

# 大曲率半径球形光学列阵成像质量 的方和裴衍射分析

周 国 生

(山西大学物理系)

王 绍 民

(杭州大学物理系)

邓 锡 铭

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

## 提 要

本文给出了球形光学列阵在两个不同位置分别有单元像与综合像的规律, 以及单元入射孔径大小对成像质量的影响; 揭示了规则列阵的综合成像, 既有单元衍射效应, 又有多元干涉效应, 文中还给出了提高像质量的方法。

## 一、引 言

本文将在作者等以前工作的基础上<sup>[1~5]</sup>, 利用方和裴衍射理论, 较全面地计算大曲率半径球形光学列阵成像的衍射特性, 包括单元成像与综合成像, 孔径大小对像质的影响等。

## 二、大曲率半径球形光学列阵的衍射积分

设光学列阵所有单元具有相同的光线变换矩阵, 各光学单元分布在半径为  $R$  的球面上, 且是互相隔离的, 即各单元的输入、输出平面分别外切于半径  $R$  和  $R-l$  的球面上, 孔径分别为  $a_{1m}$  和  $a_{2m}$ 。切点  $(x_{1m}, y_{1m}, z_{1m})$ ,  $(x_{2m}, y_{2m}, z_{2m})$  在各单元的光轴上, 这里第一个脚标 1 或 2 分别表示列阵的输入或输出面,  $m, n$  表示光学单元的序数,  $m, n=0, \pm 1, \dots, \pm N$  (见图 1)。在傍轴的费涅耳近似下, 从物点  $(x_0, y_0, z_0)$  发出的光, 经过轴向距离  $u$ , 到达列阵; 穿过列阵, 再经过距离  $w$ , 到达像点  $(x_3, y_3, w+l)$ 。根据文献[3], 再经整理, 可得像点处的点扩展函数,

$$h_3(X_3, Y_3; X_0, Y_0) = -\frac{1}{\pi\lambda u M} \exp \left\{ -ik(u+n'l+w) - i \left[ X_0^2 + Y_0^2 - \frac{D}{M}(X_3^2 + Y_3^2) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{m=-N}^N \exp \left\{ -i \left[ P_2 X_{2m}^2 - 2X_{2m} \frac{R}{R-l} (X_0 - P_1 X_3) \right] \right\} \\
& \times \int_{-a_{1n}}^{a_{1n}} \exp \{ -i [Q_3 \xi_1'^2 + 2\xi_1' (X_3/M - X_0 + Q_1 X_{2m})] \} d\xi_1' \\
& \times \sum_{n=-N}^N \exp \left\{ -i \left[ P_2 Y_{2n}^2 - 2Y_{2n} \frac{R}{R-l} (Y_0 - P_1 Y_3) \right] \right\} \\
& \times \int_{-a_{1n}}^{a_{1n}} \exp \{ -i [Q_3 \eta_1'^2 + 2\eta_1' (Y_3/M - Y_0 + Q_1 Y_{2n})] \} d\eta_1', \quad (1)
\end{aligned}$$

其中

$$P_1 = [P(R-l) + B]/MR, \quad P_2 = g_1(R/R-l)^2 - g_2/M \{ [D+B(R-l)]/(R-l) \}, \quad (2)$$

$$Q_1 = [-g_1R/(R-l)] + [g_2/M], \quad (3)$$

$$Q_3 = 1 + [(A+Cw)/(B+Dw)]u, \quad (4)$$

$$M = -(B+Dw)/u, \quad (5)$$

$$g_1 = 1 + (u/R), \quad g_2 = 1 - [w/(R-l)], \quad (6)$$

而  $X_0, Y_0, X_3, Y_3, \xi_1', \eta_1'$  和  $a_{1m}$  分别是相应的量  $X_0, Y_0, X_3, Y_3, \xi_1, \eta_1$  和  $a_{1m}$  乘以  $\pi^{1/2}/(\lambda u)^{1/2}$ 。  $\xi_1 = x_1 - a_{1m}$ ,  $|\xi_1| \leq a_{1m}$ ;  $\eta_1 = y_1 - a_{1n}$ ,  $|\eta_1| \leq a_{1n}$ ,  $n$  是单元的折射率,  $k = 2\pi/\lambda$  是波数,  $\lambda$  是波长。第一个指数上的  $n'l$  是列阵的光程长。

