

随机耦合对人为反向耦合的影响

张 申 如

(南京通信工程学院理化室)

提 要

采用密度矩阵方法描述了两模反向耦合。在两模反向耦合情况下,用随机畸变的功率耦合系数(即模混合系数)对密度矩阵运动方程作了修正,并获得了修正后方程的精确解析解的表达式。

振幅耦合方程可用作研究人为的确定性微扰所引起的模耦合和功率交换^[1,6],在此基础上用统计平均得到了耦合功率方程^[1~4],以讨论随机畸变所导致的模混合效应^[5]。然而,在实际波导系统中同时存在随机性和确定性两种耦合因素,因此有必要研究两者共同存在时对耦合的影响。

一、反向模式耦合方程

一列前向和一列后向传播的波实现反向耦合时耦合振幅方程为^[1,6]

$$\left. \begin{aligned} (dc_1/dz) &= -iK_{11}c_1 - iK_{12}c_2 \exp[i(\beta_1 + \beta_2)z], \\ (dc_2/dz) &= iK_{21}c_1 \exp[-i(\beta_1 + \beta_2)z] + iK_{22}c_2, \\ K_{ij} &= k_{ij}f(z), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

此处 $c_1, c_2, \beta_1, \beta_2$ 分别为前向波和后向波的振幅系数和传播常数。 $K_{ij}(i, j=1, 2)$ 为振幅耦合系数,对反向耦合 $K_{ij}^* = K_{ji}$ 。

若耦合是通过 K_{ij} 中与 z 有关的随机函数 $f(z)$ 的傅里叶频谱中空间频率 θ 分量来实现的,则 $\theta = \beta_1 + \beta_2$, 这里 k_{ij} 为一与 z 无关的常数。在弱耦合条件下引入对随机函数的统计处理^[1~4],得到众所周知的耦合功率方程^[1]

$$\left. \begin{aligned} (dP_1/dz) &= \gamma(P_2 - P_1), \\ (dP_2/dz) &= \gamma(P_1 - P_2), \\ \gamma &= |k_{12}|^2 \langle |F(\beta_1 + \beta_2)|^2 \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

此处 P_1 和 P_2 分别理解为前向和后向模归一化功率, γ 为功率耦合系数。

方程(2)描述了随机畸变所导致的反向传播模式间的模混合效应。按照文献[1]说法,与同向耦合相比,反向耦合功率方程在理论上似乎存在不肯定的因素,但它与计算机模拟实验的结果仍符合得很好,所以仍是一种可取的近似。

二、模混合对确定性反向耦合密度矩阵运动方程的修正

令 $a_1 = c_1 \exp(-i\beta_1 z)$, $a_2 = c_2 \exp(i\beta_2 z)$, 并定义密度矩阵元 $\rho_{ij} = a_i a_j^*$ 。则由

$$(d\rho_{ij}/dz) = (da_i/dz)a_j^* + a_i(da_j^*/dz),$$

以 a_1 、 a_2 代入并由 (1) 式整理可得密度矩阵运动方程

$$\left. \begin{aligned} i(d\rho_{11}/dz) &= K_{12}\rho_{21} + K_{21}\rho_{12}, \\ i(d\rho_{12}/dz) &= 2\Delta'f_{11} + K_{12}(\rho_{11} + \rho_{22}), \\ i(d\rho_{21}/dz) &= -2\Delta'f_{21} - K_{21}(\rho_{11} + \rho_{22}), \\ i(d\rho_{22}/dz) &= K_{12}\rho_{21} - K_{21}\rho_{12}, \\ 2\Delta' &= \beta_1 + K_{11} + \beta_2 + K_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

在正弦形畸变 $K_{ij} = 2k_{ij} \cos \Omega z$ 情况下, 作变换 $\alpha_{12} = \rho_{12} \exp(i\Omega z)$, $\alpha_{21} = \rho_{21} \exp(-i\Omega z)$ 。这样在 $\beta_1 + \beta_2 - \Omega$ 接近于零相位近似匹配的条件下 ρ_{11} , α_{12} , α_{21} , ρ_{22} 都已是空间的缓变函数。然而, 随距离迅速振荡的 $\exp(\pm i\Omega z)$ 项具有使方程积分的结果变为零的倾向, 故我们可仅保留方程组中那些不振荡的项, 即采用所谓的转动波近似得到

$$\left. \begin{aligned} i(d\rho_{11}/dz) &= k_{12}\alpha_{21} - k_{21}\alpha_{12}, \\ i(d\alpha_{12}/dz) &= 2\Delta\alpha_{12} + k_{12}(\rho_{11} + \rho_{22}), \\ i(d\alpha_{21}/dz) &= -2\Delta\alpha_{21} - k_{21}(\rho_{11} + \rho_{22}), \\ i(d\rho_{22}/dz) &= k_{12}\alpha_{21} - k_{21}\alpha_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

