

# 喇曼自由电子激光器的耦合频率

褚 成

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

## 提 要

从负能空间电荷波与电磁波耦合的物理图像出发推导了喇曼散射模式自由电子激光器耦合频率的解析表达式。对闲频波为静电束模而电子束周围环境分别为自由空间及波导管的不同场合给出了相应的计算公式。在若干极限条件下,我们的公式化为文献中列出的近似式。基于以上分析进行的实验研究表明理论计算的正确性。

## 一、引 言

喇曼自由电子激光器的工作机理可认为是电子束等离子体中负能空间电荷波与正能电磁波相互耦合引起后者的相干放大。在没有空间静磁场存在时,这两种波的色散曲线并不相交。故无相干辐射放大现象。波荡场的作用是使负能空间电荷波色散曲线位置发生靠拢正能电磁波色散曲线的移动,造成两者相交从而导致耦合放大。耦合频率及波数即可由该交点位置所确定。

本文分析了各种不同条件下喇曼自由电子激光器的耦合频率,计算的对象是考虑一束单能强流相对论电子束在自由空间(或波导管中)沿引导磁场  $B_0$  ( $z$  轴方向)通过右旋偏极静磁波荡场(波数为  $k_w$ )。当然,电子束、引导场及波荡器的各项参数均需满足喇曼型器件判据<sup>[1~3]</sup>。

根据理论分析,我们进行了喇曼自由电子激光器的实验研究,获得了激光辐射输出。初步的参量研究证实了理论是正确的。

## 二、波荡场中的负能空间波色散曲线

图1示意地画出了能够形成电磁波放大时波荡场(或横向速度场)、电磁波及空间电荷波沿  $z$  轴的相位关系。电磁波(电场分量为  $E$ )与自由电子激光(横向速度为  $v_{\perp}$ )相互作用能量方程近似为

$$\dot{\gamma} = -\frac{ev_{\perp}E}{c^2m}, \quad (1)$$

如  $\dot{\gamma} < 0$ , 则电磁波获得放大。如某处  $v_{\perp}$  与  $E$  同时达最大值,则当空间电荷波超过半个波荡场周期( $\lambda_w/2$ )时,为保持  $\dot{\gamma}$  负值最大,应当使  $E$  亦反向最大;即电磁波应当恰好超前空间电荷波半个周期。

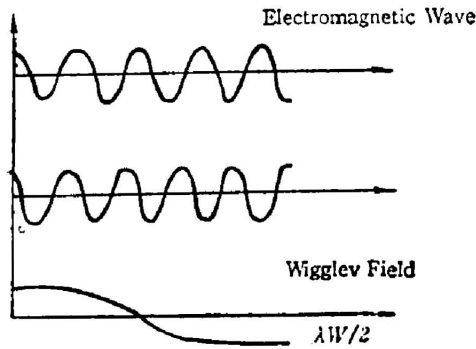


Fig. 1 Schematic of the phase relationship among wiggler field, EM wave and space-charge wave in a free-electron laser

$$\lambda_w/2\lambda = \lambda_w/2\lambda_d - 1/2, \quad (2)$$

式中  $\lambda$  及  $\lambda_d$  分别为电磁波及空间电荷波波长, 亦可写成

$$k = k_d - k_w, \quad (2')$$

式中  $k \equiv 2\pi/\lambda$ ,  $k_d \equiv 2\pi/\lambda_d$ ,  $k_w \equiv 2\pi/\lambda_w$ 。此即连系电磁辐射波数与空间电荷波数的关系式<sup>[1~3]</sup>。(2)'式清楚地表明, 在将  $(\omega, k_d)$  坐标系中的空间电荷色散曲线改画在  $(\omega, k)$  坐标系时曲线将会向左沿  $k$  轴平移  $k_w$ 。正是这种平移, 造成该曲线与本来互不相干的电磁波色散曲线的相交, 导致自由电子激光辐射。

