第6卷 第5期 光学学报 Vol. 6, No. 5
1986年5月 ACTA OPTICA SINICA May, 1986

微分追迹公式在自动设计中的应用

徐福侯 王 琛
(上海光学仪器研究所)

提 要

在微机上我们使用Feder提出的微分追迹公式证实了用精确求导方法求取微分矩阵优于传统的差分方法，不仅其结果精确而且在多可变参数的情况下运算速度快，应用于自动设计程序中还具有良好的收敛效果。

一、前 言

在大多数光学自动设计方法中，都要计算像差对系统结构参数的导数。本文利用 Feder 提出的微分追迹公式替代传统的有限差分方法克服了差分方法中选取微分改变量的困难和差分导数的不确定性弊端。通过算例证明本方法不仅具有精确求导的优点，具运算速度也快，例如对一个光学系统除材料之外的全部参数均作为可变参数，则计算微分距阵 A 的速度要比差分方法提高 3.5 倍。

微分追迹公式导出的都是光线对结构参数的导数。本文根据像差理论推导了象差对结构参数的导数，证明它们分别是光线对结构参数的导数的线性组合。

最后在适应法自动设计程序中用本方法求微分矩阵 A 与传统的差分方法求 A 矩阵作了对比证明用本方法其收敛效果明显提高。

二、微分追迹公式

微分追迹公式是一种计算光线对系统结构参数的导数的精确方法，它们都是以显函数形式表示的。

1. 近轴光线的微分追迹公式

无疑，近轴光线的微分追迹公式是最简单的一种情况。任意一根近轴光线总可以用两个独立变量来表示。假定近轴光线的起始角与物方折射率之乘积用 $n_0\alpha_0$ 表示，近轴光线在参考面上的起始高度用 y_1 表示，则近轴光线的追迹公式可以用下列矩阵表示

$$\begin{pmatrix} y_{F+1} \\ n_F\alpha_F \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ n_0\alpha_0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

式中 $A=T_FR_FT_{F-1}R_{F-1}\cdots T_1R_1$。而 R 为折射矩阵，T 为传递矩阵。且分别为

$$R_i=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_i-n_{i-1})C_i & 1 \end{pmatrix},\quad T_i=\begin{pmatrix} 1 & -t_i/n_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

收稿日期：1985年11月26日；收到修改稿日期：1986年2月4日

式中 n_{i-1}、n_i、C_i 分别为第 i 个面的物方折射率、像方折射率、曲率，t_i 为第 i 个面后面的轴向间矩，F 为总面数。可以证明近轴光线对第 i 个面的曲率 C_i 和厚度 t_i 的导数分别为

$$\begin{pmatrix} dy_{F+1}/dC_i \\ d(n_F\alpha_F)/dC_i \end{pmatrix} = A_i \begin{pmatrix} 0 \\ d(n_i\alpha_i)/dC_i \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} dy_{F+1}/dt_i \\ d(n_F\alpha_F)/dt_i \end{pmatrix} = \overline{A}_{i+1} \begin{pmatrix} dy_{i+1}/dt_i \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

式中 $A_i = T_F R_F \cdots T_i$，$\overline{A}_{i+1} = T_F R_F \cdots T_{i+1} R_{i+1}$。

2. 实际光线的微分追迹公式

实际光线的微分追迹公式 Feder[1] 已作了系统的推导。任意一根实际光线总可以用四个独立变量表示。故它对系统结构参数的导数可以表示如下为

$$\frac{dr}{d\rho} = \begin{pmatrix} dy/d\rho \\ dz/d\rho \\ dY/d\rho \\ dZ/d\rho \end{pmatrix}, \tag{5}$$

