

# 球面波全息微粒测量系统性能的研究

吕迺光 钟 林 陈家壁  
(华中工学院光学工程系)

## 提 要

在测量微粒场的全息技术中,通常采用平面波系统进行记录和再现。由于全息图衍射效率低,微粒全息像误差大,限制了使用范围。本文导出了用球面波系统记录微粒全息图和再现微粒像的理论公式,并对两种系统全息记录的调制度、全息图衍射效率、再现像误差作出比较。分析和实验结果表明,在这些方面球面波系统较之平面波系统更为优越。

采用脉冲激光全息技术能实现对动态微粒场全场参数及其变化规律的测量。因而,作为一种具有实用价值的微粒场测量方法,全息技术受到极大的重视。例如,近年来,采用这种方法曾成功地测量了天然雾场<sup>[1]</sup>,研究了高空云雾水滴和冰晶<sup>[2]</sup>;测量了粒子运动速度分布<sup>[3]</sup>等等。

目前在微粒场全息测量中,习惯采用的结构是平面波同轴系统,所记录的全息图衍射效率低、再现像亮度小、误差大,这将最终影响到对微粒再现像的探测和测量精度。1979年,Witherow首先在实验中采用球面波同轴系统<sup>[4]</sup>,以提高全息测量的微粒场深度。本文从衍射理论出发,导出了球面波同轴系统记录微粒全息图和再现微粒像的理论公式。在此基础上,深入比较了两种系统的性能,并进行了实验验证。

## 一、球面波照明下微粒的全息记录与再现

为了弄清微粒全息成像的物理本质,需要从标量衍射理论出发,分析全息记录和再现的过程。

### 1. 微粒的全息记录

球面波照明下,单颗微粒的全息记录如图1(a)所示。微粒位于 $\xi\eta$ 平面,记录介质位于 $xy$ 平面。近似把微粒的复振幅透过率表示为

$$t(r) = 1 - \text{circ}(r/R), \quad (1)$$

式中 $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ,  $R$ 为微粒半径。

照明微粒的球面波的傍轴近似为

$$U(r) \doteq \frac{B}{z_1 - z_2} \exp \left\{ ik \left[ (z_1 - z_2) + \frac{r^2}{2(z_1 - z_2)} \right] \right\}, \quad (2)$$

其中 $B$ 为离开点光源单位距离处的振幅。紧靠微粒后的平面上,光场分布为 $t(r) \cdot U(r)$ ,考虑记录介质相对微粒位于远场,在夫琅和费近似条件下可以导出记录介质位于 $xy$ 平面的光强分布为

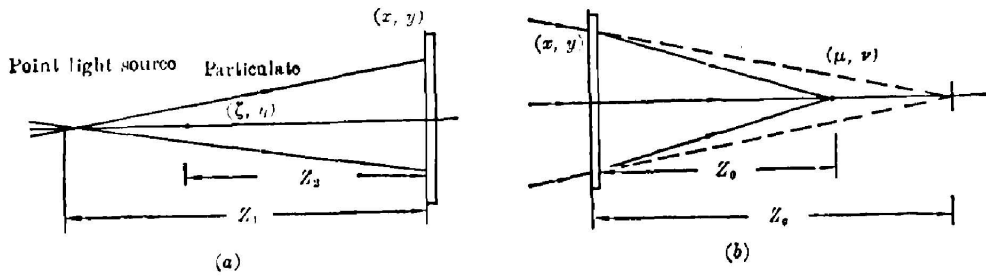


Fig. 1 Schematic of particulate holographic recording (a) and reconstruction (b) using sphere wave illumination

$$I_c(\rho) = \left(\frac{B}{z_1}\right)^2 \left\{ 1 + \left[ \frac{z_1 \pi R^2}{\lambda z_2 (z_1 - z_2)} \right]^2 \left[ \frac{2J_1(w)}{w} \right]^2 - \frac{2z_1 \pi R^2}{\lambda z_2 (z_1 - z_2)} \left[ \frac{2J_1(w)}{w} \right] \sin[\phi(\rho)] \right\}, \quad (3)$$