### 三、负能静电束模引起的自由空间耦合频率

在以  $v_s$  速度沿  $z$  轴方向运动的粒子坐标系中(量均用加撇表示), 电子束等离子体的静电束模色散关系式(负能枝)为<sup>[4]</sup>

$$\omega'_i = -\omega_p, \quad (3)$$

式中  $\omega'_i$  为粒子坐标系中静电束模频率;  $\omega_p = \sqrt{4\pi n e^2 / \gamma_s m}$  为等离子体特征频率(或称响应频率);  $\gamma_s \equiv 1/\sqrt{1-\beta_s^2}$  为电子束沿  $z$  轴速度  $v_s$  所决定的相对论因子;  $\beta_s \equiv v_s/c$ ;  $n$  为实验室坐标中电子密度;  $e$ 、 $m$  分别为电子电荷及质量。由相对论多普勒关系

$$\omega'_i = \gamma_s(\omega - v_s k_i), \quad (4)$$

得出负能静电束模在实验室坐标中的色散关系式为(图3中虚线):

$$\omega = v_s k + v_s k_w - \omega_p / \gamma_s. \quad (5)$$

另一方面, 粒子坐标系中沿  $z$  轴传布的右旋圆偏振电磁波的色散关系式为<sup>[4]</sup>

$$\omega'^2 - c^2 k'^2 - \frac{\omega_p'^2 \omega'}{\omega' - \Omega_0} = 0, \quad (6)$$

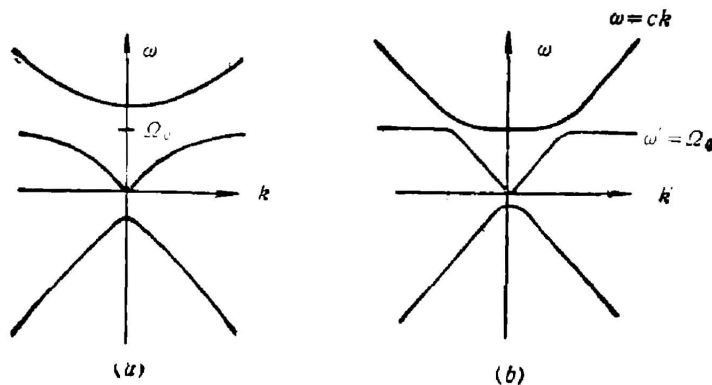


Fig. 2 Dispersion curves of EM wave in particle reference frame  
(a) General case ( $\omega_p \approx \Omega_0$ ); (b)  $\omega_p \ll \Omega_0$

式中  $\omega'$ ,  $k'$  分别为粒子坐标系中电磁波频率及波数,  $\Omega_0 \equiv eB_0/mc$  为磁回旋频率,  $B_0$  为  $z$  向引导磁场。

(6)式相应曲线的一般形状见图 2(a); 当  $\omega_p \ll \Omega_0$  时(注意, 这一条件并不当然成立, 尤其在电子束能量较低时), 曲线由图 2(b) 所示, 即趋近于  $\omega' = \Omega_0$  及  $\omega' = \pm ck'$  这三条直线。

由相对论多普勒公式  $\omega' = \gamma_s(\omega - v_s k)$ ,  $k' = \gamma_s(k - v_s \omega/c^2)$  可得出 (6) 式在实验室坐标中的相应关系式为

$$(\omega^2 - k^2 c^2) - \frac{\omega_p^2 (\omega - k v_s)}{(\omega - k v_s - \Omega_0 / \gamma_s)} = 0. \quad (7)$$

该曲线的大致形状如图 3 中的实线所示。图中 A 点即为所要求的相交点, 该点对应的频率即为喇曼自由电子激光器的耦合频率。需要指出的是, 在我们这种简化了的讨论中, 仅涉及  $\omega$  及  $k$  的实部。

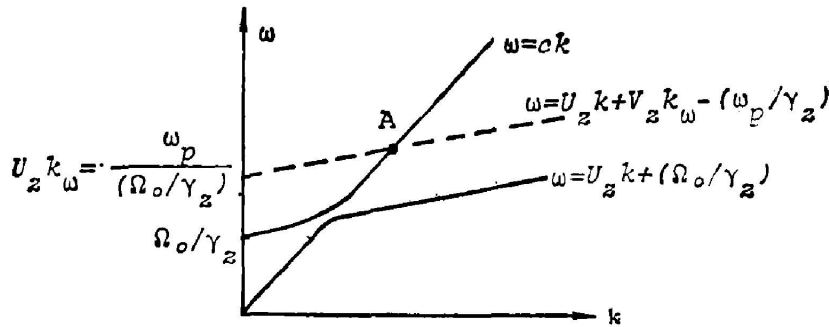


Fig. 3 Dispersion curves of EM wave (solid curve) and negative-energy space-charge wave (dash curve) in lab reference frame

$$\left( \frac{\Omega_0}{\gamma_s} < \left( v_s k_w - \frac{\omega_p}{\gamma_s} \right), \omega_p \ll \Omega_0 \right)$$