若在物平面上场分布为  $E_0(x_0, y_0)$ , 则在观察平面上场分布  $E_3(x_3, y_3)$  为

$$E_3(x_3, y_3) = \lambda u / \pi \int h(X_3, Y_3; X_0, Y_0) E_0(X_0, Y_0) dX_0 dY_0, \quad (7)$$

式(1)和(7)是球面列阵光学的普遍菲涅耳积分场分布表达式。

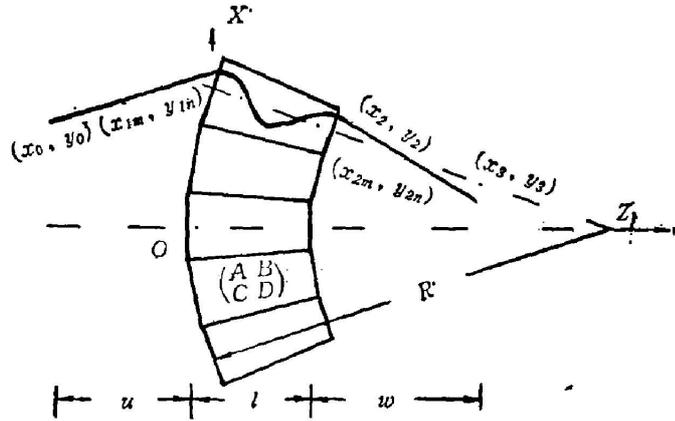


Fig. 1 Schematic diagram of a spherical array

### 三、单元像

当式(5)  $Q_3 = 0$ , 即

$$-w \equiv V_{ind} = (Au+B)/(Cu+D) \quad (8)$$

时(脚标 ind 表示单元像的量), 对  $\xi_1'$  和  $\eta_1'$  积分, 公式(1)可化为

$$\begin{aligned}
& h_3(X_3, Y_3; X_0, Y_0) \\
& = \frac{1}{\pi \lambda u M_{ind}} \exp \left\{ -ik(u+n'l+w) - i \left[ X_0^2 + Y_0^2 - \frac{D}{M_{ind}} (X_3^2 + Y_3^2) \right] \right\} \\
& \times \sum_{m=-N}^N \exp \left\{ -i \left[ P_2 X_{2m}^2 - 2X_{2m} \frac{R}{R-l} (X_0 - P_1 X_3) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times 2a'_{1m} \cdot \text{sinc} \left[ 2a'_{1m} \left( \frac{X_3}{M_{\text{ind}}} - X_0 + Q_1 R_{2m} \right) \right] \\ & \times \sum_{n=-N}^N \exp \left\{ -i \left[ P_2 Y_{2n}^2 - 2Y_{2n} \frac{R}{R-l} (Y_0 - P_1 Y_3) \right] \right\} \\ & \times 2a'_{1m} \text{sinc} \left[ 2a'_{1m} \left( \frac{Y_3}{M_{\text{ind}}} - Y_0 + Q_1 Y_{2n} \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

式中

$$M_{\text{ind}} = M |_{w=V_{\text{ind}}} = \frac{1}{Cu+D} \quad (10)$$

是单元像垂轴放大率。函数  $\text{sinc } z = \sin z/z$ , 在  $z=0$  处有极大值。当

$$\begin{cases} X_3 = M_{\text{ind}} x_0 - M_{\text{ind}} Q_1 x_{2m} & m, n = -N, \dots, 0, \dots, N; \\ Y_3 = M_{\text{ind}} y_0 - M_{\text{ind}} Q_1 y_{2n} \end{cases} \quad (11)$$

