第6卷 第5期 光学学报 Vol. 6, No. 5
1986年5月 ACTA OPTICA SINICA May, 1986

具有侧反射面的光学谐振腔(II)——对称球面谐振腔*

方洪烈 戚张芬 傅淑芬
(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

本文用准几何近似,对具有侧反射面的对称球面谐振腔进行了分析,给出了衍射损失和模场分布的近似解析表达式。第一次发现具有侧反射面不稳定腔的损耗随费涅耳数 N 呈周期性变化。

对于通常的固体激光器,若将激光棒的侧面加工成光学表面时,便形成了具有侧反射面的光学谐振腔。这种腔由于具有一种内禀位相共轭性质,从而带来不少优点。对于这种腔到目前为止研究得很少。文献[1]对具有侧反射面平行平面腔作了分析,给出了近似解析解。本文在此基础上分析了对称球面腔,发现此种腔的衍射损失有所下降,场分布的中心部分变强。

一、积分方程

为建立积分方程,首先我们作类似于文献[1]的几点假设:

(1) 为简单起见,只考虑一个二维问题;

(2) 假定棒的横向尺寸为 $2a$,长度为 $2l$;

(3) 假定腔镜的尺寸也为 $2a$,曲率半径均为 R。腔长为 $L\gg 6l$,对称放置;

(4) 对于侧反射面的反射场,用几何光学反射代替克希霍夫积分;

(5) 腔的费涅耳数 $N=a^2/\lambda L$ 足够大,以使得准几何近似适用,并且 $a\ll L$;

(6) 激光棒长 $2l$ 比 $2a$ 大,因此对坐标 z 的积分也可采用准几何近似。

下面考虑一个如图1所示的对称球面腔。设镜 M_1 上的坐标为(x', z_1),场为 $U^{(1)}(x')$;镜 M_2 上的坐标为(x, z_2),场为 $U^{(2)}(x)$。根据文献[1]镜面 M_2 上的场由三个部分组成。

第一部分,即由 M_1 镜直接传播至镜 M_2 的场。它可以写为[2]

$$U_1^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{i}{\lambda L}}\exp(-ikL)\int_{-a}^{a}\exp\left\{-i\frac{k}{2L}[g(x^2+x'^2)-2xx']\right\}U^{(1)}(x')dx';\tag{1}$$

第二部分,即由镜 M_1 上 (x', z_1) 点发出并经上侧反射面上 (a, z) 点反射至镜 M_2 上

收稿日期:1985年5月31日;收到修改稿日期:1985年9月12日
* 本工作是国家科委和杭州大学资助的。

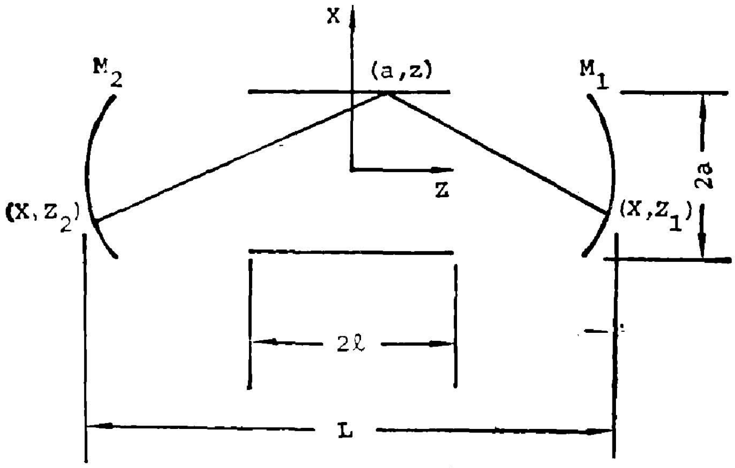

Fig. 1　Symmetric spheric mirror resonators with side reflectors

(x, z_2) 点的场。按反射定律有如下关系

$$\frac{a-x'}{z_1-z}=\frac{a-x}{z-z_2}。\tag{2}$$

按类似于[1]的推导可得

$$\rho=L+2\frac{z^2}{L}+\frac{(1+g)x^2+2a^2-4ax}{L}-\left(1-\frac{z}{L}\right)\frac{4(a-x)^2z}{L^2}$$
$$+\left[x+\frac{z}{L}(a-x)\right]\frac{4z^2(a-x)}{RL^2}+\frac{1}{4LR^2}[x^4-(x-\varepsilon)^4],\tag{3}$$