由 (7) 式及 (5) 式可求出该频率  $\omega$  及相应的波数  $k$  为

$$\omega = \gamma_s^2 \alpha \pm \gamma_s^2 \alpha \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma_s^2 \alpha (\alpha - \Omega_0 / \gamma_s)} \right]^{1/2}, \quad (8)$$

$$k = \frac{\beta_s \gamma_s^2 \alpha}{c} \pm \frac{\gamma_s^2 \alpha}{c} \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma_s^2 \alpha (\alpha - \Omega_0 / \gamma_s)} \right]^{1/2}, \quad (9)$$

式中  $\alpha \equiv v_s k_w - \omega_p / \gamma_s$ 。考虑到波的正向传播, (8)、(9) 式中应取 + 号。在满足  $\omega_p^2 \ll \gamma_s \alpha (\alpha - \Omega_0 / \gamma_s)$  时 (条件是  $\omega_p$  远小于  $\omega$  并且  $\Omega_0$  远离磁共振点  $v_s k_w \gamma_s$ ), (8) 式可近似为

$$\omega \approx \frac{v_s k_w - \omega_p / \gamma_s}{1 - \beta_s} - \frac{\omega_p^2 \beta_s}{2\alpha (\alpha - \Omega_0 / \gamma_s)}. \quad (10)$$

(10) 式右边第一项与 Marshall 等人<sup>[5]</sup> 根据动量、能量守恒定律在理想情况下推导的公式一致 (在  $\omega_p \ll \omega$  时成立)。后面那个修正项的作用是在  $B_0$  较高时 ( $\Omega_0 > \gamma_s \alpha$ ) 使 (10) 式给出的自由电子激光耦合频率略高于文献 [5] 所给公式的相应值; 反之, 当  $\Omega_0 < \gamma_s \alpha$  时, 这一

修改项将使频率降低些。当然,在  $\Omega_0$  接近  $\gamma_s \alpha$  时, (10) 式的前提不再成立, 需使用 (8) 式计算。当  $\Omega_0 = \gamma_s \alpha$  时, 为一奇点。这从图 3 亦可看出, 此时负能静电束模色散曲线 ( $\omega = v_s k + \alpha$ ) 与电磁波色散曲线的渐近线 ( $\omega = v_s k + \Omega_0 / \gamma_s$ ) 重合, 在这附近  $\omega$  与  $k$  值在极大范围内变动。

需要指出的是, 由稳定轨道理论给出的电子横向运动速度为<sup>[6]</sup>

$$v_{\perp} = \Omega_W v_s / (\Omega_0 - \gamma_s v_s k_W), \quad (11)$$

式中  $\Omega_W \equiv eB_W / mc$ 。奇点恰也在  $\Omega_0 = \gamma_s \alpha$  处, 此处  $v_{\perp} \rightarrow \infty$ , 在实际器件中由于会引起电子束能散度急剧劣化而应避免该点。

#### 四、波导管色散关系对耦合频率的影响

以上推导均在无限大自由空间中进行, 实际上由于电子束是在波导管中传输, 电磁波的色散关系式将必须作出修正。为简化问题, 仅考虑工作在磁场远离奇点区域且满足  $\omega_p^2 \ll \omega^2$ , 此时 (7) 式在波导管中近似修正为

$$\omega^2 - c^2 k^2 - \omega_{co}^2 \approx 0, \quad (12)$$

式中  $\omega_{co} \equiv 2\pi c / \lambda_{co}$  为波导管截止频率,  $\lambda_{co}$  为相应截止波长。