式中 y，z 为光线与参考面的交点座标，Y，Z 为光线的方向余弦，ρ 为系统的结构参数，因此实际光线对第 i 个曲率 C_i 的精确导数是

$$\begin{pmatrix} dy_{F+1}/dC_i \\ dz_{F+1}/dC_i \\ dY_F/dC_i \\ dZ_F/dC_i \end{pmatrix} = \overline{A}_i \begin{pmatrix} \partial y_i/\partial C_i \\ \partial z_i/\partial C_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial Y_i/\partial C_i \\ \partial Z_i/\partial C_i \end{pmatrix} + \overline{A}_{i+1} \begin{pmatrix} \partial y_{i+1}/\partial C_i \\ \partial z_{i+1}/\partial C_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}。 \tag{6}$$

注意方向余弦的下标 Y_i，Z_i 表示第 i 个面折射后的方向余弦，而 R 为折射矩阵，T 为传递矩阵。

$$\left.\begin{aligned} R_{i+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \partial Y_{i+1}/\partial y_{i+1} & \partial Y_{i+1}/\partial z_{i+1} & \partial Y_{i+1}/\partial Y_i & \partial Y_{i+1}/\partial Z_i \\ \partial Z_{i+1}/\partial y_{i+1} & \partial Z_{i+1}/\partial z_{i+1} & \partial Z_{i+1}/\partial Y_i & \partial Z_{i+1}/\partial Z_i \end{pmatrix}, \\ T_i &= \begin{pmatrix} \partial y_{i+1}/\partial y_i & \partial y_{i+1}/\partial z_i & \partial y_{i+1}/\partial Y_i & \partial y_{i+1}/\partial Z_i \\ \partial z_{i+1}/\partial y_i & \partial z_{i+1}/\partial z_i & \partial z_{i+1}/\partial Y_i & \partial z_{i+1}/\partial Z_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

同样对厚度 t_i 亦有

$$\begin{pmatrix} dy_{F+1}/dt_i \\ dz_{F+1}/dt_i \\ dY_F/dt_i \\ dZ_F/dt_i \end{pmatrix} = \overline{A}_{i+1} \begin{pmatrix} \partial y_{i+1}/\partial t_i \\ \partial z_{i+1}/\partial t_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}。 \tag{8}$$

三、像差处理方法

为了得到自动设计程序中的微分矩阵，必须化实际光线对系统结构参数的导数为像差

对系统结构参数的导数。其中以正弦差和像散为例说明它的一般方法。

根据像差理论，几何像差与波像差有如下关系式，初级为

$$\left.\begin{aligned}2nuT_{Ay}&=S_{\mathrm{I}}\xi(\xi^2+\eta^2)+S_{\mathrm{II}}\bar{y}(3\xi^2+\eta^2)+(3S_{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{IV}})\bar{y}^2\xi+S_{\mathrm{V}}\bar{y}^3,\\2nuT_{Az}&=S_{\mathrm{I}}\eta(\xi^2+\eta^2)+S_{\mathrm{II}}\bar{y}(2\xi\eta)+(S_{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{IV}})\bar{y}^2\xi。\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

二级为

$$\left.\begin{aligned}2nuT_{Ay}=&S_{\mathrm{I}}^{\mathrm{I}}\xi(\xi^2+\eta^2)^2+S_{\mathrm{II}}^{\mathrm{II}}\bar{y}(5\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)+S_{\mathrm{I}}^{\mathrm{III}}\bar{y}^2(5\xi^3+3\xi\eta^2)+S_{\mathrm{I}}^{\mathrm{IV}}\bar{y}^2\xi(\xi^2+\eta^2)\\&+S_{\mathrm{II}}^{\mathrm{III}}\bar{y}^3(5\xi^2+\eta^2)+S_{\mathrm{II}}^{\mathrm{IV}}\bar{y}^3(3\xi^2+\eta^2)+\frac{1}{2}(5S_{\mathrm{III}}^{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{III}}^{\mathrm{IV}})\bar{y}^4\xi+S_{\mathrm{V}}^{\mathrm{V}}\bar{y}^5,\\2nuT_{Az}=&S_{\mathrm{I}}^{\mathrm{I}}\eta(\xi^2+\eta^2)^2+S_{\mathrm{II}}^{\mathrm{II}}\bar{y}(4\xi\eta)(\xi^2+\eta^2)+S_{\mathrm{I}}^{\mathrm{III}}\bar{y}^2(\eta^3+3\xi^2\eta)+S_{\mathrm{I}}^{\mathrm{IV}}\bar{y}^2\eta(\xi^2+\eta^2)\\&+S_{\mathrm{II}}^{\mathrm{III}}\bar{y}^3(2\xi\eta)+S_{\mathrm{II}}^{\mathrm{IV}}\bar{y}^3(2\xi\eta)+\frac{1}{2}(S_{\mathrm{III}}^{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{III}}^{\mathrm{IV}})\bar{y}^4\eta。\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