此处 $2\Delta = \beta_1 + \beta_2 - \Omega$ 。方程 (4) 就是确定性正弦畸变导致的反向耦合密度矩阵运动方程。

现在波导中不仅存在着上述确定性耦合, 同时还存在着随机性畸变, 问题是随机的混合会如何影响模式间的耦合呢? 为此我们要考虑对方程 (4) 的修正。

方程 (2) 式说明随机畸变所引起的模混合在物理上表现为模式 1 在单位长度上以其本身功率的 γ 倍转换为模式 2; 与此同时模式 2 在单位长度上也以其本身功率的 γ 倍转换为模式 1。可见模式功率(相应密度矩阵对角元)的混合是以等速率双向同时进行的。为引入振幅交叉积(即密度矩阵非对角元)导数项的修正, 我们可仿照文献 [1] 对 $(d\alpha_{12}/dz)$ 及 $(d\alpha_{21}/dz)$ 施以统计平均。但实际上利用波振幅不相关的假设^[1]: $\langle c_1 c_2^* \rangle = \langle c_2 c_1^* \rangle = 0$, 很容易直接证明

$$i(d\langle \alpha_{12} \rangle / dz) = i(d\langle \alpha_{21} \rangle / dz) = 0. \quad (5)$$

在存在确定性耦合的弱耦合条件下, 随机畸变的耦合通常比确定耦合更弱, 且两者互不相关。因此, 可以用简单修正的方式将 (2)、(5) 式引进 (4) 式中, 写出经随机耦合修正后的密度矩阵运动方程

$$\left. \begin{aligned} i(d\rho_{11}/dz) &= i\gamma(\rho_{22} - \rho_{11}) + \tau_{12}\alpha_{21} - k_{21}\alpha_{12}, \\ i(d\alpha_{12}/dz) &= 2\Delta\alpha_{12} + k_{12}(\rho_{11} + \rho_{22}), \\ i(d\alpha_{21}/dz) &= -2\Delta\alpha_{21} - k_{21}(\rho_{11} + \rho_{22}), \\ i(d\rho_{22}/dz) &= i\gamma(\rho_{22} - \rho_{11}) + k_{12}\alpha_{21} - k_{21}\alpha_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

为简化求解, 假定随机耦合函数 $f(z)$ 的频谱在所讨论的并不宽的空间频带内具有均匀的性质, 即 γ 为常数。注意到 $\rho_{11} - \rho_{22} = C$ (常数), 于是可得方程 (6) 式的解。

$$\left. \begin{aligned}
 \rho_{11} &= \frac{A}{2} \exp(2s_0 z) + \frac{B}{2} \exp(-2s_0 z) + \frac{C}{2} - i \frac{\Delta \gamma C}{2s_0^2} - \frac{\Delta}{k_{12}} D + \frac{\gamma C \Delta^2}{s_0^2} z, \\
 \alpha_{12} &= -A \frac{\Delta + is_0}{2k_{21}} \exp(2s_0 z) - B \frac{\Delta - is_0}{2k_{21}} \exp(-2s_0 z) + D - \frac{k_{12} \Delta \gamma C}{s_0^2} z, \\
 \alpha_{21} &= -A \frac{\Delta - is_0}{2k_{12}} \exp(2s_0 z) - B \frac{\Delta + is_0}{2k_{12}} \exp(-2s_0 z) + \frac{k_{21}}{k_{12}} D + i \gamma C \frac{k_{21}}{s_0^2} - \frac{k_{21} \Delta \gamma C}{s_0^2} z, \\
 \rho_{22} &= \frac{A}{2} \exp(2s_0 z) + \frac{B}{2} \exp(-2s_0 z) - \frac{C}{2} - i \frac{\Delta \gamma C}{2s_0^2} - \frac{\Delta}{k_{12}} D + \frac{\gamma C \Delta^2}{s_0^2} z,
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这里 $s_0^2 = |k_{12}|^2 - \Delta^2$; A, B, C, D 为由初条件所决定的系数。现假定在微扰区两端不存在界面反射, 即 $c_1(0) = 1, c_2(L) = 0$, 因而有 $\rho_{11}(0) = 1, \alpha_{12}(L) = \alpha_{21}(L) = \rho_{22}(L) = 0$ 。由此得到前向模式 1 和后向模式 2 的功率 ρ_{11} 和 ρ_{22} 为

$$\left. \begin{aligned}
 \rho_{11} &= \frac{1}{Q} \left\{ s_0^2 \operatorname{ch}^2[s_0(z-L)] + \Delta^2 \operatorname{sh}^2[s_0(z-L)] + \gamma |k_{12}|^2 \frac{\operatorname{sh}[2s_0(L-z)]}{2s_0} - \Delta^2 \gamma(L-z) \right\}, \\
 \rho_{22} &= \frac{1}{Q} \left\{ |k_{12}|^2 \operatorname{sh}^2[s_0(z-L)] + \gamma |k_{12}|^2 \frac{\operatorname{sh}[2s_0(L-z)]}{2s_0} - \Delta^2 \gamma(L-z) \right\}, \\
 Q &= s_0^2 \operatorname{ch}^2(s_0 L) + \Delta^2 \operatorname{sh}^2(s_0 L) + \gamma |k_{12}|^2 \frac{\operatorname{sh}(2s_0 L)}{2s_0} - \Delta^2 \gamma L,
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(8)式是一般情况下的解。可以证明