式中  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $w = (kR\rho/z_2)$ ,  $\sin[\phi(\rho)]$  因子是点光源及微粒衍射所产生的两个球面波干涉的结果, 类似于波带片的分布; 而  $[2J_1(w)/w]$  则是与微粒互补的小孔的夫琅和费衍射图样。因此, 这一强度分布可看作是两个球面波的干涉图样与小孔衍射图样相互调制的结果。

对于平面波照明微粒的全息记录 Thompson 作了详细分析<sup>[5]</sup>, 其记录平面上光强分布为

$$I(\rho) = \left(\frac{B}{f}\right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\pi R^2}{\lambda z_2}\right)^2 \left[ \frac{2J_1(w)}{w} \right]^2 - \frac{2\pi R^2}{\lambda z_2} \left[ \frac{2J_1(w)}{w} \right] \sin\left(\frac{k\rho}{2z_2}\right) \right\}, \quad (4)$$

式中  $f$  为产生平面波的准直镜焦距。

## 2. 微粒像的全息再现

若采用相同波长的球面波照明全息图, 则点物全息成像的轴上位置  $z_0$  及放大率  $M$  由下式给出<sup>[6]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= \left( \frac{1}{z_c} + \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right)^{-1}, \\ M &= \left| 1 - \frac{z_2}{z_1} - \frac{z_2}{z_c} \right|^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

显然, 选取  $z_c = -z_1$  时, 将有  $z_0 = -z_2$  以及  $M = 1$ 。因此, 只要采用向全息图后方距离  $z_0 = -z_2$  位置会聚的球面波照明全息图(见图 1(b)), 记录物场中处于不同深度的微粒, 其再现像的放大倍率将保持为常数。这就大大简化了对于三维物场全息再现像测量数据的处理。为了后文叙述的方便, 假定  $z_c$  和  $z_0$  均为正值。

记录介质经线性处理后, 所得全息图的复振幅透过率正比于全息记录时的曝光光强  $I_c(\rho)$ , 用会聚球面波照明, 在夫琅和费近似条件下, 导出与全息图距离  $z_0$  的  $\mu\nu$  平面上微粒再现像的强度分布为

$$I_{c2}(\mu, \nu) = \left[ \frac{OB^3}{z_c^2(z_0 - z_0)} \right]^2 |A(\mu, \nu)|^2. \quad (6)$$

对实像进行测量, 可以得到微粒尺寸及位置信息。

对于平面波系统记录的全息图, 若仍采用平面波照明的情况, Thompson 也对微粒再现像作了分析<sup>[5]</sup>, 这里不再赘述。

## 二、全息记录的调制度

由全息图能否产生一个高亮度的再现像,首先要看是否记录下高对比度的干涉条纹。也就是说,全息记录的调制度将是决定全息图衍射效率、再现像亮度的关键因素。而球面波同轴系统与平面波同轴系统所给出的全息记录的调制度是不相同的。把(3)和(4)式改写为

$$I_c(\rho) = \left(\frac{B}{z_1}\right)^2 \{1 + p^2 q^2 - 2pq \sin[\phi(\rho)]\}, \quad (7)$$

$$I(\rho) = \left(\frac{B}{f}\right)^2 \left[1 + p^2 - 2p \sin\left(\frac{k\rho^2}{2z_2}\right)\right], \quad (8)$$

$$p = \frac{\pi R^2}{\lambda z_2} \left[ \frac{2J_1(w)}{w} \right], \quad q = \frac{z_1}{z_1 - z_2}. \quad (9)$$

球面波照明和平面波照明下,全息记录的调制度分别为

$$m_c = [2pq / (1 + p^2 q^2)], \quad (10)$$

$$m = [2p / (1 + p^2)]. \quad (11)$$

为了便于比较,定义

$$f(p, q) = (m_c / m) = [(1 + p^2)q / (1 + p^2 q^2)]. \quad (12)$$

注意全息图整个平面上,调制度大小是变化的。比较时,可选定全息图上同一部位来进行。

对于  $p$ 、 $q$  的取值范围应作些讨论。半径为  $R$  的微粒,远场距离为  $(4R^2/\lambda)$ 。定义远场数  $N$  来描述物场中微粒实际距离记录介质的远近程度

