第6卷 第3期　　光 学 学 报　　Vol. 6, No. 3
1986年3月　　ACTA OPTICA SINICA　　March, 1986

# 压缩态产生机制和量子标度演化

范 洪 义
(中国科学技术大学近代物理系)

提 要

本文用正规乘积内积分法来研究压缩态产生的动力学机制及其与量子标度演化的内在联系。

压缩态[1](squeezed state)是量子光学中继相干态建立后的又一令人注目的量子态，它可以在某个正交分量上具有比相干态更小的量子噪声，从而可能应用于光通信和引力波检测等领域中，目前物理学家们正致力于在光学非线性相互作用过程中找到压缩态。本文尝试用正规乘积内积分法研究压缩态动力学，即真空态演化为压缩态的动力学机制，并给出这种机制和量子标度(scale)演化的关系。为此目的，本文首先用正规乘积内积分法及由此导出的算符公式(见下面的(4)式)给出么正压缩变换算符，与以前的推导方法都不同，我们只是从么正变换保持对易关系不变和双光子态(压缩态)的含义为出发点，就可以用正规乘积内积分技巧来得到压缩算符的正规乘积表示。考虑到在产生压缩态的实验装置中(例如四波混频装置)压缩参数是时间的函数，在此情况下，我们用一个算符公式(见下行文(25)式找到了压缩算符随时间演化的方程，由此导出了描写压缩行为的动力学哈密顿量，为了深刻揭示"压缩"的实质，文中还讨论了压缩态产生和量子标度演化的关系。这种用正规乘积内积分法来系统陈述压缩行为在以往别的文献还没有见到过。

## 一、压缩算符的正规乘积积分法

在文献[2]中我们曾用正规乘积内积分法处理积分型投影算符$\int \frac{dq}{\mu}\left|\frac{q}{\mu}\right\rangle\langle q|$来导出压缩算符。本节从双光子态的含义和么正变换保持对易关系不变为基点，推导压缩算符的正规乘积展开。由双光子态(压缩态)的含义，它应该用谐振子产生算符$a^{+2}$平方的函数作用于真空态而得到，即

$$\| \rangle = f(a^{+2})|0\rangle, \tag{1}$$

其中$\|\rangle$表示双光子态希伯空间中的态矢，$|0\rangle$是谐振子真空态矢，满足$a|0\rangle=0$，消灭算符$a$与产生算符$a^+$满足对易关系$[a, a^+]=1$。由于算符的指数函数是有明确定义的，而且有逆，因而算符函数$f(a^{+2})$的一个简单选择是选$f(a^{+2})=A\exp(ga^{+2})$，代入(1)式得

$$\| \rangle = A\exp(ga^{+2})|0\rangle = 1, \tag{2}$$

其中$A$和$g$是待定的实数常数。$\|\rangle$的归一化要求给出下式

收稿日期：1985年6月17日；收到修改稿日期：1985年9月17日

$$A^2\langle 0|\exp(ga^2)\exp(ga^{+2})|0\rangle=1。\tag{3}$$

利用在文献[2]中用正规乘积内积分法可导出的算符恒等式

$$\exp(fa^2)\exp(ga^{+2})=\frac{1}{\sqrt{1-4fg}}\exp\left(\frac{ga^{+2}}{1-4fg}\right)\exp[-a^{+}a\ln(1-4fg)]\exp\left(\frac{fa^2}{1-4fg}\right),\tag{4}$$

其中 $f$、$g$ 满足

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{Re}(-\xi+f+g)<0, & \mathrm{Re}\left(\dfrac{\xi^2-4fg}{-\xi+f+g}\right)<0; \\ \text{或}\quad \mathrm{Re}(\xi-f-g)<0, & \mathrm{Re}\left(\dfrac{\xi^2-4fg}{\xi-f-g}\right)<0。\end{array}\right\}\tag{5}$$