其中 ε 为小于 1 的量。按本文的第 3 点假设和第 5 点假设可知 x 与 z 是同量级的。(3)式右端第三项以后的项均为三阶及更高阶的小量。当只保留至二阶小量时，可得由上侧反射面的反射场为

$$U_2^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{i}{\lambda L}}\exp(-ikL)\exp\left\{-i\frac{k}{L}[(1+g)x^2+2a^2-4ax]\right\}$$
$$\times\int_{-l}^{l}\exp\left[-ik\frac{2z^2}{L}\right]U^{(1)}(x')dz。\tag{4}$$

将(2)式代入方程(4)，并将 $U^{(1)}\left(x+4\frac{z(a-x)}{L}\right)$按 $4(a-x)z/L$ 作泰勒级数展开，且只取其前两项(注意第二项为零，参见文献[1])

$$U_2^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{i}{\lambda L}}\exp(-ikL)\exp\left\{-i\frac{k}{L}[(1+g)x^2+2a^2-4ax]\right\}$$
$$\times U^{(1)}(x)\int_{-l}^{l}\exp\left(-i2\frac{k}{L}z^2\right)dz。\tag{5}$$

由假设 6，上式的积分限可扩展为$(-\infty, \infty)$而不会带来大的误差。将式中的积分算出后得：

$$U_2^{(2)}(x)=\frac{i}{8}\exp(-ikL)\exp\left\{-i\frac{k}{L}[(1+g)x^2+2a^2-4ax]\right\}U^{(1)}(x)。\tag{6}$$

同理，可求得第三部分，即下侧反射面上$(-a, z)$点反射至 M_2 上的场

$$U_3^{(2)}(x)=\frac{i}{8}\exp(-ikL)\exp\left\{-i\frac{k}{L}[(1+g)x^2+2a^2+4ax]\right\}U^{(1)}(x),\tag{7}$$

由(1)、(6)、(7)三式可得总的积分方程为

$$\gamma U(x)=\sqrt{\frac{i}{\lambda L}}\int_{-a}^{a}\exp\left\{-i\frac{k}{2L}[g(x^2+x'^2)-2xx']\right\}U(x')dx'$$
$$+\frac{i}{4}\exp\left\{-i\frac{k}{L}[(1+g)x^2+2a^2]\right\}\cos\left(\frac{k}{L}4ax\right)U(x), \tag{8}$$

在上式中 $\exp(-ikL)$ 因子已归入本征值 γ 中。

(8)式就是具有侧反射面的对称球面腔的积分本征方程。它不仅适用于稳定腔,也适用于对称的不稳定腔。

二、微 扰 解

严格求解方程(8)是困难的。根据前面的假设3,侧反射面对 M_2 上场的贡献是小的。方程(8)式右端的第二项可看作微扰处理。

方程(8)的无微扰解为[2]

$$u_m(\xi)=\frac{C_m}{\sqrt{D_0}}H_m(\xi)\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right),\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

其中 $C_m=\sqrt{\dfrac{1}{2^m m!\sqrt{\pi}}},\quad D_0=\sqrt{\dfrac{\lambda L}{2\pi h}},\quad \xi=\dfrac{x}{D_0},\quad h^2=1-g^2$。

因此

$$u_m(x)=\frac{C_m}{\sqrt{D_0}}H_m\left(\frac{x}{D_0}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{D_0^2}\right), \tag{9}$$

准几何近似下的本征值为

$$b_m=(g+ih)^{m+\frac{1}{2}}。 \tag{10}$$

我们用下标表示模序数 m,用上标表示微扰的级数。方程(8)的零级微扰解($m=0$ 时)为

$$U_0^{(0)}(x)=u_0(x)=\frac{C_0}{\sqrt{D_0}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{D_0^2}\right), \tag{11}$$

$$\gamma_0^{(0)}=b_0=(g+ih)^{\frac{1}{2}}=\pm\exp\left(i\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{h}{g}\right)。 \tag{12}$$