由 (5) 式及 (12) 式易算出当闲频波为静电束模时, 自由电子激光耦合频率为

$$\omega = \gamma_s^2 \left( k_W v_s - \frac{\omega_p}{\gamma_s} \right) \left\{ 1 \pm \left[ \beta_z^2 - \frac{\beta_z^2 \omega_{co}^2}{(\frac{\omega_p}{\gamma_s} - k_W v_s)^2 \cdot \gamma_s^2} \right]^{1/2} \right\}, \quad (13)$$

在相比  $k_W v_s$  可忽略  $\omega_p / \gamma_s$  时, 近似有

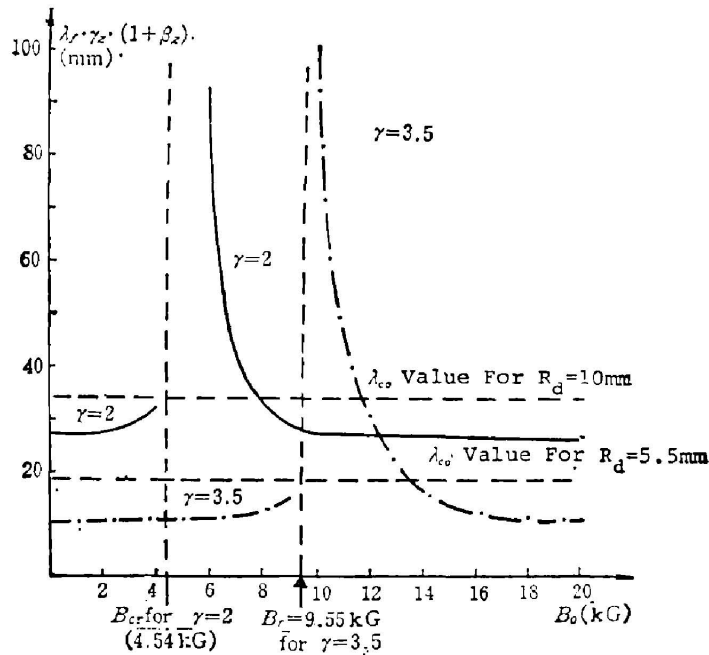


Fig. 4 Parameter  $\lambda_r \cdot \gamma_s \cdot (1 + \beta_z)$  versus  $B_0$

$\lambda_W = 3 \text{ cm}$ ;  $\lambda_{co}$ -cutoff wavelength for  $\text{TE}_{11}$  mode;  $\gamma=2$  curve:  $B_W = 0.5 \text{ kG}$ ,  $I = 1 \text{ kA}$ ;  
 $\gamma=3.5$  curve:  $B_W = 0.63 \text{ kG}$ ,  $I = 1.2 \text{ kA}$

$$\omega \doteq \gamma^2 k_w v_s \left[ 1 \pm \left( \beta_z^2 - \frac{\omega_{co}^2}{\gamma^2 k_w^2 c^2} \right)^{1/2} \right] \quad (14)$$

(14)式表明,为实现空间电荷模与电磁模的耦合,必须满足

$$\lambda_{free} < \frac{\lambda_{co}}{\gamma_s(1+\beta_s)} \quad (15)$$

式中  $\lambda_{free} = 2\pi c / \omega_{free}$  为自由空间中耦合波长。在  $\gamma_s$  较小时(较低能电子束), (15)式并不当然就能满足。事实上, (15)式表明,对于耦合频率来说,波导管的“有效”截止频率增大  $\gamma_s(1+\beta_s)$  倍(比如,对  $\gamma = 2$  电子束,近似增大为 4 倍)。为了正常运转,往往不得不选取较大的波导管半径  $a$  (因为  $\omega_{co} \propto 1/a$ ), 然而如果采用双线螺旋电磁波荡器,波荡器的激励电流  $I_w$  (在固定  $k_w$  及  $B_w$  时) 正比于  $\exp(5.68a/\lambda_w)$ , 这样  $a$  的增加会引起激励电流  $I_w$  的剧烈上升,在技术上造成困难。