设(3)式中的 $g$ 满足条件(5)时，由正规乘积的真空期望值为零的性质和(4)式可把(3)式写成

$$A^2/\sqrt{1-4g^2}=1,\tag{6}$$

这是 $A$ 与 $g$ 所应该满足的约束关系。对(2)式以消灭算符 $a$ 作用之，得到

$$\left.\begin{array}{l} a\|\rangle=aA\exp(ga^{+2})|0\rangle=A[a,\exp(ga^{+2})]|0\rangle=2ga^{+}\|\rangle, \\ \text{即}\quad (a-2ga^{+})\|\rangle=0。\end{array}\right\}\tag{7}$$

记 $b=\tau(a-2ga^{+})$，其中 $\tau$ 是某个实数，则如果把 $b$ 作为新的消灭算符，(7)式中 $\|\rangle$ 就是新的真空态，记作 $\|0\rangle$。从 $a$ 到 $b$ 的量子变换应是么正的，这就要求 $[b, b^{+}]=1$，即

$$\tau^2[a-2ga^{+},\ a^{+}-2g^{*}a]=\tau^2(1-4g^2)=1,\tag{8}$$

比较(8)式与(6)式给出 $\tau^{-1}=A^2$。容易看出(6)式有满足(5)式的解 $g=-\mathrm{th}\,r/2$，$A=\mathrm{sech}^{1/2}r$（$r$ 实数）。故得 $\tau=\mathrm{ch}\,r$，即

$$b=a\,\mathrm{ch}\,r+a^{+}\,\mathrm{sh}\,r,\quad b^{+}=a^{+}\,\mathrm{ch}\,r+a\,\mathrm{sh}\,r。\tag{9}$$

新的真空态现在记为 $\|0\rangle_r$，即表示与 $r$ 有关

$$\|0\rangle_r=\mathrm{sech}^{1/2}r\exp\left(-\frac{a^{+2}}{2}\mathrm{th}\,r\right)|0\rangle=\mathrm{sech}^{1/2}r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{th}\,r)^n(2n!)^{1/2}}{n!\,2^n}|2n\rangle。\tag{10}$$

利用数学公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\quad |x|<1,$$

可以验证(10)式表示的 $\|0\rangle_r$ 是归一化的。即

$${}_r\langle 0\|0\rangle_r=1。$$

不同压缩参数 $r$ 的真空态之间并不正交，即

$${}_r\langle 0\|0\rangle_{r'}=\mathrm{sech}^{1/2}(r-r')。\tag{11}$$

在满足(5)式前提下，以 $\exp(\lambda a^2)$ 作用于 $\|0\rangle_r$，用(4)式可得

$$\exp(\lambda a^2)\|0\rangle_r=\frac{\mathrm{sech}^{1/2}r}{\sqrt{1+2\lambda\,\mathrm{th}\,r}}\exp\left(\frac{-\mathrm{th}\,r}{2+4\lambda\,\mathrm{th}\,r}a^{+2}\right)|0\rangle。\tag{12}$$

可见它仍是压缩真空，只是压缩参数发生了变化。现在要找一个变换，能把 $a$ 变为 $b$，即也把 $|0\rangle$ 变为 $\|0\rangle$

$$UaU^{-1}=b=a\,\mathrm{ch}\,r+a^{+}\,\mathrm{sh}\,r,\quad U|0\rangle=\|0\rangle。\tag{13}$$

为此目的，引入 $a$ 的本征态即相干态

$$a|z\rangle=z|z\rangle,\quad |z\rangle=\exp(za^{+}-z^{*}a)|0\rangle=\exp\left(-\frac{|z|^2}{2}+za^{+}\right)|0\rangle。\tag{14}$$

利用相干态 $|z\rangle$ 的超完备性

$$\int \frac{d^2z}{\pi} |z\rangle\langle z| = 1, \tag{15}$$

可把变换算子 $U$ 写成

$$U = U\cdot\int \frac{d^2z}{\pi} |z\rangle\langle z| = \int \frac{d^2z}{\pi} U\cdot \exp(za^+) U^{-1} U|0\rangle\langle z|\exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right)$$

$$= \operatorname{sech}^{1/2} r \int \frac{d^2z}{\pi} \exp[z(a^+ \operatorname{ch} r + a \operatorname{sh} r)]\exp\left(-\frac{a^{+2}}{2}\operatorname{th} r\right)|0\rangle\langle z|\exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right)。\tag{16}$$

