

多光子光学双稳性的研究

翁兆恒

(中国科学院长春光学精密机械研究所)

马爱群 李淳飞

(哈尔滨工业大学)

提 要

本文给出了描述多光子光学双稳性和多光子激光的统一量子力学模型,得到了多光子光学双稳性和多光子激光的态方程,给出了计算多光子光学双稳性阈值的方法。对势函数进行分析之后,得到了静态稳定性判据和开关特性的物理解释,划分了多光子光学双稳特性曲线上的稳定区域和亚稳定区域,指出多光子光学双稳态实际上是多光子光学稳-亚稳双态。本文还讨论了多光子光学双稳态和多光子激光器中的相变问题。

一、引 言

近年来,光学双稳性引起了人们的广泛重视和研究。单光子近共振情况下的光学双稳性的研究集中了人们的大量工作。人们也着眼于双光子光学双稳性的研究,并从实际上观察到双光子三能级近共振情况下的双稳现象,从理论上作了相当的讨论。只有少数文章涉及多光子光学双稳性^[1],但并未求其阈值和给出稳定态的稳定性判据的证明。

本文应用量子力学方法,对随机量子过程进行热力学极限变换后,得到了稳态下的多光子光学双稳性和多光子激光的态方程。应用求函数极值的理论计算了多光子光学双稳性的阈值,同时确定了双稳区间和开关点。应用哈肯的协同作用论,求出了多光子光学双稳性和多光子激光的势函数,从而给出了多光子光学双稳性静态稳定性的判据的证明,对光学双稳性的开关特性作出了物理解释,划分了双稳特性曲线上的稳定区域和亚稳定区域,指出多光子光学双稳态实际上是多光子光学稳-亚稳双态。还讨论了多光子光学双稳态和多光子激光器中的相变问题。

二、多光子光学双稳性和多光子激光的统一量子力学模型

假设我们研究的系统是一个置于环形腔之中的 N 个理想的二能级原子所组成的系统,并假定同辐射场发生 n 光子共振,即同时发射或吸收 n 个光子。采用如下量子力学模型描述这个二能级原子系统。

在外场驱动下 N 个二能级原子组成的系统同单模辐射场发生 n 光子共振作用的哈密顿量为^[2]:

收稿日期: 1985年1月24日

$$H = \omega a^+ a + u \sum_{i=1}^N \sigma_{i3} + \sum_{i=1}^N (g_i a^n \sigma_i^+ + g_i^* a^{+n} \sigma_i^-) + i(\varepsilon a^+ - \varepsilon^* a), \quad (1)$$

$\hbar \equiv C = 1$, $u = n\omega$; 此处 a^+ 、 a 是频率为 ω 的光子的产生和消灭算符, σ_{i3} 、 σ_i^+ 是描述二能级原子的 $su(2)$ 算符, 它们满足下列关系:

$$\begin{aligned} [a, a^+] &= 1, \quad [\sigma_{i3}, \sigma_i^+] = \pm \delta_{ij} \sigma_i^+, \\ [\sigma_i^+, \sigma_i^-] &= 2\delta_{ij} \sigma_{i3}; \end{aligned} \quad (2)$$

ε 、 ε^* 是驱动场算符, u 表示能级之间的能量差, g_i 为耦合常数, 可以写作如下形式:

$$g_i = N^{-\frac{1}{2}} \cdot g \exp(in\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{x}_i), \quad (3)$$

式中, \mathbf{x}_i 是第 i 个原子的位置矢量, \mathbf{g}_i 是场的波矢。

描述在光场作用下的二能级原子系统演变的 von Neumann 方程为:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + L(\rho),$$