式中 $\bar{y}$ 为视场规化系数，ξ、η 为孔径规化系数，u 为数值孔径，T_{Ay}、T_{Az} 分别表示实际光线在像面上 y 向和 z 向的相对于高斯像点的高度。由弧矢慧差定义 $K_s=(T_{Ay}-T_{Ay\rho})_\xi=0$。代入(10)式得

$$K_s=S_{\mathrm{II}}\bar{y}^2\eta^2+S_{\mathrm{II}}^{\mathrm{II}}\bar{y}\eta^4+(S_{\mathrm{II}}^{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{II}}^{\mathrm{IV}})\bar{y}^3\eta^2。\tag{11}$$

根据文献[2]

$$2j(OSC)=S_{\mathrm{II}}\eta^2+S_{\mathrm{II}}^{\mathrm{II}}\eta^4,\tag{12}$$

由(11)式和(12)式可得

$$OSC=\frac{1}{y_0}\left.\frac{\partial K_s}{\partial\bar{y}}\right|_{\bar{y}\to0},\tag{13}$$

式中 y_0 为理想像高。对于像散，同样由文献[2]可知，它与波像差的关系是

$$\left.\begin{aligned}2nu^2x_t&=\bar{y}^2(3S_{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{IV}})+\frac{1}{2}\bar{y}^4(5S_{\mathrm{III}}^{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{III}}^{\mathrm{IV}}),\\2nu^2x_s&=\bar{y}^2(S_{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{IV}})+\frac{1}{2}\bar{y}^4(S_{\mathrm{III}}^{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{III}}^{\mathrm{IV}})。\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

由(10)式取 $\eta=0$ 时的 T_{Ay} 分量为

$$\begin{aligned}2nuT_{Ay}=&S_{\mathrm{I}}\xi^3+S_{\mathrm{II}}\bar{y}(3\xi^2)+(3S_{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{IV}})\bar{y}^2\xi+S_{\mathrm{V}}\bar{y}^3+S_{\mathrm{I}}^{\mathrm{I}}\xi^5+S_{\mathrm{II}}^{\mathrm{II}}\bar{y}(5\xi^4)+S_{\mathrm{I}}^{\mathrm{III}}\bar{y}^2(5\xi^3)\\&+S_{\mathrm{I}}^{\mathrm{IV}}\bar{y}^2\xi^3+S_{\mathrm{III}}^{\mathrm{III}}\bar{y}^3(5\xi^2)+S_{\mathrm{II}}^{\mathrm{IV}}\bar{y}^3(3\xi^2)+\frac{1}{2}(5S_{\mathrm{III}}^{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{III}}^{\mathrm{IV}})\bar{y}^4\xi+S_{\mathrm{V}}^{\mathrm{V}}\bar{y}^5。\end{aligned}\tag{15}$$

$$\therefore\qquad\left.\frac{\partial 2nuT_{Ay}}{\partial\xi}\right|_{\xi\to0}=(3S_{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{IV}})\bar{y}^2+\frac{1}{2}(5S_{\mathrm{III}}^{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{III}}^{\mathrm{IV}})\bar{y}^4。\tag{16}$$