时,  $\text{sinc}$  函数及点扩展函数有极大值。因此,  $(x_0, y_0)$  处的一个物点, 每一光学单元有一对应的单元象,  $(2N+1)^2$  个单元共成  $(2N+1)^2$  个像, 像的坐标是  $(M_{\text{ind}} x_0 - M_{\text{ind}} Q_1 x_{2m}, M_{\text{ind}} y_0 - M_{\text{ind}} Q_1 y_{2n}, l - V_{\text{ind}})$ 。两相邻单元像的间距为  $|M_{\text{ind}} Q_1 2d_2|$ , 这里  $2d_2 = x_{2m+1} - x_{2m}$ , 是在输出面处两相邻光学单元中心的间距。设物的半径为  $x_{00}$ , 则二相邻单元像的不重叠条件为  $|x_{00}| < |a_3 d_2|$ 。

点像的衍射光斑半径  $\Delta x_3$  可由  $\text{sinc}$  函数的容量为 0 和  $\pi$  时的差值给出,

$$\Delta x_3 = \frac{\lambda u}{2a_{1m}} M_{\text{ind}}, \quad (12)$$

它取决于单元入射孔径  $a_{1m}$ 。  $a_{1m}$  越小,  $\Delta x_3$  越大, 像越模糊。

当  $a_{1m}$  的非涅耳数  $a_{1m}^2 = \frac{\pi a_{1m}^2}{\lambda u} \gg 1$ , 可利用公式  $\lim_{a \rightarrow \infty} a \text{sinc } ax = \pi \delta(x)$ , 于是在单元像平面上有

$$\begin{aligned} E_3(x_3, y_3) &= \frac{-1}{M_{\text{ind}}} \exp \left\{ -ik(u+n'l+w) - \frac{i(1-DM_{\text{ind}})}{M_{\text{ind}}^2} (X_3^2 + Y_3^2) \right\} \\ & \times \sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N E_0 \left( \frac{X_3}{M_{\text{ind}}} + Q_1 X_{2m}, \frac{Y_3}{M_{\text{ind}}} + Q_1 Y_{2m} \right) \\ & \times \exp \left\{ -i[S_2(X_{2m}^2 + Y_{2m}^2) - 2S_1(X_3 X_{2m} + Y_3 Y_{2m})] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

这里  $S_1 = \frac{R}{R-l} \left( \frac{1}{M_{\text{ind}}} - P_1 \right) - \frac{Q_1}{M_{\text{ind}}}$ ,  $S_2 = P_2 - 2Q_1 \frac{R}{R-l} + Q_1^2$ 。

在昆虫复眼实验中, 观察到了球形阵列所成的单元像。

#### 四、综合像(叠加像)

$$Q_2 a_{1m}^2 = \left( 1 + \frac{A+Cw}{B+Dw} u \right) \left( \frac{\pi a_{1m}^2}{\lambda u} \right) \ll \pi \quad (14)$$

时, 公式(1)积分中指数上的  $iQ_2 \xi_1^2$  和  $iQ_2 \eta_1^2$  可忽略不计, 则在某一特殊面  $Q_1=0$  上, 即

$$w \equiv -V_0 = -\frac{u \left( \frac{R-l+B}{R} \right) + B}{u \left( \frac{D-1}{R} \right) + D} \quad (15)$$

处,点扩展函数式(1)可化为

$$\begin{aligned}
 & h_s(X_s, Y_s; X_o, Y_o) \\
 &= \frac{-1}{\pi\lambda u M_u} \exp \left\{ -ik(u+n'l+w) - i \left[ X_o^2 + Y_o^2 - \frac{D}{M_u} (X_s^2 + Y_s^2) \right] \right\} \\
 & \times 2a'_1 \operatorname{sinc} \left[ 2a'_1 \left( \frac{X_s}{M_u} - X_o \right) \right] \sum_{m=-N}^N \exp \left\{ -i \left[ P_2 X_{2m}^2 - 2X_{2m} \frac{R}{R-l} (X_o - P_1 X_s) \right] \right\} \\
 & \times 2a'_1 \operatorname{sinc} \left[ 2a'_1 \left( \frac{Y_s}{M_u} - Y_o \right) \right] \sum_{m=-N}^N \exp \left\{ -i \left[ P_2 Y_{2m}^2 - 2Y_{2m} \frac{R}{R-l} (Y_o - P_1 Y_s) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{16}$$

