入(9)式中($\Delta\nu/\delta\nu$)的位置，得该选频腔的激光模数 $M=35\sim45$，或将其表为激光线宽($=M\delta\lambda$)$=0.44\sim0.57$ Å，与上述实验值(0.6 Å)相符。

三、强竞争的极限情形

本节考虑 $P=1$ 的极限。当 $P\to1$ 时，第2节(4)式以及该式以下的处理不再适用，但我们可直接从运动方程(2)式出发。在此式中让 $P=1$，则 Q_j^2 的附加非线性项消失，于是方程有如下的形式积分:

$$Q_j(t)=Q_j(0)\exp\left\{\int_0^t[\alpha_j(1-Q_T(\tau))-\gamma_j]d\tau\right\}, \tag{17}$$

式中 $Q_T=\sum_k Q_k$。由(17)式得相对光子数与 t 的关系:

$$\frac{Q_j(t)}{Q_0(t)}=\frac{Q_j(0)}{Q_0(0)}\exp\left\{-\int_0^t[(\alpha_0-\alpha_j)(1-Q_T)+(\gamma_j-\gamma_0)]d\tau\right\}。\quad(18)$$

设 0 模是纯增益$[=\alpha_j(1-Q_T)-\gamma_j]$最大的模,例如上节所举例子,或者 $\gamma_j=\gamma_0$ 而 $\alpha_0>\alpha_j$[见(6)式],或者 $\alpha_j=\alpha_0$ 而 $\gamma_j>\gamma_0$[见(15)和(14)式],且由于在我们所用三阶非线性理论模型中恒设 $Q_T<1$, 故总有 $\alpha_0(1-Q_T)-\gamma_0>\alpha_j(1-Q_T)-\gamma_j$。因此从(18)式可见, 当 t 足够大时,

$$Q_j(t)/Q_0(t)\to 0,\quad j\neq 0。\quad(19)$$

由于光子数运动方程当 $t\to\infty$ 的解对应于激光器的稳态运转行为, 故上式表明当 $P=1$ 时, 例如固体激光器的单向行波运行,会导致单模的稳态输出。这是同实际情况完全相符的。例如文献[11]报道了一台 CW 泵浦的 Nd:YAG 环形激光器, 由于在腔内放置一个法拉第旋转器, 使正负两个方向的行波具有不同损耗率, 以实现单向行波运转, 其激光输出确是单纵模的。

在上节以及本节上面的讨论中,我们忽略了自发辐射对激光模数的影响,其实自发辐射也是一种使多模共存的机制。半经典理论本身不包含自发辐射项, 但我们可以根据全量子理论的启示, 将(2)式增益项中的 $n_j(=Q_j/A_j)$用(n_j+1)来代替, 本文不准备把作这样形式上改变后的方程写出并作详细的具体讨论, 只将研究结果给出如下: (1) 当 $P\neq 1$ 时, 交叉饱和同自饱和的差异在模共存中起主要作用, 自发辐射的影响可以忽略。(2) 即使对于 $P=1$ 的系统,也只有当模光子数 $n_j(j=0,\ \pm1,\ \cdots)$较低时,即激光器处于低能量状态时,自发辐射对模共存的贡献才值得重视。

四、对模数关系的物理分析及结语

从 $P<1$ 系统的模数关系,例如显式(10),可以推出如下的结论:

(1) 增益线宽 $\Delta\nu$ 或选频函数宽度 $\Delta\nu_{eff}$ 越大, 激光器模数 M 越大。这个规律同(1)式相类似。但本文的例子表明,M 同 $\Delta\nu$ 或 $\Delta\nu_{eff}$ 的关系, 一般并非象(1)式那样呈简单的一次幂关系, 而且还同增益线型或选频函数线型有关。例如, 根据棱镜透过率[7]可知 $\Delta\gamma_j=(c/2L)|\nu-\nu_0|/\Delta\nu$,从而不难求出在 $M\gg 1$ 时,M 正比于 $\Delta\nu_{eff}$ 的 1/2 幂(对此关系,本文从略),与反射光栅(或标准具)的正 2/3 幂关系[见(10)式]不同。

(2) $[(\alpha_0/\gamma_0)-1]$ 越大, 激光器模数 M 越大。(α_0/γ_0-1)表示离开激光阈值的程度,即所谓相对激发水平。$[(\alpha_0/\gamma_0)-1]$同 M 的上述关系, 是由于随着相对激发程度的提高,会使更多模具有正的有效净增益系数, 即 $\alpha_j(1-PQ_T)-\gamma_j>0$。换句话说, 随着激光器泵浦能量的提高, α_j 普遍提高了, 因而有效增益 $\alpha_j(1-PQ_T)$大于损耗 γ_j 的模增多, 这样的模在激光建立过程中是得以增长的。

(3) $(1-P)$越大, 激光器模数 M 越大, 因为参数$(1-P)$是衡量模的互竞争同自竞争能力之差异程度的,而正是这种差异削弱了高增益模的优势,它是模共存的主要机制。

以上第三点论断对于 $P<1$ 和 $P\to 1$ 的系统同样有效, 即 $P<1$ 的系统倾向于多模共存;而与此相反,交叉饱和同自饱和一致的 $P=1$ 的系统则易于获得单模输出。

参 考 文 献

[1] 激光物理学编写组;《激光物理学》,(上海人民出版社,1975),40,158.
[2] M. Sargent III *et al.*; 《*Laser Physics*》, (Addison-Wesley Publishing Co., London etc, 1974), 133.
[3] 潘少华;《物理学报》,1981, **30**, No. 8 (Aug), 1067。
[4] 潘少华;《物理学报》,1981, **30**, No. 9 (Sep), 1270.
[5] O. Svelto; 《*Principles of Lasers*》, (Plenum Press, New York, 1982), 50.
[6] W. 克希奈尔;《固体激光工程》,(科学出版社,北京,1983),71, 223, 230。
[7] P. Flamant; *Appl. Opt.*, 1978, **17**, No. 6 (Mar), 955.
[8] M. 玻恩和 E. 沃耳夫;《光学原理》,(科学出版社,北京, 1978), 429, 524.
[9] B. H. Soffer, B. B. McFarland; *Appl. Phys. Lett.*, 1967, **10**, No. 10 (May), 266.
[10] F. P. Schäfer;《激光器》(《激光手册》第二分册),(F. T. 阿雷克和 E. O. 舒尔茨-杜波依斯,科学出版社,北京,1980),410.
[11] A. R. Clobes, M. J. Brienza; *Appl. Phys. Lett.*, 1972, **21**, No. 6 (Sep), 265.

Longitudinal mode number of lasers and mode competition

PAN SHAOHUA
(*Institute of Physics, Academia Sinica, Beijing*)

(Received 18 March 1986; revised 11 May 1986)

Abstract

By employing the semiclassical theory of lasers, relations between mode number and laser parameters are described. These parameters include the relative population difference, the line-width and line-shape of the transmission of intracavity tuning elements, and the difference between self-saturation and cross-saturation coefficients, etc. A detailed physical analysis based on mode competition theory is given.