利用 Baker-Hausdorff 公式和恒等式[2]

$$\exp(\alpha a)\exp(\beta a^{+2}) = \exp(\beta\alpha^2)\exp(\beta a^{+2} + 2\beta\alpha a^+)\exp(\alpha a)。\tag{17}$$

(16)式变为

$$U = \operatorname{sech}^{1/2} r \int \frac{d^2z}{\pi} \exp(za^+ \operatorname{ch} r)\exp\left(-\frac{a^{+2}}{2}\operatorname{th} r - z\operatorname{th} r \operatorname{sh} r a^+\right)|0\rangle\langle 0|\exp\left[z^* a - |z|^2\right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{th} r}{2} z^2 \operatorname{sh}^2 r + (z^2 \operatorname{sh} 2r/4)\right] = \operatorname{sech}^{1/2} r \int \frac{dz^2}{\pi} :\exp[-|z|^2 + z^* a$$

$$+ za^+ \operatorname{sech} r + (z^2 \operatorname{th} r/2) - a^+ a]:, \tag{18}$$

其中利用了[2]

$$|0\rangle\langle 0| = :\exp(-a^+ a):,\ (:\ :\ 表示正规乘积)$$

用数学公式

$$\int \frac{d^2z}{\pi} \exp[\xi|z|^2 + \eta z^*] f(z) = \left(-\frac{1}{\xi}\right) f\left(-\frac{\eta}{\xi}\right), \quad \operatorname{Re}\xi < 0, \tag{19}$$

以及正规乘积内积分法可得

$$U = \operatorname{sech}^{1/2} r :\exp\left[-\frac{a^{+2}}{2}\operatorname{th} r + a^+ a(\operatorname{sech} r - 1) + \frac{a^2}{2}\operatorname{th} r\right]:, \tag{20}$$

再用算符恒等式

$$\exp(-\lambda N) = :\exp\{[\exp(-\lambda) - 1] a^+ a\}:, \quad N = a^+ a。$$

可把(20)式写为

$$U = \exp\left(-\frac{a^{+2}}{2}\operatorname{th} r\right)\exp\left[\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)\ln \operatorname{sech} r\right]\exp\left(\frac{a^2}{2}\operatorname{th} r\right)。\tag{21}$$

此即么正压缩算符的正规乘积分解式，它是基于双光子态和么正变换的含义以及用了正规乘积内积分法得到的，而通常是用李代数表示论的方法来导出的。以下列出的公式(26)对研究力学量在压缩真空态的期望值特别有用，例如用(25)与(10)式可得

$$T_r N\|0\rangle_r\, {}_r\langle 0\| = {}_r\langle 0\|a^+ a\|0\rangle_r = \langle 0|(a^+ - a\operatorname{th} r)\exp\left[-\frac{a^2}{2}\operatorname{th} r\right]\exp\left(-\frac{a^{+2}}{2}\operatorname{th} r\right)$$

$$\times (a - a^+ \operatorname{th} r)|0\rangle \operatorname{sech} r = \operatorname{th}^2 r\, {}_r\langle 0\|(N+1)\|0\rangle_r,$$

由此立刻得到压缩真空的平均光子数为

$${}_r\langle 0\|N\|0\rangle_r = \operatorname{sech}^2 r。\tag{22}$$

## 二、压缩态演化和量子标度变化

本节从(21)式出发讨论真空态演化为压缩态的动力学机制。为此必须考虑(20)式中压

缩参数是时间 $t$ 的函数的情况，即令

$$r(t)=2i\int_{t_0}^{t}f(t')\exp(2i\omega t')dt'=-2V(t), \tag{23}$$

其中 $f(t)$ 是外源，例如在四波混频相互作用中，它与光学介质的非线性磁化率有关，将(23)式代入(21)式得

$$U(t,\ t_0)=\exp\Big(\frac{a^{+2}}{2}\,\mathrm{th}\,2V\Big)\exp\Big[\Big(a^+a+\frac{1}{2}\Big)\ln\mathrm{sech}\,2V\Big]\exp\Big(-\frac{a^2}{2}\mathrm{th}\,2V\Big)。 \tag{24}$$