此处 ρ 是密度矩阵。耗散 L 描述泵浦和原子系统的驰豫过程, 以及腔的损耗, 等等。 L 具有如下形式:

$$L = L_f + L_0, \quad (4)$$

此处 L_f 和 L_0 分别和场、原子系统相对应, 具体表为:

$$\begin{aligned} L_f(\rho) &= \gamma_l([a, \rho a^+] + [a\rho, a^+]) + \gamma_r([a^+, \rho a] + [a^+ \rho, a]), \\ L_0(\rho) &= \sum_{i=1}^N \{ \Gamma_{l1}([\sigma_i^-, \rho \sigma_i^+] + [\sigma_i^- \rho + \sigma_i^- \rho + \sigma_i^+]) + \Gamma_{r1}([\sigma_i^+, \rho \sigma_i^-] \\ &\quad + [\sigma_i^+ \rho, \sigma_i^-]) - \lambda_i[\sigma_{i3}, [\sigma_{i3}, \rho]] \}. \end{aligned} \quad (5)$$

在原子是均匀的假定下, Γ_{l1} , Γ_{r1} 和 λ_i 不依赖于 i , 因而 $\Gamma_l \equiv \Gamma_{l1}$, $\Gamma_r \equiv \Gamma_{r1}$, $\lambda \equiv \lambda_i$ 。任意算符的海森伯运动方程为:

$$\dot{x} = i[H, x] + L^*(x), \quad (6)$$

其中 L^* 满足 $\text{tr}\{xL(\rho)\} = \text{tr}\{L^*(x)\rho\}$ 。那么诸算符的运动方程为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -(\gamma_l - \gamma_r + i\omega)a + \varepsilon - in \sum_{i=1}^N g_i^* a^{+n-1} \sigma_i^-, \\ \dot{\sigma}_i^- &= -(\Gamma_l + \Gamma_r + \lambda + iu)\sigma_i^- + 2g_i a^n \sigma_{i3}, \\ \dot{\sigma}_{i3} &= -2(\Gamma_l + \Gamma_r)\sigma_{i3} + (\Gamma_r + \Gamma_l) + i(g_i^* a^{+n} \sigma_i^- - g_i a^n \sigma_i^+). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

定义: $s^{\pm}(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp[\pm in(\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_i - \Omega t)] \sigma_i^{\pm}$, $s_3(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{i3}$, $a(N) = \frac{a}{\sqrt{N}} \exp(i\Omega t)$, $a^+(N) = \frac{a^+}{\sqrt{N}} \exp(-i\Omega t)$, $E = \frac{\varepsilon}{K\sqrt{N}} \exp(i\omega t)$, 这样 (7) 式就表为如下形式: $\dot{a}(N) = -[K + i(\omega - \Omega)]a(N) + KE - ig^* a^{+n-1}(N)s^-(N)$, $\dot{s}^-(N) = -(\gamma_l + i(u - n\omega))s^-(N) + 2ig a^n(N)s_3(N)$, $\dot{s}_3(N) = -\gamma_r[s_3(N) - \eta] + i[g^* a^{+N}(N)s^-(N) - g a^N(N)s^+(N)]$ 。

其中: $K \equiv \gamma_l + \gamma_r$ 是腔带宽, $\gamma_l \equiv \Gamma_l + \Gamma_r + \lambda$ 是横向原子均匀线宽, $\gamma_r \equiv 2(\Gamma_l + \Gamma_r)$ 是纵向原子线宽, $\eta \equiv \frac{\Gamma_l - \Gamma_r}{2(\Gamma_l + \Gamma_r)}$, $|\eta| \leq \frac{1}{2}$, 粒子数反转。在 $\omega = \Omega$ 的假定下, 对随机量子过程采用如下热力学极限变换, 即定义:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle a(N) \rangle, \quad s = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle s^-(N) \rangle, \\ s_3 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle s_3(N) \rangle, \quad \langle A \rangle = \text{tr}(A\rho), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\langle AB \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle \quad (A, B \text{ 代表诸算符}),$$

从而有如下 O 数方程:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= -K(\alpha - E) - i n g^* (\alpha^*)^{n-1} s, \\ \dot{s} &= -\gamma_{\perp} s + 2i g \alpha^n s_3, \\ \dot{s}_3 &= -\gamma_{\parallel} (s_3 - \eta) + i g^* (\alpha^*)^n s - i g \alpha^n s^* \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