式中

$$M_u = M \left|_{w=r_u} = 1 - \frac{l-B+(1-D)w}{R} \right|, \tag{17}$$

代表综合像的垂轴放大率,另外,假设  $a'_{1m} \approx a'_1$ ,  $n, m = -N, \dots, 0, \dots, N$ ; 即各单元输入孔径大小都相等,这不会改变像的位置及像的垂轴放大率,只不过略为改变像点的衍射光斑半径。

公式(16)仅在  $(M_u x_o, M_u y_o, l-V_u)$  处有极大,极大位置与轴向放大率  $M_u$  与单元序数  $m, n$  无关。因此对一个物点,每个单元所产生的像,都重叠或综合在一起,形成一个叠加像或综合像。但不同单元的像具有不同的相位,单元排列不同,像的相位也不同。单元的排列,有两种极端情况,产生两种结果:非相干叠加和相干叠加。

(A) 非相干叠加 若各单元间的距离完全无规,则像的强度等于各单元产生的像的强度之和,

$$\begin{aligned}
 |h_s(X_s, Y_s; X_o, Y_o)|^2 \propto & \frac{4a_1^2(2N+1)^2}{\pi^2 \lambda^2 u^2 M_u^2} \operatorname{sinc}^2 \left[ \frac{2\pi a_1}{\lambda u} \left( \frac{x_s}{M_u} - x_o \right) \right] \\
 & \times \operatorname{sinc}^2 \left[ \frac{2\pi a_1}{\lambda u} \left( \frac{y_s}{M_u} - y_o \right) \right],
 \end{aligned} \tag{18}$$

上式说明,点像的强度与单元总数  $(2N+1)^2$  成正比;点像的衍射光斑半径为  $\Delta x_s = \lambda u M_u / (2a_1)$ 。因此,在非相干情况下,点像的衍射光斑就等于单个单元的衍射光斑。由条件式(14),单元的入射孔径  $a_1$  不可能很大,因此像的衍射光斑尺寸较大,成像模糊。但在热核反应或激光打孔中,都可获得较均匀的光强分布。

(B) 相干叠加 当各单元规则排列时,可设  $x_{2m} = 2md_2, y_{2m} = 2nd_2$ , 则像呈相干叠加。当  $|P_2 X_{2m}^2| \ll \pi$  时,可用方和斐近似,公式(16)近似为

$$\begin{aligned}
 h_s(X_s, Y_s; X_o, Y_o) = & \frac{-4a_1^2}{\lambda^2 u^2 M_u} \exp[-ik(u+n'l+w)] \\
 & \times \operatorname{sinc} \left[ \frac{2\pi a_1}{\lambda u} \left( \frac{x_s}{M_u} - x_o \right) \right] \frac{\sin \left[ (2N+1) \frac{2\pi d_1}{\lambda u} (x_o - P_1 x_s) \right]}{\sin \left[ \frac{2\pi d_1}{\lambda u} (x_o - P_1 x_s) \right]} \\
 & \times \operatorname{sinc} \left[ \frac{2\pi a_1}{\lambda u} \left( \frac{y_s}{M_u} - y_o \right) \right] \frac{\sin \left[ (2N+1) \frac{2\pi d_1}{\lambda u} (y_o - P_1 y_s) \right]}{\sin \left[ \frac{2\pi d_1}{\lambda u} (y_o - P_1 y_s) \right]},
 \end{aligned} \tag{19}$$