它满足初始条件 $U(t_0,\ t_0)=1$。(24)式对时间求微商，并利用算符公式(见附录)

$$a^n\exp(\nu a^{+2})=\exp(\nu a^{+2})\sum_{k=0}^{n/2}\frac{n!}{k!\,(n-2k)!}:(2\nu a^++a)^{n-2k}:\nu^k, \tag{25}$$

导出算符关系

$$\exp(\nu a^{+2})=(a-2\nu a^+)\exp(\nu a^{+2}), \tag{26}$$

$$\exp(\nu a^{+2})a^2=(a^2+4\nu a^{+2}-4\nu a^+a-2\nu)\exp(\nu a^{+2}), \tag{27}$$

经整理化简成

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,\ t_0)=(a^{+2}-a^2)U(t,\ t_0)V', \tag{28}$$

如取 $f(t)\exp(2i\omega t)=iV(t)$，$V(t)$ 为实函数(原因见下)则(28)式变为

$$\begin{aligned}i\frac{\partial}{\partial t}U(t,\ t_0)&=[a^{+2}f(t)\exp(2i\omega t)+a^2f^*(t)\exp(-2i\omega t)]U(t,\ t_0)\\&=\{\exp(iH_0t)[f(t)a^{+2}+f^*(t)a^2]\exp(-iH_0t)\}U(t,\ t_0)\\&=H_I(t)U(t,\ t_0),\end{aligned} \tag{29}$$

其中已经定义

$$\left.\begin{aligned}&H_0=\omega a^+a,\\&H_I(t)=\exp(iH_0t)[f(t)a^{+2}+f^*(t)a^2]\exp(-2iH_0t)。\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

根据表象变换理论可知，(30)式表明这是从薛定格表象到相互作用表象的变换，而(29)式表明它是在相互作用表象中压缩演化算符所遵循的方程，从(29)和(30)式可以知道在薛定格表象中描写可以产生压缩态机制的哈密顿量是

$$H_S=\omega a^+a+f(t)a^{+2}+f^*(t)a^2。 \tag{31}$$

由相互作用表象中的压缩演化算符(24)式和关系式

$$U_I(t,\ t_0)=\exp(iH_0t)U_S(t,\ t_0)\exp(-iH_0t), \tag{32}$$

可以得到薛定格表象中的演化算符

$$\begin{aligned}U_S(t,\ t_0)=&\exp\Big[\frac{a^{+2}}{2}\exp(-2i\omega t)\,\mathrm{th}\,2V\Big]\exp\{a^+a[i\omega(t_0-t)+\ln\mathrm{sech}\,2V]\}\\&\times\exp\Big[-\frac{a^2}{2}\exp(2i\omega t_0)\,\mathrm{th}\,2V\Big]\mathrm{sech}^{\frac{1}{2}}2V。\end{aligned} \tag{33}$$

由此容易求出压缩哈密顿量的相干态转换函数

$$\begin{aligned}\langle zt|z_0t_0\rangle&=\langle z|U_S(t,\ t_0)|z_0\rangle\\&=\exp\Big\{\frac{1}{2}\,\mathrm{th}\,2V[z^{*2}\exp(-2i\omega t)-z_0^2\exp(2i\omega t_0)]-\frac{|z|^2+|z_0|^2}{2}\\&\quad+z^*z_0\exp[-i\omega(t-t_0)]\,\mathrm{sech}\,2V\Big\}。\end{aligned} \tag{34}$$

它表示在 $t_0$ 时刻系统处于相干态，经压缩后在 $t$ 时刻处于另一相干态的跃迁矩阵元。又设

系统在 $t_0$ 时刻处于 $H_0$ 的基态 $|0\rangle$, 则由波动方程

$$|t\rangle=U_S(t,\ t_0)|t_0\rangle, \tag{35}$$

得

$$U_S(t,\ t_0)|0\rangle=\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}2V\exp\left[\frac{\operatorname{th}2V}{2}a^{+2}\exp(-2i\omega t)\right]|0\rangle。 \tag{36}$$

