

渐变折射率光纤内的光线轨迹

王安 刘颂豪

(中国科学院安徽光学精密机械研究所)

提 要

本文从渐变折射率光纤的几何光学近似出发, 推导出渐变折射率光纤的三个光线守恒量和光纤端面上的光线微分方程, 并给出应用的例子。得到的结果与其它理论方法得到的结果一致。本文提出的方法和结果对光纤折射率剖面的设计有意义。

一、三个光线守恒量

在柱坐标中, 设光纤横截面为 $r-\theta$ 平面, 光纤轴线为 Z 轴。把光线微分方程^[1]

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (1)$$

写入柱坐标, 并假定折射率只是径向坐标 r 的函数 $n=n(r)$, 则

$$\frac{d}{ds} \left[n \left(\frac{dr}{ds} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{ds} \mathbf{e}_\theta + \frac{dz}{ds} \mathbf{e}_z \right) \right] = \frac{dn}{dr} \mathbf{e}_r \quad (2)$$

从上式的 z 分量方程

$$\frac{d}{ds} \left[n(r) \frac{dz}{ds} \right] = 0,$$

可得第一个光线守恒量

$$n(r) \frac{dz}{ds} = \beta, \quad (3)$$

这样选择常数 β ^[2],

$$\beta = n(r) \cos \gamma, \quad (4)$$

其中 γ 角如图 1 所示。图 1 标出了渐变折射率光纤内任一点 (r, θ, z) 处的光线分量。再利用极坐标和角坐标基矢之间的关系得 r 分量和 θ 分量的光线微分方程如下:

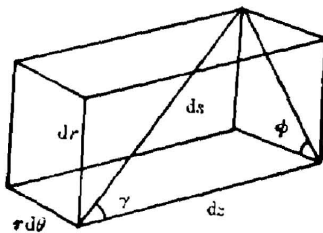


Fig. 1 Ray components at point (r, θ, z) in a graded-index fiber

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = \frac{n}{\beta^2} \frac{dn}{dr}, \quad (5)$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0, \quad (6)$$

其中“ \cdot ”表示对 z 的一阶微商。

事实上, 直角坐标的基矢 i, j, k 与柱坐标基矢 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ 之间有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_z &= k_0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

所以,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dz} &= \frac{d\theta}{dz} (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) = \frac{d\theta}{dz} \mathbf{e}_\theta, \\ \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dz} &= \frac{d\theta}{dz} (-\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j}) = -\frac{d\theta}{dz} \mathbf{e}_r. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由(3)式可得

$$d/ds = \beta/n \cdot d/dz_0 \quad (9)$$

故方程(2)可写作

$$d/dz (dr/dz \mathbf{e}_r + \gamma d\theta/dz \mathbf{e}_\theta) = n/\beta^2 \cdot dn/dr \mathbf{e}_r \quad (10)$$

将(8)式的结果代入(10)式得

$$\ddot{r} \mathbf{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta - r\dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r = n/\beta^2 \cdot dn/dr \mathbf{e}_r \quad (11)$$

写出其分量式便得(5)、(6)两式。

对(6)式积分,可得第二个光线守恒量

$$r^2 \dot{\theta} = al/\beta, \quad (12)$$

由于

$$r d\theta = ds \sin \gamma \cos \phi_0 \quad (13)$$

结合(4)式和(12)式知 l 可表为

$$l = (r/a)n(r) \cos \phi \sin \gamma_0 \quad (14)$$

在电磁理论中有与 β 、 l 相应的 β' 、 l' , $\beta' = (2\pi/\lambda)\beta$, $l' = (2\pi/\lambda)l$ 。

从方程(5)、(6)出发还可得出第三个光线守恒量。由(5)式得

$$\dot{r} d\dot{r}/dr - r\dot{\theta}^2 = d(n^2)/2\beta^2 dr \quad (15)$$

由(12)式解出 $\dot{\theta}$ 代入上式并积分得第三个光线守恒量

$$\beta^2 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - n^2(r^2) = E (\text{常量}) \quad (16)$$

二、光纤端面上的光线微分方程

在方程(5)、(6)中作变换 $u = \frac{1}{r}$, 则易得如下关系式:

$$\dot{r} = -\left(\frac{al}{\beta}\right) \frac{du}{d\theta}, \quad (17)$$

$$\ddot{r} = -\left(\frac{al}{\beta}\right)^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}, \quad (18)$$

$$\dot{\theta} = \left(\frac{al}{\beta}\right) u^2, \quad (19)$$

其中利用了(12)式。把(17)~(19)式代入(5)式得微分方程

$$(al)^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = n \frac{dn}{du} \quad (20)$$

因为变换 $u = \frac{1}{r}$ 在 $r=0$ 点不连续, 所以方程(20)不能描写子午光线而只适用于斜光线。但由于子午光线在光纤横截面上的轨迹为过中心的直线, 因此上述缺陷对方程的价值影响甚微。