式中  $d_1 = d_2 \frac{R}{R-l}$ 。上式中  $\text{sinc}$  函数是单元衍射因子,  $\sin$  函数之比是多单元干涉因子, 如图 2a、b 所示, 点源像场分布包络由单元衍射因子决定; 它的极大值在  $(M_u x_0, M_u y_0, l - V_u)$  处, 它的半宽度为  $\Delta x_3 = \lambda u M_u / 2a_1$ 。多单元干涉因子的主极大在

$$\begin{cases} x_3 = \frac{R \left( x_0 - \frac{\lambda u}{2d_1} m \right)}{u(D-1) + DR}, & m = 0, \pm 1, \dots, \\ y_3 = \frac{R \left( y_0 - \frac{\lambda u}{2d_1} n \right)}{u(D-1) + DR}, & n = 0, \pm 1, \dots. \end{cases} \quad (20)$$

相邻两主极大的间隔为

$$\delta x_3 = \frac{\lambda u}{2d_1} \frac{1}{P_1} = \frac{\lambda u}{2d_1} \frac{R}{u(D-1) + DR}, \quad (21)$$

由于在  $x$  方向有  $2N+1$  个单元, 所以二两相邻主极大间有  $2N$  个强度为 0 的极小。

每个主极大的半宽度  $\Delta x'_3$  为

$$\Delta x'_3 = \frac{\lambda u}{2d_1} \frac{1}{P} \frac{1}{2N+1} = \frac{\delta x_3}{2N+1}, \quad (22)$$

光学单元越多, 主极大越仄。点源像的光强  $|h_3(X_3, Y_3; X_0, Y_0)|^2$  的示意图见图 2c。

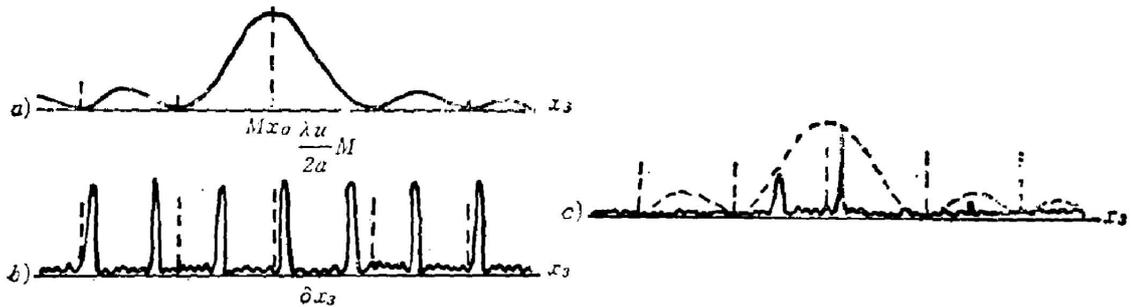


Fig. 2 Image distribution by an array containing 7 optical elements

为了获得清晰像, 就要求在单元衍射因子包络下只有一个尖峰, 这要求  $\Delta x_3 \approx |\delta x_3|$ , 即

$$a_1 \approx d_1 \left| \frac{D(R-l) + B}{R} \right|, \quad (23)$$

这时像的衍射光斑半径只决定于多单元干涉因子主极大半宽度  $\Delta x'_3$ , 而与列阵半径  $(2N+1)d_1$  成反比。

由公式(19)还可见, 像的峰值强度正比于单元总数的平方  $(2N+1)^2$ , 它比非相干成像要强  $(2N+1)^2$  倍。但实际列阵单元间距不可能象光栅刻划线那样精确, 因此像的峰值强度要比上述结果小。

现计算接收平面  $w'$  与理想综合像平面  $l - V_u$  偏离多少时, 仍能观察到较好的综合像。当满足方和裴条件公式(14)时, 公式(9)仍成立。若  $\text{sinc}$  函数容量的绝对值  $|2a_{1m}(X_3/M_u - X_0 + Q_1 X_{2m})| \ll 1$ , 譬如小于 0.1,  $\text{sinc}$  函数可近似为 1, 而与  $X_{2m}$  无关, 即仍能观察到较好的综合像。这样, 在  $X_3 = M_u X_0$  的领域内,  $Q_1$  需满足不等式

$$|Q_1| < 0.1 \frac{3\lambda u}{2\pi a_1 \cdot 2md_2} \equiv \epsilon \ll 1. \quad (24)$$