压缩态的产生机制和量子标度演化的关系。

量子标度演化是指本征值为 $q$ 的坐标本征态 $|q\rangle$ 演化为本征值为 $\mu q(\mu>0)$ 的坐标本征态 $|\mu q\rangle$。可以证明压缩演化算符(24)式正是起了这种标度演化的作用(当 $V(t)$ 为实，即 $r(t)$ 为实时)，事实上，让薛定格表象和相互作用表象(用上标 $ip$ 标志)在 $t=0$ 时刻重合，即 $|q\rangle=|q,\ 0\rangle^{ip}$, 则它在演化压缩算符作用下为

$$|q,\ t\rangle^{ip}=U(t,\ 0)|q,\ 0\rangle^{ip}=U(t,\ 0)|q\rangle, \tag{37}$$

利用坐标算符 $Q$ 的本征态 $|q\rangle$ 的粒子表象展开式

$$|q\rangle=\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{\omega^2q^2}{2}+\sqrt{2\omega}\,qa^+-\frac{a^{+2}}{2}\right)|0\rangle, \tag{38}$$

$$Q|q\rangle=q|q\rangle,\quad Q=(a+a^+)/\sqrt{2\omega}, \tag{39}$$

此处已取了 $\hbar=m=1$, 以及(24)式可把(37)式写为

$$\begin{aligned}|q,\ t\rangle^{ip}&=\exp\left(\frac{a^{+2}}{2}\operatorname{th}2V\right)\exp\left[\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)\ln\operatorname{sech}2V\right]\exp\left(-\frac{a^2}{2}\operatorname{th}2V\right)\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4}\\&\times\exp\left[-\frac{\omega^2}{2}q^2+\sqrt{2\omega}\,qa^+-\frac{a^{+2}}{2}\right]|0\rangle=\sqrt{\mu}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2}q^2\mu^2\right.\\&\left.+\sqrt{2\omega}\,q\mu a^+-\frac{a^{+2}}{2}\right)|0\rangle==\sqrt{\mu}\,|\mu q,\ 0\rangle=\sqrt{\mu}\,|\mu q\rangle,\end{aligned} \tag{40}$$

其中 $\mu=\exp(2V)$, $\operatorname{sech}2V=2\mu/(\mu^2+1)$, $\operatorname{th}2V=(\mu^2-1)/(\mu^2+1)$, 并在推导中用了公式(4)以及以下公式

$$f(a)\exp(-\lambda a^+)=\exp(-\lambda a^+)f(a-\lambda),\quad \exp(-\lambda a^+a)f(a^+)=f(a^+e^{-\lambda})\exp(-\lambda a^+a)。 \tag{41}$$

可以证明压缩演化算符对动量本征态 $|p\rangle$ 的作用为

$$|p,\ t\rangle^{ip}=U(t,\ 0)|p,\ 0\rangle^{ip}=(1/\sqrt{\mu})|(p/\mu)\rangle, \tag{42}$$

即对 $|q\rangle$ 和 $|p\rangle$ 的压缩效果互逆，因此压缩态的产生是伴随着量子标度演化的。由于坐标 $Q$ 和动量 $p$ 算符的本征值都是实数，所以 $\mu$ 要取实数，这就是要求 $r(t)$ 为实（即 $f(t)=i\exp(-2i\omega t)v(t)$, $v(t)$ 为实函数)的原因。利用坐标本征态和动量本征态的完备性可以将压缩演化算符表示成

$$U(t,\ 0)=\int_{-\infty}^{\infty}dq|q,t\rangle^{ip\,ip}\langle q,\ 0|=\int_{-\infty}^{\infty}dq\sqrt{\mu}\,|\mu q\rangle\langle q| \tag{43}$$

或者

$$U(t,\ 0)=\int_{-\infty}^{\infty}dp|p,\ t\rangle^{ip\,ip}\langle p,\ 0|=\int_{-\infty}^{\infty}dp(1/\sqrt{\mu})|(p/\mu)\rangle\langle p|。 \tag{44}$$