$$N = [z_2 / (4R^2/\lambda)], \quad (13)$$

上式代入(9)式,并考虑  $[2J_1(w)/w]$  最大值为 1,则  $p_{\max} = (\pi/4N)$ 。一般希望  $N$  尽可能大,以提高记录物场的深度。例如,波长  $0.6 \mu\text{m}$ ,  $R = 15 \mu\text{m}$  的情况,远场距离为  $1.5 \text{ mm}$ ,考虑结构上的可能性,至少取  $6 \text{ mm}$ ,则  $N = 4$ ,  $p = 0.196$ 。当  $N$  进一步增大, $p$  值还会减小。又如, $N = 10$  时, $p = 0.079$ 。 $p$  值很小时,(12)式可简化为  $f(p, q) \approx q > 1$ 。这一特点从图 2 中以  $p$  为参数的  $f(p, q) \sim q$  曲线很容易看出。因此,对于绝大多数情况,尤其是远场数  $N$  较

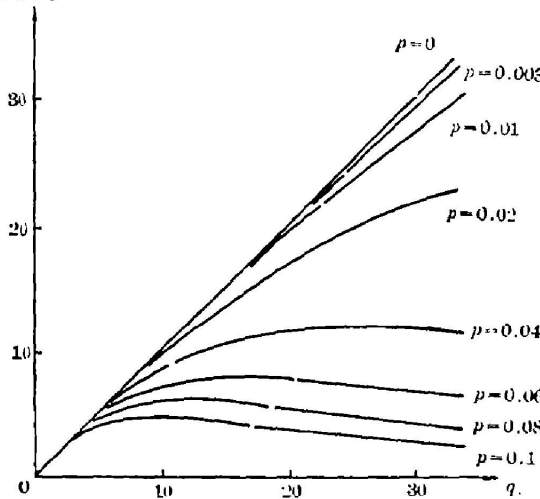


Fig. 2  $f(p, q)$  vs.  $q$  curves with  $p$  as parameter

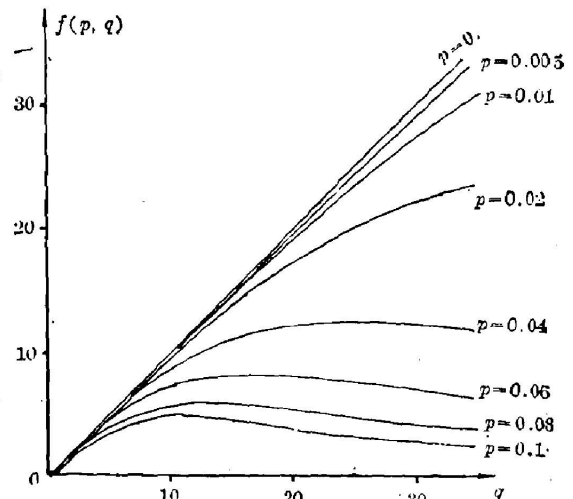


Fig. 3 Theoretical curves of  $I_c(\rho)$  and  $I(\rho)$

大的微粒,存在  $m_o > m$ , 即球面波照明较之平面波照明全息记录的调制度明显提高。图 3 给出了计算机绘制的  $I_o(\rho)$  和  $I(\rho)$  曲线, 显然  $I_o(\rho)$  起伏要大得多。

图 4(a) 和 (b) 分别给出用显微扫描密度计对两种照明方式下所记录的全息图作径向扫描所获得的光密度曲线。曲线的整体弯曲是光束的高斯分布所造成的。虽然有明显的随机噪声, 但仍然可看出球面波场较平面波场全息记录的调制度要大很多。

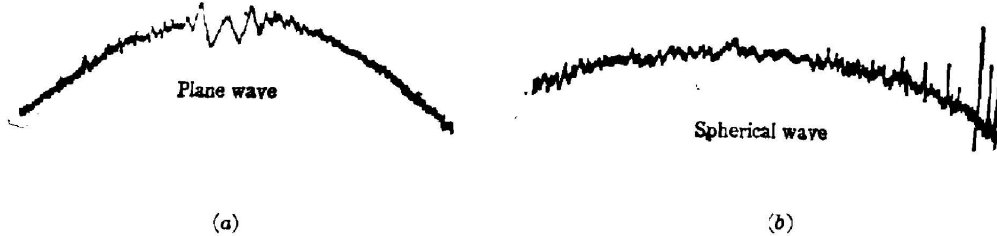


Fig. 4 Density distribution curves of holograms using sphere wave (a) and plane wave (b) illumination