由公式(3),当  $Q_1 = \epsilon$  时,解出  $w$ ,即  $w'$  得

$$w' \cong w + \epsilon \Delta w, \quad \Delta w = \frac{u M_u}{u \left( \frac{D-1}{R} \right) + D} = \frac{u}{R} \frac{B + D(R-l)}{\left( u \frac{D-1}{R} + D \right)^2}, \quad (25)$$

这说明,在理想的综合像平面  $l - V_u$  的领域  $|\epsilon \Delta w|$  内,仍可观察到综合像。综合像的放大倍数  $M_u$  越大,则  $\Delta w$  越大,对接收平面位置的精确度要求就越小。上述结论,可用于相干与非相干情况。

## 五、综合像垂轴放大率 $M_u = 0$ 的成像系统

若一光学系统的垂轴放大率  $M_u = 0$ ,则可能使点像的衍射光斑半径等于零。令公式(17)的  $M_u = 0$  得

$$R = (lD - B) / D, \quad (26)$$

因此将列阵排成曲率半径由上式决定的球面,就可获得上述光学系统。由综合像的物像关系式可得像距

$$w = R - l = -B/D, \quad (27)$$

这说明,不论物在何处,该系统将始终成像在球面的曲率中心处。这类球形列阵可用作无穷景深的成像系统,也可用作会聚透镜,将任何位置发射来的光都会聚于球心<sup>[5]</sup>。

对无规排列的非相干列阵,像的衍射光斑半径为零。

对规则排列的相干列阵,虽然单元衍射因子的半宽度接近零,但仍存在多单元干涉效应,而且多单元干涉因子的极大值与单元衍射因子的极大值位置不同,因此光强较弱。

这种  $M_u = 0$  的列阵,对接收平面位置的要求比较严格。因为根据公式(25),  $\Delta w = 0$ 。

## 六、结 语

本文说明了大曲率半径球形列阵的成像有两种,单元成像与综合成像(叠加成像)。

当单元的入射孔径不是非常小,每个光学单元各自产生单元像。单元像的轴向像距、垂轴放大率、像的衍射光斑半径都只决定于各单元。

当单元的入射孔径的费涅耳数远小于1时,在满足公式(14)的平面上,各单元产生大小相等、位置相同,但相位不同的像。这些像干涉叠加得到综合像(叠加像)。这里用到的条件是,入射孔径就在单元的输入面上。当各单元无规排列时,像的衍射光斑决定于单元的大小。当各单元有规则排列时,则像点的尖峰半宽度决定于多单元干涉因子。

## 参 考 文 献

- [1] 周国生,田丽娟,吴梅英,彭连惠;《生物物理学报》,1985,1, No. 3 (Sep), 135.
- [2] 王绍民;《杭州大学学报》,1983,10, No. 4 (Oct), 476.
- [3] 周国生,王绍民;《物理学报》,1984,33, No. 5 (May), 612.
- [4] 周国生,王绍民,陈英礼;《光学学报》,1984,4, No. 10 (Oct), 887.
- [5] 王绍民,周国生;《光学学报》,1984,4, No. 12 (Dec), 1119.

## Fraunhofer diffraction analysis on imaging properties of optical array with a large radius of curvature

ZHOU GUOSHENG

*(Department of Physics, Shanxi University, Taiyuan)*

WANG SHAOMIN

*(Department of Physics, Hangzhou University)*

DENG XIMING

*(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)*

*(Received 20 June 1985; revised 17 October 1985)*

### Abstract

Both individual and unitary imaging properties of a spherical optical array and effects of element input aperture on the imaging properties are discussed. There exist both element diffraction and multi-element interference effect in the unitary imaging process of regular arrays.