三、稳态解和阈值的求法

在方程 (1.10) 中, 令: $\dot{\alpha} = \dot{s} = \dot{s}_3 = 0$, 并令 $\alpha = \sqrt{N_{sn}} x e^{i\Omega t}$, $E = \sqrt{N_{sn}} y e^{i\Omega t}$, 其中 $N_n = \sqrt{\frac{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel}}{4 |g|^2}}$, $\bar{\eta}_n = \frac{2KN_{sn}}{n\gamma_{\parallel}}$, 不难求得:

$$y = x - \frac{\eta}{\bar{\eta}_n} \cdot \frac{x^{2n-1}}{1+x^{2n}}, \quad (10)$$

这就是多光子光学双稳性和多光子激光的态方程。

当 $n=1$, $2\eta = -1$ 时, (10) 是单光子光学双稳性的态方程; 当 $n=1$, $\eta > 0$ 时, (10) 是有注入信号的单光子激光的态方程; 当 $n=1$, $\eta > 0$, $y=0$ 时, (10) 是无注入信号的单光子激光的态方程; 当 $n \neq 1$, $2\eta = -1$ 时, (10) 是多光子光学双稳性的态方程; 当 $n \neq 1$, $\eta > 0$ 时, (10) 是有注入信号的多光子激光的态方程; 当 $n \neq 1$, $\eta > 0$, $y=0$ 时, (10) 是无注入信号的多光子激光的态方程。

显然, 存在光学双稳性必须满足:

$$dy/dx = 0. \quad (11)$$

因而有:

$$\frac{\bar{\eta}_n}{\eta} = \frac{(2n-1)x^{2n-3} - x^{4n-2}}{(1+x^{2n})^2}. \quad (12)$$

为求出 $\bar{\eta}_n/n$ 的极值, 令 $\frac{d(\frac{\bar{\eta}_n}{\eta})}{dx} = 0$, 因而有方程:

$$x^{2n-3}(1+x^{2n})\{2x^{4n} + (-4n^2 - 6n + 4)x^{2n} + (4n^2 - 6n + 2)\} = 0. \quad (13)$$

显然方程:

$$2x^{4n} + (-4n^2 - 6n + 4)x^{2n} + (4n^2 - 6n + 2) = 0 \quad (14)$$

的根决定 (12) 的极值。解 (14) 有

$$x_1 = \left\{ \frac{1}{2} (2n^2 + 3n - 2 - \sqrt{n^2(4n^2 + 12n - 7)}) \right\}^{\frac{1}{2n}},$$

$$x_2 = \left\{ \frac{1}{2} (2n^2 + 3n - 2 + \sqrt{n^2(4n^2 + 12n - 7)}) \right\}^{\frac{1}{2n}},$$

不难知道, 当 $x = x_1$ 时, (12) 有极大值; 当 $x = x_2$ 时, (12) 有极小值。因而有:

$$\frac{(2n-1)x_2^{2n-2} - x_2^{4n-2}}{(1+x_2^{2n})^2} \leq \frac{\bar{\eta}_n}{\eta} \leq \frac{(2n-1)x_1^{2n-2} - x_1^{4n-2}}{(1+x_1^{2n})^2}. \quad (15)$$

这就是产生多光子光学双稳性的阈值条件。

例如, 当 $n=1$ 时, $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, 阈值条件为: $-\frac{1}{8} \leq \frac{\bar{\eta}_1}{\eta} \leq 1$; 当 $n=2$ 时,

$$x_1 = 4\sqrt{6 - \sqrt{33}}, \quad x_2 = 4\sqrt{6 + \sqrt{33}},$$

阈值条件为:

$$\frac{3\sqrt{6 + \sqrt{33}} - (\sqrt{6 + \sqrt{33}})^3}{(7 + \sqrt{33})^2} \leq \frac{\eta_2}{\eta} \leq \frac{3\sqrt{6 - \sqrt{33}} - (\sqrt{6 - \sqrt{33}})^3}{(7 - \sqrt{33})^2}.$$

同时可确定开关点为 $y_1 = x_1 - \frac{\eta}{\eta_n} \cdot \frac{x_1^{2n-1}}{1+x_1^{2n}}$, $y_2 = x_2 - \frac{\eta}{\eta_n} \cdot \frac{x_2^{2n-1}}{1+x_2^{2n}}$; 双稳区间为 (y_2, y_1) 。