### 三、全息图的衍射效率

为了便于探测, 希望全息再现像具有尽可能大的亮度。而全息像的亮度却直接取决于全息图的衍射效率。必须指出, 两种系统所记录的全息图的衍射效率存在很大差别。

记录介质经线性处理后, 球面波照明和平面波照明所记录的全息图的复振幅透过率分别为

$$t_o(\rho) = t_b - 2\beta T p q \cdot (B/z_1)^2 \sin[\phi(\rho)], \quad (14)$$

$$t(\rho) = t_b - 2\beta T p \cdot (B/f)^2 \sin(k\rho^2/2z_2), \quad (15)$$

上式中  $t_b$  为偏置透过率,  $\beta$  为  $t \sim E$  曲线在偏置点的斜率,  $T$  为曝光时间。

全息图的衍射效率定义为透过全息图衍射的成像光波的强度与照明光波总强度的比值。不难导出球面波记录和平面波记录的全息图的衍射效率分别为

$$\eta_o = [\beta p q T (B/z_1)^2]^2 = [(\beta T B^2 / 2z_1^2) \times (1 + p^2 q^2)]^2 m_o^2, \quad (16)$$

$$\eta = [\beta p T (B/f)^2]^2 = [(\beta T B^2 / 2f^2) (1 + p^2)]^2 m^2. \quad (17)$$

为便于比较, 定义

$$g = \frac{\eta_o}{\eta} = \left(\frac{f}{z_1}\right)^4 q^2 = \left[\frac{f^2}{z_1(z_1 - z_2)}\right]^2. \quad (18)$$

只要光路结构上满足  $f > z_1$ , 同时  $f > (z_1 - z_2)$  也会满足, 则必然有  $g > 1$ , 即球面波同轴系统所记录的全息图衍射效率  $\eta_o$  大于平面波同轴系统所记录的全息图衍射效率  $\eta$ 。(16) 和 (17) 式

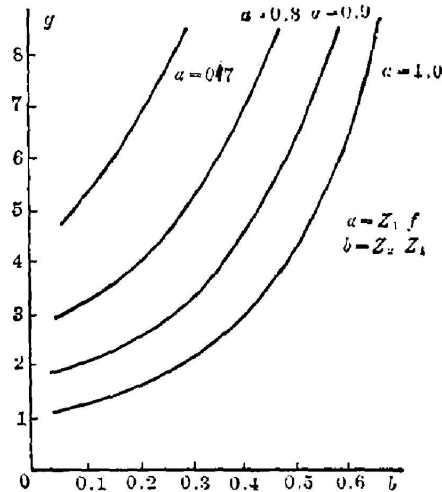


Fig. 5  $g$  vs.  $b$  curves with  $a$  as parameter ( $a = z_1/f$ ,  $b = z_2/z_1$ )

表明,全息图衍射效率与全息记录调制度的平方成正比,这正是我们能得到上述结论的根本原因。图 5 以  $a = (z_1/f)$  为参量,给出几组  $g \sim b [b = (z_2/z_1)]$  曲线。

#### 四、微粒全息成像的误差

在全息图记录平面上,随着半径  $\rho$  增大,所记录的微粒衍射光愈来愈弱,全息记录的调制度愈来愈小,又加上记录介质有限动态范围等因素的影响,微粒全息图能够用于成像的有效大小总是有限的。类似于透镜,可引入孔径函数来表示它的作用

$$P(x, y) = \text{circ}(\sqrt{x^2 + y^2} / \rho_m), \quad (19)$$

其中  $\rho_m$  为全息图有限孔径的半径。考虑全息图有限孔径的影响,  $\mu\nu$  平面上产生微粒实像的光场复振幅分布应该正比于理想像  $A^*(\mu, \nu)$  与孔径函数傅里叶变换式  $\tilde{P}\left(\frac{\mu}{\lambda z_0}, \frac{\nu}{\lambda z_0}\right)$  的卷积,即

$$U_{\text{or}}(\mu, \nu) \propto A^*(\mu, \nu) \otimes \tilde{P}\left(\frac{\mu}{\lambda z_0}, \frac{\nu}{\lambda z_0}\right). \quad (20)$$