(1) 在 $\gamma = 0$, 即只存在确定性耦合时它可简化为

$$\left. \begin{aligned}
 \rho_{11} &= \frac{s_0^2 \operatorname{ch}^2[s_0(z-L)] + \Delta^2 \operatorname{sh}^2[s_0(z-L)]}{s_0^2 \operatorname{ch}^2(s_0 L) + \Delta^2 \operatorname{sh}^2(s_0 L)}, \\
 \rho_{22} &= \frac{|k_{12}|^2 \operatorname{sh}^2[s_0(z-L)]}{s_0^2 \operatorname{ch}^2(s_0 L) + \Delta^2 \operatorname{sh}^2(s_0 L)},
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(9)式与文献[6]结果一致。

(2) 在 $k_{12} = k_{21} = 0$, 即只存在随机耦合时(8)式可简化为

$$\left. \begin{aligned}
 \rho_{11} &= [1 + \gamma(L-z)] / (1 + \gamma L), \\
 \rho_{22} &= \gamma(L-z) / (1 + \gamma L),
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

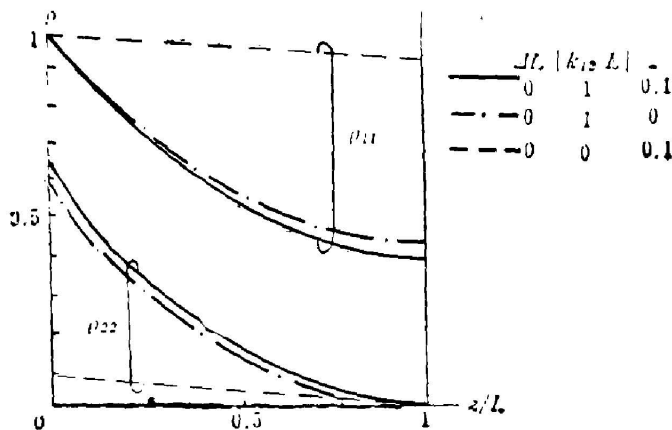


Fig. 1

(10)式与文献[1]结果相同。

图1示出了在 $\Delta L=0$, $|k_{12}L|=1$, $\gamma L=0.1$ 时模式功率 ρ_{11} , ρ_{22} 在微扰区内的分布情况。为了对照我们同时示出了 $\Delta L=0$, $|k_{12}L|=1$, $\gamma L=0$, 即单纯正弦型畸变所致的确定性耦合功率随 z 指数减小的情况以及 $\Delta L=0$, $|k_{12}L|=0$, $\gamma L=0.1$ 即单纯随机耦合模式功率随 z 线性减小的结果。显然, 随机耦合的存在增大了从模式1向模式2的功率转换, 其规律如(8)式所示的方程组。

三、结 论

本文用密度矩阵方法描述了反向模式间的耦合, 并以随机畸变的功率耦合系数即模混合系数加以修正, 建立了新的考虑随机畸变的反向耦合密度矩阵运动方程。以解析法得到修正后方程的归一化功率解。这个解概括了单独研究确定性耦合或随机耦合的结果。

参 考 文 献

- [1] D. 马库塞 (Marcuse); 《介质光波导理论》, (人民邮电出版社, 北京, 1982), 253。
- [2] B. Crosignani *et al.*; *IEEE Trans.*, **MTT-23**, 1975, No. 5 (May), 416.
- [3] B. Crosignani *et al.*; *J. Opt. Soc. Amer.*, **67**, 1977, No. 10 (Oct), 1300.
- [4] P. M. Bodhe; *Opt. & Quan. Electron.*, **15**, 1983, No. 1 (Jan), 71.
- [5] D. 马库塞 (Marcuse) 等; 《光纤通信》, 上册, S. E. 米勒等主编, (人民邮电出版社, 北京, 1983), 90。
- [6] 金峰, 范俊清; 《集成光学》, 上册, (国防工业出版社, 北京, 1981), 88。

The effect of random mode coupling on intentional inverse mode coupling

ZHANG SHENRU

(Nanjing Institute of Communication Engineering)

(Received 24 August 1984; revised 3 September 1985)

Abstract

In this paper the method of density matrix is used to describe two coupled modes. In the case of inverse coupling the density matrix equation of motion is modified by power coupling coefficients caused by random imperfections. The exact analytical solution is obtained.