与(14)式比较可得

$$x_t=\frac{1}{u}\frac{\partial T_{Ay}}{\partial\xi}\bigg|_{\substack{\xi=0\\\eta\to0}},\tag{17}$$

同理

$$x_s=\frac{1}{u}\frac{\partial T_{Ay}}{\partial\eta}\bigg|_{\substack{\xi=0\\\eta\to0}}。\tag{18}$$

最后像差对结构参数的导数将是光线对结构参数的导数的线性组合。例如(17)式亦可写成差分形式

$$x_t=\frac{1}{u}\left.\frac{y_{\eta_1}-y_{\eta_2}}{(\eta_1-\eta_2)}\right|_{(\eta_1-\eta_2)\to0},\tag{19}$$

对上式求导为

$$\frac{\partial x_t}{\partial \rho}=\frac{1}{u}\frac{[(\partial y_{\eta_1}/\partial \rho)-(\partial y_{\eta_2}/\partial \rho)]}{(\eta_1-\eta_2)}\Bigg|_{(\eta_1-\eta_2)\to 0}。\tag{20}$$

四、结果与讨论

1. 几种方法的比较

利用微分追迹公式可以得到任意一根实际光线对系统结构参数的微分导数值。显然，当选取的实际光线的孔径很小时，其值应与近轴近似的微分导数公式得到的值相一致。这就是表1(I部)中第一行所列的微分导数值与括号内打"*"号的近轴近似微分导数值。为了验证微分导数值，我们选择了几种不同的参数改变量进行实际光线的追迹计算并与微分导数值所预见的理论值作比较，由表1(I部)可知在小孔径情况下实际值与理论值是极为一致的。由表1(II部)可知在大孔径情况下对于微小的参数改变量两者也是一致的。

Table 1　Comparison of results

Coordinates in pupil	Direction cosines	derivative value	parameter uairation	actual value (Δy)	theoretical value (Δy)
I (0, 1, 0)	I (1, 0, 0)	$\frac{dy}{dC_1}=-100.033$ (-100.000^*)	$\Delta C_1=0.001$ $\Delta C_1=0.005$ $\Delta C_1=0.01$	−0.1000 −0.5001 −1.0005	−0.1000 −0.5002 −1.0003
		$\frac{dy}{dC_2}=98.390$ (98.333^*)	$\Delta C_2=0.001$ $\Delta C_2=0.005$ $\Delta C_3=0.01$	0.0984 0.4919 0.9844	0.0984 0.4920 0.9839
		$\frac{dy}{dt}=-0.0099$ (-0.0099^*)	$\Delta t=1$ $\Delta t=10$	−0.0099 −0.0992	−0.0099 −0.0992
II (0, 40, 0)	II (1, 0, 0)	$\frac{dy}{dC_1}=-10579.5$ (-4000.0^*)	$\Delta C_1=0.0001$ $\Delta C_1=0.001$ $\Delta C_1=-0.01$	−1.066 −11.471 68.145	−1.058 −10.579 105.795
		$\frac{dy}{dC_2}=15833$ (3933.3^*)	$\Delta C_2=-0.0001$ $\Delta C_2=-0.001$ $\Delta C_2=0.01$	−1.608 −18.911 74.527	−1.583 −15.833 158.33
		$\frac{dy}{dt}=-0.57$ (-0.397^*)	$\Delta t=1$ $\Delta t=10$	−0.570 −5.70	−0.570 −5.70