卷积的结果使微粒再现像出现弥散,或者说边缘模糊(见图 6),弥散的程度由全息图孔径所产生的爱里斑半径  $\Delta R$  确定

$$\Delta R = (0.61\lambda z_0 / \rho_m). \quad (21)$$

$\Delta R$  大,像的边缘更加模糊,难于定位测量。因而,可用  $\Delta R$  来表征全息成像误差的大小。



Fig. 6 Spread of reconstructed images caused by finite aperture of hologram  
(a) Ideal image; (b) Real image

采用平面波系统,同样要考虑这一效应。但比较起来,采用球面波照明,由于全息记录调制度大大提高,因而全息图有限孔径  $\rho_m$  明显大于平面波系统记录全息图的孔径,故  $\Delta R$  较小。所以,采用球面波系统,微粒全息成像的误差较小。这个结论对于我们提高全息测量的精度出发来选择系统是十分重要的。

#### 五、实 验

在平行平晶上制作一个  $=0.015\text{mm}$  的小圆点来模拟微粒。球面波记录和再现光路分别由图 7(a)、图 7(b) 给出。光路参数为  $z_1 = 204.9\text{mm}$ ,  $z_2 = 170.4\text{mm}$ ,  $N = 114$ 。在光路中移去聚光镜 6,即得到平面波同轴全息系统。

实验分别用球面波系统和平面波系统微粒再现实像经  $10\times$  显微物镜放大后,用全息干

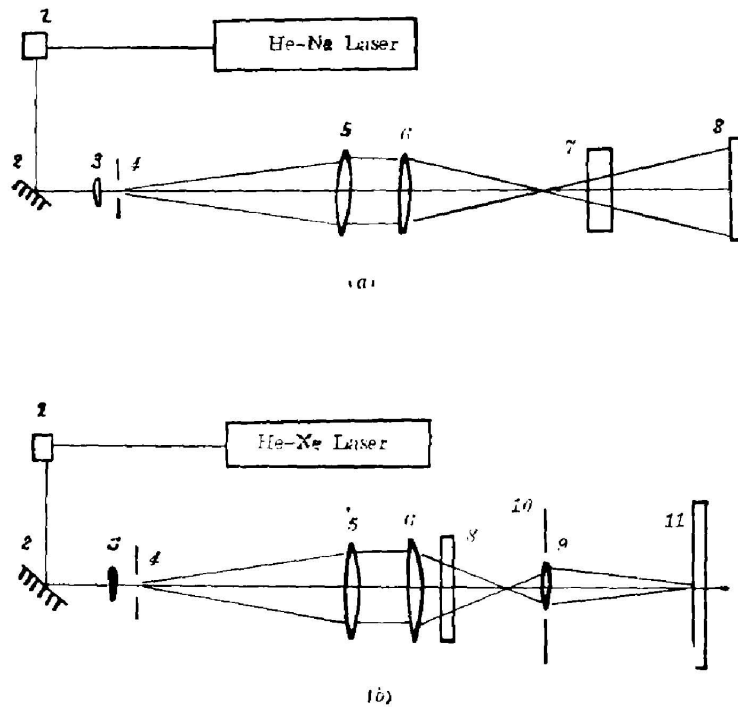


Fig. 7 Holographic optical systems for particulate measurement using sphere wave illumination

(a) Recording system; (b) Reconstruction system.

1—beam steering set; 2—mirror; 3—beam expander; 4—pinhole; 5—collimator  
6—condenser lens; 7—particulate-carrying crystal; 8—recording medium;  
9—objective; 10—blocking card; 11—observation screen