注意以上两式的最后结果与文献[2]中(26)式相同，但这里的讨论是蕴含了量子标度的时间演化，因此就物理内容比仅仅找到一个么正标度变换算符要丰富得多。以上讨论表明，用正规乘积内积分法来研究压缩态的性质和动力学机制是行之有效的。

## 附 录

为证明(25)式，注意到下式中令

$$z=x+iy,\quad d^2z=dx\,dy,\quad \mathrm{Re}\,\xi<0$$

时有

$$\int\frac{d^2z}{\pi}z^n\exp(\zeta|z|^2+\xi z+\eta z^*+gz^{*2})=\left(\frac{d}{d\xi}\right)^n\int\frac{d^2z}{\pi}\exp(\zeta|z|^2+\xi z+\eta z^*+gz^{*2})$$
$$=\left(\frac{d}{d\xi}\right)^n\left(-\frac{1}{\zeta}\right)\exp\left[\frac{1}{\zeta^2}(g\xi^2-\zeta\xi\eta)\right]=-\frac{1}{\zeta}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^n\exp\left[\frac{g}{\zeta^2}\left(\xi-\frac{\zeta\eta}{2g}\right)^2-\frac{\eta^2}{2g}\right]。\tag{A1}$$

其中积分收敛条件为 $\mathrm{Re}(\zeta+g)<0$, $\mathrm{Re}[\zeta^2/(\zeta+g)]<0$；或 $\mathrm{Re}(\zeta-g)<0$, $\mathrm{Re}[\zeta^2/(\zeta-g)]<0$。又由

$$\left(\frac{d}{dn}\right)^n\exp(\lambda x^2)=\sum_{k=0}^{n/2}\frac{n!}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k}\lambda^{n-k}。\tag{A2}$$

可见(A1)式可变为

$$\int\frac{d^2z}{\pi}z^n\exp(\zeta|z|^2+\xi z+\eta z^*+gz^{*2})$$
$$=-\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{2n+1}\exp\left[\frac{1}{\zeta^2}(g\xi^2-\eta\xi\zeta)\right]\sum_{k=0}^{n/2}\frac{n!}{k!\,(n-2k)!}(2\xi g-\zeta\eta)^{n-2k}(g\zeta^2)^k。\tag{A3}$$

由(A3)式及相干态超完备性和正规乘积内积分法得(25)式

$$a^n\exp(\nu a^-)=\int\frac{d^2z}{\pi}z^n|z\rangle\langle z|\exp(\nu z^{*2})=:\int\frac{d^2z}{\pi}:z^n\exp(-|z|^2+za^++z^*a+\nu z^{*2}-a^+a):$$
$$=\exp(\nu a^{+2})\sum_{k=0}^{n/2}\frac{n!}{k!\,(n-2k)!}:(2\nu a^++a)^{n-2k}:\nu^k,$$

其中 $\nu$ 的取值初看起来要满足积分(A1)式的收敛条件，即 $\mathrm{Re}(-1+\nu)<0$ 或 $\mathrm{Re}(-1-\nu)<0$ 而 $\mathrm{Re}\nu<1$ 或 $\mathrm{Re}\nu>-1$，实际上对 $\nu$ 就没限制了。

## 参 考 文 献


[1] D. F. Walls; *Nature*, 1983, **306**, No. 10 (Nov), 141.

[2] Fan Hongyi *et al.*; 《中国科学》, (A 辑), 1984, No. 1 (Jan), 61.

[3] Б. П. 吉米多维奇;《数学分析习题集》, (人民教育出版社), 124, 1230 题。


# Generation of squeezed state and quantum scaling evolution


FAN HONGYI

*(Department of Modern Physics, China University of Science and Technology, Hefei)*


(Received 17 June 1985; revised 17 September 1985)

## Abstract


By means of integral techniques within normal product we have studied the dynamic mechanism of the generation of squeezed state and its intrinsic relationship with the quantum scaling evolution.