图 4 示出了  $\gamma$  分别为 3.5 (加速器电压 1.25 MV) 及 2 (加速器电压约 0.5 MV) 两种场合 (15) 式中参数  $\lambda_{free} \cdot \gamma_s(1+\beta_s)$  随引导磁场  $B_0$  变化的情况。容易看出,取漂移管半径  $R_d = 5.5 \text{ mm}$  对于  $\gamma = 3.5$  是适当的,而对于  $\gamma = 2$  则完全不能工作(在整个范围内 (15) 式不能满足)。我们的实验器件  $\gamma = 2$ , 故取  $R_d = 10 \text{ mm}$ 。

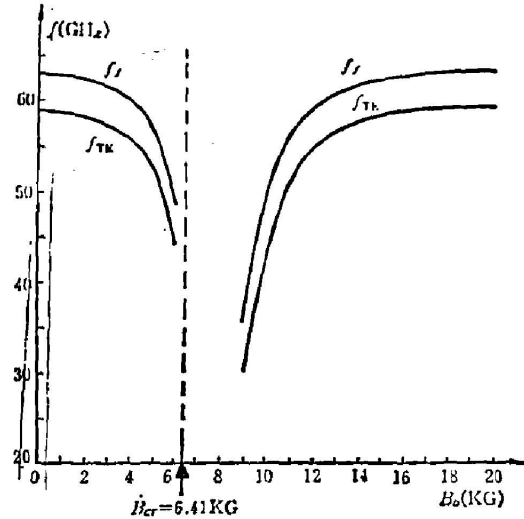


Fig. 5 Coupling frequency in free space  $f_f$  and in waveguide (TE<sub>11</sub> mode) versus guiding magnetic field  $B_0$   
( $\gamma = 2, I = 1 \text{ kA}, r_s = 0.3 \text{ cm}, R_d = 1 \text{ cm}, \lambda_w = 2.25 \text{ cm}, B_w = 0.5 \text{ kG}$ )

图 5 示出了  $\gamma = 2$  时典型条件下,自由空间中耦合频率  $f_f$  及  $\phi 20 \text{ mm}$  漂移管中 TE<sub>11</sub> 模耦合频率  $f_{TE}$  随引导磁场  $B_0$  变化的情况。 $f_f$  和  $f_{TE}$  间的差别是显而易见的。

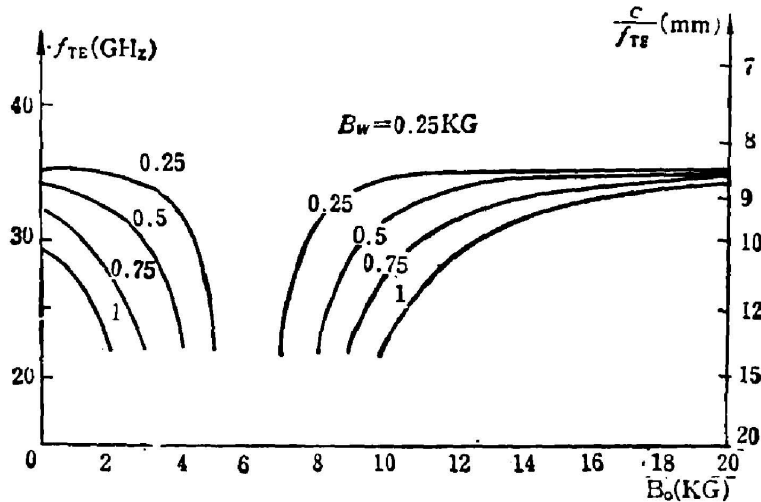


Fig. 6 TE<sub>11</sub> mode coupling frequency versus  $B_0$  for different wiggler fields  
( $\gamma = 2, I = 1 \text{ kA}, r_s = 0.3 \text{ cm}, R_d = 1 \text{ cm}, \lambda_w = 3 \text{ cm}$ )