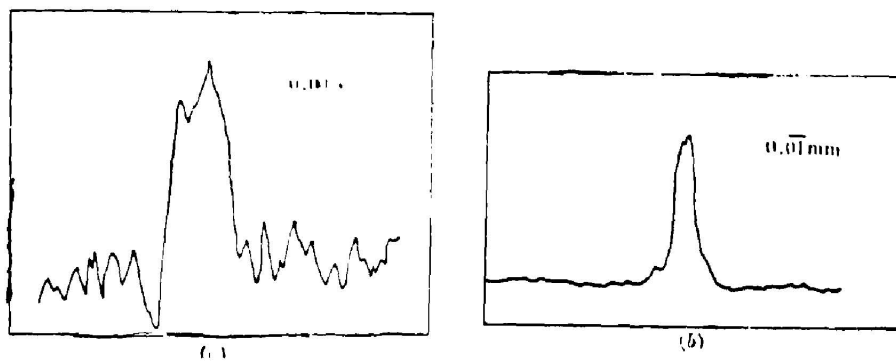


Fig. 8 Density distribution of reconstructed images of particulate using sphere wave (a) and plane wave (b) illumination

版记录。图8是经显微扫描密度计测得的相应光密度径向分布曲线，图8(a)是用球面波系统，记录时曝光时间3'；图8(b)为平面波系统，曝光时间为40'。显然，球面波记录全息图衍射效率高得多，再现像亮度大。同时也可由曲线看出，采用球面波系统，微粒再现像边缘较陡，弥散较之平面波系统的微粒再现像明显要小。因而前者测量误差小。

## 六、小 结

本文在标量衍射理论基础上导出了用球面波同轴系统,对微粒进行全息记录和再现的理论公式。并对两种系统全息记录的调制度、全息图的衍射效率、微粒再现像的误差作了深入比较,证明了球面波系统在这些性能上较平面波系统更为优越。所得全息像亮度大,误差小,更便于记录和测量。对单颗微粒所取得的实验结果与理论分析一致。

本文所给出的结论完全适用于三维的微粒场测量。为使位于不同深度的微粒在全息成像时具有统一的放大倍率,本文还提供了确定光路参数的依据。这一工作为球面波系统在微粒全息测量中的应用提供了理论和实验基础。

和平面波系统相比较,球面波系统也还存在一些缺点:平面波系统在全场上微粒全息成像的放大率  $M$  均等于 1,从而再现像的测量数据处理极为方便;球面波系统要做到这一点,须严格保证  $z_0 = -z_1$ ,对系统光路的调整提出了较高的要求。否则,需要对不同截面上的全息像进行倍率修正,数据处理变得复杂化。其次,球面波照明从提高全息记录的调制度这一意义上虽然扩大了记录物场的深度,但由于照明呈锥形光束,会使测量场体积的空间范围受到限制。最后还必须指出,球面波系统存在全息成像像差较大等缺点。

尽管如此,由于球面波系统可以改善微粒全息测量技术的某些重要性能,尤其对于场深度较大的微粒场测量,它具有突出的优点,因而,对这种系统应给予充分的重视,并值得作进一步的研究。

## 参 考 文 献

- [1] B. J. Thompson, J. H. Ward *et al.*; *Appl. Opt.*, 1967, **6**, No. 3 (Mar), 519.
- [2] J. D. Trolinger; *Opt. Engng*, 1975, **4**, No. 5 (Sep), 383.
- [3] B. C. R. Ewan; *Appl. Opt.*, 1979, **18**, No. 18 (Sep), 3156.
- [4] W. K. Witherow; *Opt. Engng*, 1979, **18**, No. 3 (May), 349.
- [5] G. A. Tyler, B. J. Thompson; *Opt. Acta*, 1976, **23**, No. 9 (Sep), 685.
- [6] J. W. 顾德门;《傅里叶光学导论》, (科学出版社, 1976)。

## Study of the holographic optical system using sphere wave illumination for measurement of particulates

LÜ NAIGUANG, ZHONG LIN AND CHEN JIABI

(*Department of Optical Engineering, Huazhong University of Science and Technology*)

(Received 20 May 1985; revised 25 July 1985)

### Abstract

Plane waves are usually used as illumination beams during recording and reconstruction processes of the holographic technique for the measurement of particulates. Their usability, however, is restricted by a low diffraction efficiency of the hologram and a large error of the measurement. In this paper, we derive the equations describing recording and reconstruction processes of holograms using sphere wave illumination and compare the two holographic techniques with respect of hologram modulation, diffraction efficiency and the error of measurement. Analysis and experiments show that illumination with sphere waves is better than with plane waves.