

光学系统的测不准关系式和等效带宽

宋 菲 君

(北京信息光学仪器研究所)

提 要

本文从光学测量系统对准误差的分析入手,研究了直边像弥散的“等效线宽” δ 和系统的“等效带宽” B_{eq} 间的相互制约关系——光学系统的测不准关系式,并给出了显微物镜的测量结果。 δ 和 B_{eq} 可以作为小像差光学系统的像质评价指标。

一、测不准关系式和等效带宽

光学系统所观察的目标,可以认为是由不同透明度(或亮度)、不同色泽的区域构成。例如用测量显微镜对物体进行长度测量,首先必须用目镜中的叉丝对准物体边缘(即不同区域的边界)通过物镜形成的像,然后读数。物体边缘像的弥散范围 δ 是引起测量误差的直接原因。因此,我们首先对 δ 进行严格定义。

一个与 y 轴重合的高对比度的直边几何像可以用 $\eta(x)$ 表示:

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\xi) d\xi = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (1)$$

在非相干情况下,像平面上光强 $I_i(x)$ 的实际分布是点扩散函数 $h(x)$ 和 $\eta(x)$ 的卷积^[1]:

$$I_i(x) = h(x) \otimes \eta(x) = L(x) \otimes \eta(x) = I_i(x), \quad (2)$$

式中 $L(x)$ 为线扩散函数:

$$L(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy. \quad (3)$$

由于 η 和 h 卷积的结果,使直边像成为平缓的过渡曲线(图1),这就是直边像的弥散效应,它造成了对准的误差。通常以像的光强度化曲线在几何阴影处的斜率的倒数 δ 作为弥散范围的度量,称“等效线宽”:

$$\delta = \left. \frac{dx}{dI_i} \right|_{x=0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} L(\xi) \frac{d}{dx} \eta(x-\xi) d\xi \right]_{x=0}^{-1} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} L(\xi) \delta(x-\xi) d\xi \right]_{x=0}^{-1} = 1/L(0). \quad (4)$$

线扩散函数 $L(x)$ 与光学传递函数 $H(f)$ 的关系为傅里叶变换:

$$\left. \begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} L(x) \exp(-i2\pi fx) dx, \\ L(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(i2\pi fx) df. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由(5)式得到

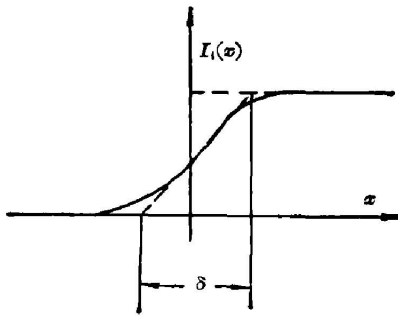


Fig. 1

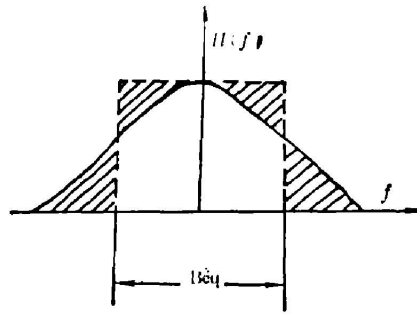


Fig. 2

$$L(0) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) df = B_{eq} \quad (6)$$

B_{eq} 称为光学系统的“等效带宽”^[2], 它具有明显的物理意义: 设相位传递函数 $PTF=0$, 则 B_{eq} 相当于图 2 中矩形的宽, 该矩形的面积与 MTF 即 $H(f)$ 曲线下的面积相等。显然, 光学系统传递空间频率信息的性能越好, $H(f)$ 曲线下的面积就越大, B_{eq} 也越大。 B_{eq} 对于光学系统的视场的积分又称为系统的信道容量^[3]。

由 (4)、(6) 两式, 得到等效线宽 δ 和等效带宽 B_{eq} 之间的关系:

$$\delta \cdot B_{eq} = 1, \quad (7)$$

它表明直边像的弥散程度与光学系统的带宽之间有着深刻的相互约束关系: B_{eq} 越大, 系统对空间频率信息的响应特性越好, 像的信息量就越接近于物的信息量, 从而直边像的弥散 (它是由于信息量的损失造成的) 就越小。由于光波在光学系统有限大小的入瞳上的衍射效应, 光学系统的通频带总是有限的, 因此直边像的加宽效应也就不可避免, 而系统的像差一般来讲又使这一效应更加严重, 从而进一步加大了弥散, 降低了测量精度。类比于量子力学中的测不准原理, 我们可以把 (7) 式称为光学系统的测不准关系式。很明显, B_{eq} 或 δ 可以作为小像差光学系统的像质评价指标。