精确至1级本征解为

$$U_0(x)=u_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_{n0}}{b_0-b_n}u_n(x), \tag{13}$$

$$\gamma_0=b_0+F_{00}, \tag{14}$$

其中 F_{mn} 为微扰矩阵元,且

$$F_{00}=\frac{i}{4}\exp(-i4\pi N)\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-i2\pi N(1+g)x^2]\cos(8\pi Nx)$$
$$\times\frac{C_0^2}{\sqrt{D_0}\sqrt{D_0^*}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{D_0^2}+\frac{1}{D_0^{*2}}\right]x^2\right\}dx。 \tag{15}$$

对于稳定腔($g^2\leqslant1$)D_0 为实数。应用公式[3]

$$\int_0^{\infty}\exp(-\beta x^2)\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp\left(-\frac{b^2}{4\beta}\right),\quad (\mathrm{Re}\,\beta>0)$$

得

$$F_{00}=\frac{\pm i}{4}\left(\frac{1-g}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-4\pi N\sqrt{\frac{1-g}{1+g}}\right)\exp\left(-i\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-g}{1+g}}\right), \tag{16}$$

于是

$$\gamma_0=\pm\exp\left(i\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{h}{g}\right)\pm\frac{i}{4}\left(\frac{1-g}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-4\pi N\sqrt{\frac{1-g}{1+g}}\right)\exp\left(-i\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-g}{1+g}}\right), \tag{17}$$

(17)式表明 $|\gamma_0|^2>|b_0|^2$，即具有侧反射面的腔衍射损失比不具侧反射面的腔的衍射损失小。

因为谐振腔是对称的，特别是对 Z 轴的对称性使得奇对称的模对偶对称的模没有影响。因此 $F_{10}=F_{01}=0$。那么对基模形响最大的是二阶模，即(13)式右端第二项中只有 F_{02} 的项是主要的。不难求得

$$F_{20}=\mp i\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-g}{2}\right)^{\frac{5}{4}}\frac{4\pi N}{h}\exp\left(-4\pi N\sqrt{\frac{1-g}{1+g}}\right)\exp\left(-i\frac{5}{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-g}{1+g}}\right)。 \tag{18}$$

那么基模的一级微扰波函数为

$$U_0(X)=u_0(x)+|a_2|u_2(x)\exp(-i\Phi), \tag{19}$$

其中

$$a_2=\frac{F_{20}}{b_0-b_2}=2^{-\frac{1}{4}}(1-g)^{\frac{3}{4}}\frac{\pi N}{h}\exp\left(-4\pi N\sqrt{\frac{1-g}{1+g}}\right)$$

$$\times\exp\left\{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+g}{1-g}}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{h}{g}\right)\right\},$$

$$\Phi=\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+g}{1-g}}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{h}{g}。$$

对于不稳定腔($g^2>1$)来说，D_0 为复数。

$$F_{00}=\frac{i}{4}\frac{C_0^2}{\sqrt{D_0D_0^*}}\exp(-i4\pi N)\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-i2\pi N(1+g)x^2]\cos(8\pi Nx)dx, \tag{20}$$

利用公式[3]

$$\int_0^{\infty}\cos ax^2\cos 2bx\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\cos\frac{b^2}{a}+\sin\frac{b^2}{a}\right\}$$

和

$$\int_0^{\infty}\sin ax^2\cos 2bx\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\cos\frac{b^2}{a}-\sin\frac{b^2}{a}\right\},$$

可求得

$$F_{00}=\frac{1}{4}\left(\frac{g-1}{g+1}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left[i\left(\frac{8\pi N}{1+g}-4\pi N+\frac{\pi}{4}\right)\right]。 \tag{21}$$

此时

$$b_0=(g+ih)^{\frac{1}{2}}=M^{-\frac{1}{2}}, \tag{22}$$

其中 M 为不稳定腔的光束口径放大倍数。故本征值 γ_0 为

$$\gamma_0=M^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\left(\frac{g-1}{g+1}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left[i\left(\frac{8\pi N}{1+g}-4\pi N+\frac{\pi}{4}\right)\right]。 \tag{23}$$