四、解的稳定性

对原子的变化进行绝热消除, 即令 $\dot{s} = \dot{s}_3 = 0$, 由 O 数方程可求得

$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha^*} \quad (16)$$

中的 V , V 为辐射场势函数, 其具体形式为:

$$V = (a, a^*, E, E^*) = K(|a|^2 - E^*a - Ea^*) - \frac{\eta}{2} \gamma_l \ln\left(1 + \frac{4|g|^2}{\gamma_l \gamma_r} |a|^{2n}\right).$$

作同求(10)所进行的相同的变换后, 可得:

$$V = KN_n \left[x^2 - 2xy - \frac{\eta}{\eta_n} \cdot \frac{1}{n} \ln(1 + x^{2n}) \right]. \quad (17)$$

(17) 即是多光子光学双稳性系统和多光子激光器的辐射场的势函数, 简称多光子光学双稳性和多光子激光的势函数。多光子光学双稳性和多光子激光的势函数是研究多光子光学双稳性多和光子激光特性的基本出发点。

若系统处于稳定状态, 根据稳定性理论应有:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x_s} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x_s} > 0. \quad (18)$$

把(17)代入(18)有:

$$y = x - \frac{\eta}{\eta_n} \cdot \frac{x^{2n-1}}{1+x^{2n}}, \quad (19)$$

$$\left. (dy/dx) \right|_{x_s} > 0. \quad (20)$$

这说明系统的稳定条件是: y 和 x_s 应满足多光子光学双稳性的态方程(10), 且多光子光学双稳性特性曲线上和 x_s 相应的点的斜率应大于0, 即多光子光学双稳性特性曲线上稳定点的判据为:

$$dy/dx > 0. \quad (21)$$

图1和图2分别是双光子光学双稳性特性曲线和势函数曲线, 从图1和图2可以看出势函数的变化趋势。对于 $y \leq 12.6$, $y \geq 24.1$, 势函数只有一个极小值 $V(x_1)$ 或 $V(x_3)$, ($y \geq 24.1$ 的势函数曲线, 图2上没有画出), 此时双光子光学双稳性系统有一个稳定状态。 $12.6 < y < 24.1$ 时, 势函数有两个极小值 $V(x_1)$ 和 $V(x_3)$, 除 $y = 14.9$ 外, 两个极小值均不相同。 $12.6 < y < 14.9$ 时, $V(x_1) < V(x_3)$, 这说明和 x_1 相应的双光子光学双稳性系统的状态是稳定的, 同 x_3 相应的状态则是亚稳定的; 当 $14.9 < y < 24.1$ 时, $V(x_1) > V(x_3)$, 这说明和 x_1 相应的状态是亚稳定的, 和 x_3 相应的状态则是稳定的。只有当 $y = 14.9$ 时, $V(x_1) = V(x_3)$, 双光子光学双稳性才有两个稳定状态。

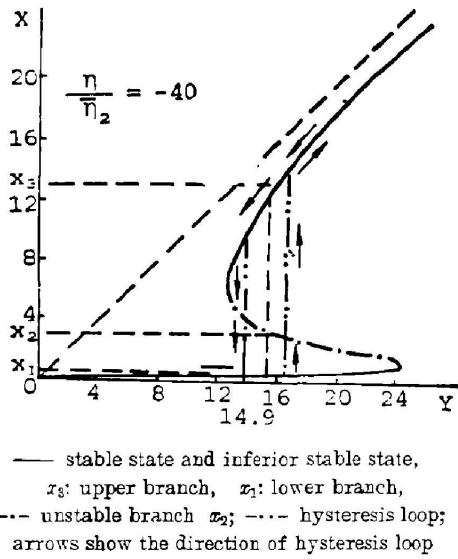


Fig. 1 Plot of function $y = x - \frac{\eta}{\eta_n} \frac{x^{2n-1}}{1+x^{2n}}$ for $n=2$ and $\frac{\eta}{\eta_n} = -40$