表 1 给出衍射受限的显微物镜的计算结果, 其中 δ_0 是用公式 $\delta_0 = 0.61\lambda/\Delta$ 算出来的最小分辨长度, 即瑞利极限, λ 取 0.00055 mm 。

二、等效带宽的测量

从上一节的讨论可知等效带宽 B_{eq} 可以通过对光学传递函数的积分得到 (见公式 (6)), 因此等效带宽像质评价装置实际上就是光学传递函数测量仪, 如图 3 所示。该装置专门用于显微物镜的像质检测。

星点板 S_p 由非相干光源 S 经聚光镜 L_c 照亮, 被测物镜 L_t 把星点的像成在狭缝 N_s 上, N_s 对星点像作线性扫描形成扫描输出函数 $O(\xi)$, 被光电探测器 D_t 所接收。一套机械结构, 使视场中不同部位的星点像均能被系统所探测。

由 D_t 输出的信号, 预处理后进入微型计算机数据处理系统, 再经采样, 平滑处理后, 可以显示或打印 $L(x)$ 、 $H(f)$ 及 B_{eq} 、 δ 等。

设星点板中的一个星点孔是一个被均匀照亮的无限薄的透光圆孔, 它的理想像设为:

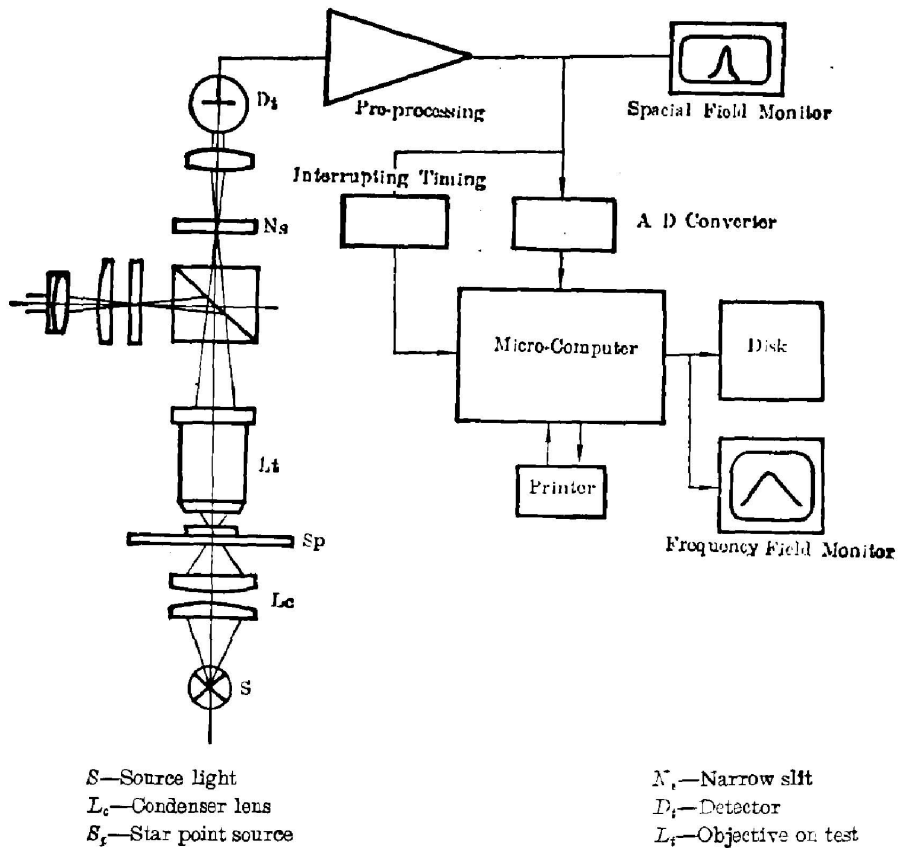


Fig. 3

$$\psi_o(x) = 1/\pi\rho^2 \text{circ}(x/\rho), \tag{8}$$

式中 $x = (x, y)$, ρ 为星点孔像的半径。实际光强分布 $\psi_i(x)$ 为 $\psi_o(x)$ 与点扩散函数 $h(x)$ 的卷积

$$\psi_i(x) = h(x) \otimes \psi_o(x). \tag{9}$$

用一条宽度为 $2s$ 的透光狭缝对 ψ_i 进行扫描, 当狭缝平行于 y 轴时, 定义狭缝函数 $s(x)$ 为

$$s(x) = s(\xi - x) = \text{rect}[(\xi - x)/2s], \tag{10}$$

其中 ξ 为狭缝的中心坐标。再定义扫描函数 $c(\xi)$ 为透过狭缝的总光通量, 则有:

$$c(\xi) = \iint \psi_i(x) s(x) dx = \psi_i(\xi) \otimes s(\xi), \tag{11}$$

式中

$$\psi_i(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(\xi, \eta) d\eta. \tag{12}$$

对(11)式进行傅里叶变换, 注意到

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}\{s(\xi)\} &= 2s \text{sinc}(2sf_x) \delta(f_y), \\ \mathcal{F}\{\psi_i(\xi)\} &= H(f_x) [J_1(2\pi\rho f_x)/\pi\rho f_x] \cdot \delta(f_y), \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

(式中 J_1 为一阶贝塞耳函数), 得到

$$c(\xi) = A_0 \int_{-\infty}^{\infty} H(f_s) [J_1(2\pi\rho f_s)/f_s] \text{sinc}(2\epsilon f_s) \exp(i2\pi f_s \xi) df_s, \quad (14)$$

式中 A_0 为常数。

当条件

$$\left. \begin{aligned} 2\epsilon &\ll 1/2f'_0 = 0.5\lambda/A', \\ 2\rho &\ll 0.61/f'_0 = 0.61\lambda/A', \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(A' 为像方数值孔径) 成立时, 得到近似公式

$$c(0) = 2\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} H(f_s) df_s = 2\epsilon B_{eq}. \quad (16)$$

因此, 测定扫描函数 $c(\epsilon)$ 的极大值, 或直接对 $H(f)$ 积分, 都可以求出 B_{eq} 。

三、测量结果及讨论

图 4 为 40 倍平场消色差物镜和普通消色差物镜, 两者轴上像质比较接近轴上、轴外点的 B_{eq} 和 δ 。由这些曲线可以看出, 平场物镜在全视场内的成像质量都比较好, 而普通物镜的像质随着视场的增大而迅速变差, 清晰度范围很小。

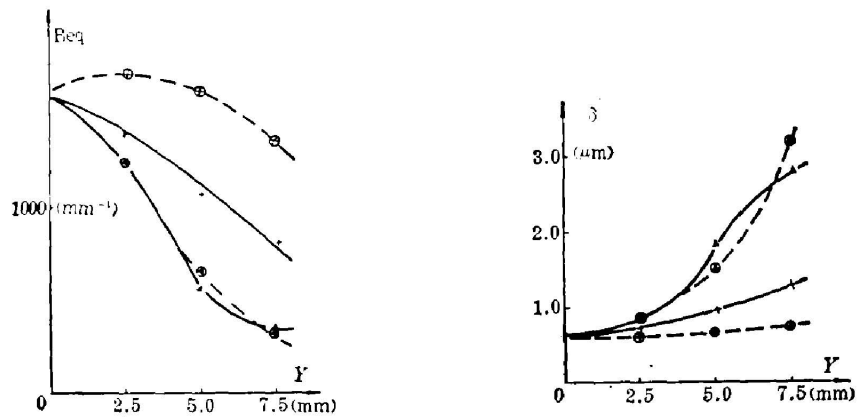


Fig. 4

- + Flat-field achromatic objective, 40 \times , 0.65 NA (meridian)
- ⊕ Flat-field achromatic objective, 40 \times , 0.65 NA (sagittal)
- ▲ Achromatic objective, 40 \times , 0.65 NA (meridian)
- ⊙ Achromatic objective, 40 \times , 0.65 NA (sagittal)

Table 1

M/A	10/0.25	40/0.65	100/1.25
B_{eq} (1/mm)	772	2006	3859
δ (mm)	0.00130	0.000499	0.000259
δ_0 (mm)	0.00134	0.000516	0.000268

B_{eq} : Equivalent bandwidth; δ : Equivalent line width; δ_0 : Rayleigh line width; M : Magnification; A : Numerical aperture