方程(20)给出了光纤端面上的光线轨迹与折射率分布之间的关系。由光纤的折射率分布可由方程(20)求出光纤端面上光线轨迹。反之, 由光纤端面上的光线轨迹原则上也可求出相应的折射率分布。

三、应 用

1. 倒数折射率分布的情形

若已知光纤端面上斜光线轨迹方程为

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \theta} \quad (0 < r < a), \quad (21)$$

则

$$u = \frac{1}{P}(1 + e \cos \theta),$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{e}{P} \cos \theta.$$

代入方程(20)得

$$\frac{(al)^2}{P} du = \frac{1}{2} d(n^2),$$

两边积分, 并设当 $r=a$ 时, $n^2 = n_2^2$, 则有

$$n^2(r) = \frac{2(2l)^2}{P} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) + n_2^2, \quad (0 < r < a). \quad (22)$$

故由光纤端面上的光线轨迹, 利用光纤端面上的光线微分方程(20)求出光纤芯的折射率分布。为了给出光纤端面上光线轨迹类别的判据, 现在逆解上述问题, 即由光纤折射率分布求出光纤端面上的光线轨迹。为了简单和不失与(22)式的一致性, 设

$$n^2(r) = n_2^2 \left(\frac{a}{r} \right), \quad (0 < r < a).$$

代入(16)式得

$$\beta^2 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - n_2^2 \left(\frac{a}{r} \right) = E. \quad (23)$$

为了把此式与(12)式结合起来, 作变换

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = \left(\frac{al}{\beta} \right) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}.$$

代入(23)式得

$$(al)^2 \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + (al)^2 \frac{1}{r^2} - \frac{n_2^2 a}{2} \frac{1}{r} = E.$$

解出 $\frac{dr}{d\theta}$, 并分离变量, 得

$$\frac{(al) dr}{r \sqrt{E r^2 + n_2^2 a r - (al)^2}} = d\theta.$$

两边积分得

$$\sin^{-1} \left[\frac{n^2 2ar - 2(al)^2}{r \sqrt{(n_2^2 a)^2 + 4E \left(\frac{al}{\beta}\right)^2}} \right] = \theta + \frac{3\pi}{2} - \theta_0,$$

故

$$r = \frac{2(2l)^2/n_2^2 a}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2l\beta^2}{n_2^2}\right)^2 E \cos(\theta - \theta_0)}}.$$

与(21)式比较知

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{2l\beta^2}{n_2^2}\right)^2 E}. \quad (24)$$

由此立即可以得出用光线守恒量 E 作为光纤端面光线轨迹类别的判据:

当 $E < 0$, $e < 1$, 端面光线轨迹为椭圆;

当 $E = 0$, $e = 1$, 端面光线轨迹为抛物线;

当 $E > 0$, $e > 1$, 端面光线轨迹为双曲线。

由于光线守恒量 E 与光线入射条件和光纤折射率分布有关, 因此对特定的光纤, 其端面光线轨迹的类别与光线入射条件有关。

2. 抛物线折射率分布的情形

抛物线折射率分布可用下式表示:

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] & (r < a), \\ n_2^2 & (r > a), \end{cases} \quad (25)$$

其中 n_1 是芯内最大折射率, n_2 是色层折射率, a 为芯半径。将(25)式代入方程(20)得微分方程

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = b + \frac{1}{u^3}, \quad (26)$$

其中常数 $b = \frac{2n_1^2 \Delta}{a^4 l^2}$, 方程(26)有解

$$r^2 = 2[\sqrt{c_1^2 - 4b} \sin 2(\theta + \theta_0) + c_1]^{-1}, \quad (27)$$

其中 c_1, θ_0 是两个积分常数。方程(27)可改写成

$$c_1(x^2 + y^2) + axy - 1 = 0. \quad (28)$$

这里 $a = \sqrt{c_1^2 - 4b}$ 。(28)式是一个椭圆方程。这个结果与其它方法得出的结果一致^[4], 但与文献[4]相比运算过程大为简化。

上海交通大学应用物理系陈益新同志对本文提出了宝贵意见, 深表谢意。

参 考 文 献

- [1] A. Ankiewicz, C. Pask; *Opt. & Quant. Electron.*, 1977, **9**, No. 2 (Mar), 87.
- [2] E. G. Rawson *et al.*; *Appl. Opt.*, 1970, **9**, No. 3 (Mar), 753.
- [3] L. Jacomme; *Opt. Commun.*, 1975, **14**, No. 1 (May), 134.
- [4] H. Matsumura; *Opt. & Quant. Electron.*, 1975, **7**, No. 2 (Mar), 81.
- [5] M. Born, E. Wolf; *«Principles of Optics»*, 4th edition, (Pergamon Press, London, 1970), ch 3.

Ray traces in graded-index optical fibers

WANG AN AND LIU SONGHAO

(Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 25 December 1984; revised 17 June 1985)

Abstract

Three optical invariants of graded-index optical fibers and the ray equation in a fiber cross section have been derived. Examples are given for several special cases. The results obtained here are in good agreement with previous theoretical calculations. The method and results are useful in designing refractive index profiles of fibers.