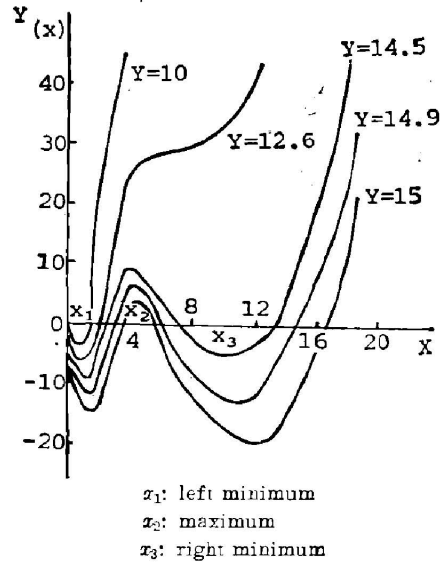


Fig. 2. Plot of function $V(x) = KN_m [x^2 - 2xy - \frac{1}{n} \frac{\eta}{\eta_n} \ln(1+x)]$ for $n=2$ and $\frac{\eta}{\eta_n} = -40$

以上表明，多光子光学双稳性系统具有稳态和亚稳态。多光子光学双稳性特性曲线上满足如下条件的点是稳定点。

$$x_{st} = \begin{cases} x_1 & (y < \bar{y}), \\ x_3 & (y > \bar{y}), \end{cases} \quad (22)$$

其中 x_1 是相应于下分支的点， x_3 是相应于上分支的点， \bar{y} 满足 $V(x\bar{y}) = V(x_3, \bar{y})$ (前面的讨论中， $\bar{y} = 14.9$)。

上面的讨论表明：

1. 可以把多光子光学双稳态称为多光子光学稳-亚稳双态。
2. 多光子光学双稳性的开关特性是从稳态变为亚稳态，从而进入到不稳定状态，随后立即跃入另一个稳定状态。
3. 多光子光学双稳性一定存在滞后特性。

4. 静态稳定性判据为 $dy/dx > 0$ 。

另外，对多光子光学双稳性的势函数进一步分析表明：

1. 光学双稳性系统中所发生的相变是非平衡态的一级相变。
2. 无注入信号的单光子激光器中所发生的相变是非平衡态二级相变；有注入信号的单光子激光器中所发生的相变是非平衡态一级相变。
3. 多光子激光器中所发生的相变是非平衡态一级相变。

五、结 束 语

用前述量子力学模型得到的多光子光学双稳性和多光子激光的结果同文献 [1] 中得到

的结果完全一致,这说明所采用的量子力学模型和所使用的方法是正确的。利用势函数分析了多光子光学双稳性的稳定性,划分了双稳特性曲线上的稳定区域和亚稳定区域,因而多光子光学双稳态应称为多光子光学稳-亚稳双态。对势函数的分析表明:多光子光学双稳性存在滞后特性,其开关特性是从稳态变为亚稳态,进入不稳定状态后立即跃入另一个稳定状态。光学双稳性系统中,有注入信号的单光子激光器和多光子激光器中所发生的相变是非平衡态一级相变,无注入信号的单光子激光器中所发生的相变是非平衡态二级相变。

参 考 文 献

- [1] L. A. Lugiato, G. Strini; *Opt. Commun.*, 1982, **41**, No. 6 (May), 447.
- [2] L. Sczaniecki; *Optica Acta*, 1980, **27**, No. 2 (Feb.), 251.
- [3] H. Haken; *«Synergetics»* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1977).

Studies on multi-photon optical bistability

WENG ZHAOHENG

(Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

MA AIQUN AND LI CHUNFEI

(Harbin Institute of Technology)

(Received 24 January 1985; revised 21 November 1985)

Abstract

In this paper a quantum mechanics model for describing multiphoton optical bistability is given. Based on this model, the state equation of multi-photon optical bistability is obtained. The method which for calculating the threshold of multi-photon optical bistability is also given. After analyzing the potential function, we obtain the statics stability criterion and the explanation of switching characteristics. The stable region and the inferior stable region in the bistability characteristic curve are separated. In fact, multiphoton optical stable states are actually multi-photon optical stable-inferior stable states. We also discuss the phase transition problem of multi-photon optical bistability and multi-photon lasers.