图 6 给出了  $\gamma=2$  时典型条件下改变波荡场强  $B_w$  对漂移管中  $TE_{11}$  模耦合频率的影响。

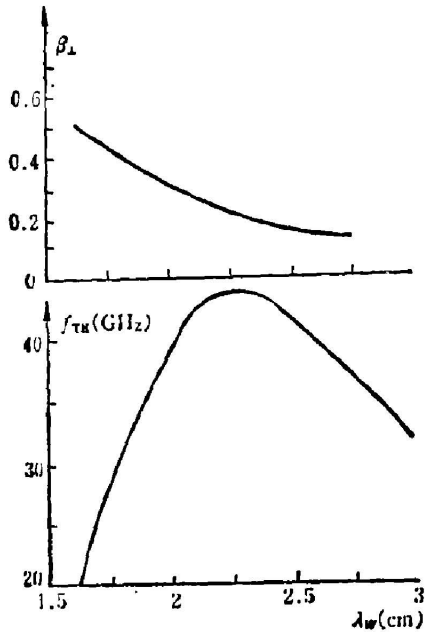


Fig. 7 Transverse velocity of electrons  $\beta_{\perp}$  and  $TE_{11}$  mode coupling frequency  $f_{TE}$  versus wiggler period  $\lambda_w$  ( $\gamma=2$ ,  $I=1$  kA,  $r_2=0.3$  cm,  $R_d=1$  cm,  $B_w=0.5$  kG,  $B_0=10$  kG)

图 7 给出了  $\gamma=2$  时典型条件下改变波荡器波长  $\lambda_w$  对  $TE_{11}$  模耦合频率及电子束横向速度  $\beta_{\perp}$  的影响。图中  $\lambda_w < 2.25$  cm 区域  $f_{TE}$  随  $\lambda_w$  减小而减小, 这是由于此时逐步逼近磁共振奇点(见(11)式)造成  $\beta_{\perp}$  上升而引起的。我们的实验器件选取  $\lambda_w = 2.25$  cm 及 2.2 cm 两种。

由图 4~7 可见, 影响耦合频率的因素是相当多、相当复杂的。在总体设计选择最佳工作点时, 还应与增益计算综合进行。基于以上理论分析, 我们进行了器件的设计和实验。标称能量 0.5 MeV, 束流 1 kA 的强流电子束从精心设计的无箔二极管发射并由轴向强磁场引导; 由此在漂移管中形成约 1 米长的高度准直的柱状(或空心柱状)电子束即作为激光工作物质; 采用右旋圆偏极双绕电磁波荡器(周期  $\lambda_w = 2.2$  cm) 或轴对称铁环波荡器(周期  $\lambda_w = 2.25$  mm) 作为泵浦源, 均获得自由电子激光辐射(相干超辐射放大模式)<sup>[7]</sup>。测出典型的激光脉冲参数是: 半高宽约 20 ns, 平均功率 0.5 MW, 电子效率约 0.1%, 波长约 8 mm ( $K_0$  波段)。

初步的参量研究表明最佳工作区是引导磁场  $B_0 = 9$  kG, 波荡场  $B_w = 0.5$  kG 附近, 这与图 4~7 是符合的, 相应点激光波长计算值为 7 mm 左右, 这也是与实测值符合的。实验的详细过程及结果, 将另文报道。

本文得到王之江教授不少指导; 陆载通、施瑞根、张立芬、胡煜、施津川等同志参加了实验工作, 谨致衷心感谢。

### 参 考 文 献

- [1] P. Sprangle *et al.*; in *Infrared and Millimeter Waves*, (Academic Press), 1979, 1, chapter 7.
- [2] H. P. Freund *et al.*; *Phys. Rev. A*, 1981, **24**, No. 4 (Oct), 1965.
- [3] H. P. Freund *et al.*; *Phys. Rev. A*, 1982, **26**, No. 4 (Oct), 2004.
- [4] J. D. Lawson; *The Physics of Charged-Particle Beams*, (Thomson Ltd.), 1977.
- [5] T. C. Marshall *et al.*; in *Advances in Electronics and Electron Physics*, ed. L. Marton and C. Marton, 1980, **53**.
- [6] L. Friedland; *Phys. Fluids*, 1980, **23**, No. 12 (Dec), 2376.
- [7] 褚戎等; *中国激光*, 1985, **12**, No. 12 (Dec), 767.

## Coupling frequencies of Raman free-electron lasers

CHU CHENG

*(Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)*

(Received 13 March 1985; revised 19 October 1985)

### Abstract

Analytical expressions of coupling frequencies of Raman free-electron lasers are deduced based on the physical image of the coupling between negative-energy space-charge wave and EM wave. Formulas are presented for different operation schemes. Under certain limit conditions, these formulas are reduced to the familiar approximate expressions in literature. Experimental results have borne out our analysis.