* Paraxial approximate derivative value

表2列出了用传统的差分方法求导，它的值随差分改变量而变，表现出明显的不确定性。从理论上说，当差分改变量取极小时，差分导数值就是微分导数值，但实际上由于计算机的舍入误差的影响，并不是差分改变量越小越接近微分导数值。如表2(a)中所列 $\Delta C\simeq 4\times 10^{-6}$ 时差分导数值最接近微分导数值。我们称此为最适差分值。但是从表2(b)中看到，此时的最适差分值为 $\Delta C=1\times 10^{-2}$，由此可见即对同一结构参数，不同的实际光线，它的最适差分值是不一样的，这就使得在用差分方法求取 A 距阵时出现一个不可克服的困难。或者说用差分方法无法求得一个精确的微分矩阵。而用微分方法则完全避免了这种问题。

Table 2 Comparison of the exact differentiation and difference method

(a) Coordinates in pupil (0, 40, 0), Direction cosines(1, 0, 0)

ΔC	2×10^{-3}	1×10^{-3}	1×10^{-4}	1×10^{-5}	7.5×10^{-6}	5×10^{-6}	4×10^{-6}	3×10^{-6}	1×10^{-6}	dy/dC
$\Delta y/\Delta C$	−47244	−30982	−25105	−24692	−24681	−24664	−24646	−24638	−24702	−24627

(b) Coordinates in pupil (0, 0.01, 0), Direction cosines(1, 0, 0)

ΔC	1×10^{-1}	5×10^{-1}	1×10^{-2}	1×10^{-3}	1×10^{-4}	1×10^{-5}	dy/dC
$\Delta y/\Delta C$	−1.0000004	−1.00000022	−0.9999999	−1.0000011	−0.9999890	−1.0001200	−0.9999999

表 1 和表 2 中的计算值均对应同一光学系统。它的结构参数是，半径 $R_1=100$, $R_2=-100$, 厚度 $t=5$, 离参考像面的距离为 200, 折射率为 1.5。

2. 微分矩阵的运算速度

为便于比较，我们只计算一种球差，取一个七个面的系统，六个可变半径，五个可变厚度，形成一个微分矩阵，用微分方法要比用差分方法快约 3.5 倍。由此可见在多可变参数的情况下其运算速度是可以大大加快的。

3. 在自动设计程序中的收敛效果

我们用上述方法于适应法自动设计程序中，通过实例证明，由于用微分方法求取的微分矩阵精确，致使达到终介的大循环次数明显减少。表 3 给出了一个 25×/0.65 复消色差显微物镜的例子，用差分方法大循环次数为 27 次而用微分方法次数减少到 16 次。表 3 列出了它们各自达到的相接近的终介情况。

Table 3 Comparison of two methods for 25×/0.65 apochromatic microscope objective

methods	field of view or aperature	Aberration						
		L_{AD}	L_{AC}	L_{AF}	OSC	x_S	x_t	T_m
Different	1	0.0009	0.0001	0.0013	0.0010	0.0133	0.0052	−0.0055
	0.7	0.0005	−0.0001	0.0000	−0.0005	0.0067	0.0042	−0.0039
	0.3	0.0002	−0.0005	−0.0002	−0.0002	0.0012	0.0008	−0.0016
Differential	1	0.0007	−0.0004	0.0014	0.0010	0.0121	0.0046	−0.0046
	0.7	0.0002	−0.0006	0.0002	−0.0005	0.0061	0.0024	−0.0033
	0.3	0.0002	−0.0008	0.0003	−0.0002	0.0004	0.0011	−0.0014

参 考 文 献

[1] D. P. Feder; *J. O. S. A.*, 1968, **58**, 1494.
[2] 王之江;《光学设计理论基础》,(科学出版社,北京,1965).

Application of differential ray tracing equations in automatic design

XU FUHOU AND WANG CHEN
(*Shanghai institute of Optical Instruments*)

(Received 2 July 1985; revised 4 February 1986)

Abstract

Using the DRT equations proposed by Feder on microcomputer, we have proved that in evaluating a differential matrix the differential method is better than the difference method. It's advantages include high precision, high computing speed in the case of several variables and good convergence ability in automatic design programs.