不稳定腔的损失为：

$$L_0=1-M^{-1}-\frac{1}{16}\left(\frac{g-1}{g+1}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2M}\left(\frac{g-1}{g+1}\right)^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{8\pi N}{1+g}-4\pi N+\frac{\pi}{4}\right)。 \tag{24}$$

由(24)式可以看出，具有侧反射面的不稳定腔的损失对腔的费涅耳数 N 呈周期性的变化。

这是一个十分有趣的结果。它表明这种不稳定腔的反馈有十分小的变化就将对模场分布产生大的影响。这一点与文献[4]对不具侧面不稳定腔的结论是一致的。

与稳定腔的情况相同，$F_{10}=0$，而

$$F_{20}=\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{g-1}{g+1}\right)^{\frac{3}{4}}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{8\pi N}{1+g}\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{g-1}{g+1}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$$
$$\times\exp\left[i\left(\frac{8\pi N}{1+g}-4\pi N+\frac{\pi}{4}\right)\right]。\tag{25}$$

一级微扰波函数同样可表示为

$$U_0(x)=u_0(x)+|a_2|u_2(x)\exp(i\phi),\tag{26}$$

而

$$|a_2|=\frac{8\pi N}{g+1},$$

$$\phi=\frac{\pi}{4}-4\pi N+\frac{8\pi N}{g+1}\left\{1+\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{g-1}{g+1}\right)^{\frac{3}{4}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{g-1}{g+1}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{-1}\right\}。$$

由此可见 $|U_0(x)|$ 是增大还是减小与 N 值密切相关。由于 $\phi\neq 0$，等相面不再是球面。

三、讨 论

前面已经指出具有侧反射面的谐振腔的衍射损失变小了。但是当用(17)式来估计稳定腔的损失时发现，此时腔的衍射损失是负的。这是因为稳定球面腔的准几何近似衍射损失为零。因此只考虑侧反射面的扰动便不够了，此时还必须考虑到反射镜的有限尺寸带来的扰动[3]。此外，我们还看到衍射损失的扰动很小。这是可以理解的。因为稳定腔的特征光束是高斯光束，而侧反射镜恰好位于束腰的两侧，自然不会有大的影响。因为侧反射面的微扰项是复数，腔的共振频率也不同了。当然所有这些偏离都是小的。

侧反射面对 $m=1$ 的本征值的微扰是

$$F_{11}=\pm\left\{-i\left(\frac{1-g}{2}\right)^{\frac{5}{4}}\exp\left[-i\frac{5}{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+g}{1-g}}\right)\cdot\frac{4\pi N}{h}$$
$$+i\frac{1}{4}\left(\frac{1-g}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\exp\left[-i\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+g}{1-g}}\right)\right\}$$
$$\times\exp\left(-4\pi N\sqrt{\frac{1-g}{1+g}}\right)。\tag{27}$$

比较(27)式和(16)式发现，侧反射面对高阶模式的影响比低阶模式要大，使模间隔变小，模式鉴别能力下降。

对于不稳定腔来说，损耗下降很大。特别是当光束口径放大倍数 M 越大时越是如此。当然，当 M 十分大时，侧反射面对腔的反馈可能是主要的。上面用微扰论求得的结果便不再适用了。与稳定腔的情况相同，不稳定腔的模式鉴别能力也下降了。

上面所讨论的二维问题很容易推广至矩形腔的情况。

参 考 文 献

[1] 方洪烈;《光学学报》，1985, 5, No. 10 (Oct)，879.

[2] 方洪烈;《光学谐振腔理论》, (科学出版社, 北京, 1981), 104。
[3] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik; «*Table of Integrals, Series, and Products*», (Academic Press, New York, 1980), 395.
[4] Ю. А. Ананьев *и др.*; *Кван. Электр.*, 1971, № 4 (Апр), 112.

Resonators with side reflectors (II) ——symmetric spheric mirror resonators

FANG HONGLIE, QI ZHANGFEN AND FU SHUFEN
(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 31 May 1985; revised 12 September 1985)

Abstract

In this paper, the symmetric spheric mirror resonators are analyzed by means of quasi-geometric approximations. The eigenmodes of the resonators are obtained analytically. The periodic properties of the diffraction losses of the unstable resonators with regard to the Fresnel number N are obtained for the first time.