Table 2

Objective	$B_{eq}(\text{mm}^{-1})$	$\delta(\text{mm})$	$H(0.45)$
I	1555	0.000643	0.294
II	1433	0.000698	0.263
III	1241	0.000806	0.197

B_{eq} : Equivalent bandwidth; H : Optical transfer function; δ : Equivalent line width

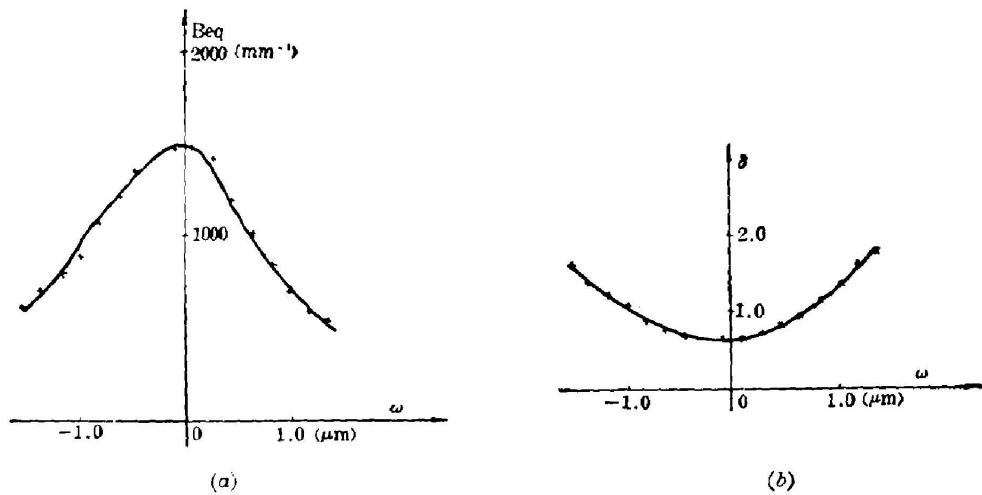


Fig. 5

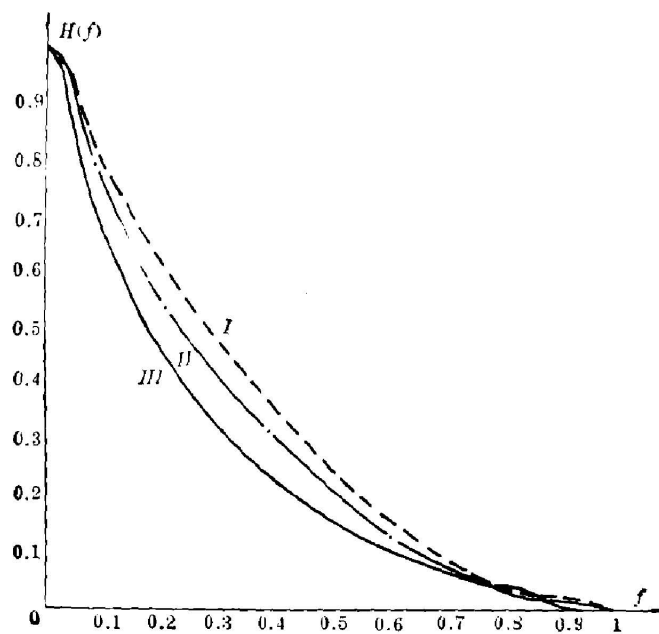


Fig. 6

图 5 为上述平场物镜离焦时的 B_{eq} 和 δ 。该物镜焦前焦后的弥散图形相当对称。反映在 B_{eq} 和 δ 的曲线关于最佳像面的对称性上, 结果是相符的。此外, 从离焦时的 B_{eq} 或 δ 曲线还可以看出, 这两个指标是相当灵敏的, 当成像平面偏离最佳像面仅 $0.2 \mu\text{m}$ (约 0.15 倍焦深) 时, B_{eq} 和 δ 已有明显变化。

图 6 为三个典型物镜轴上点的 $H(f)$ (光学传递函数) 曲线, 它们的 B_{eq} 和 δ 分别列于表 2。表中还列出规范化频率 $f/2f_0=0.45$ 处的 H 值。物镜 I 校正得比较好, 它的等效带宽 B_{eq} 达到衍射受限系统相应值的 77.5%; 物镜 II 有像散, 它的轴上点目视像质比物镜 I 略差, 这一点和 B_{eq} 、 δ 及 $H(0.45)$ 等指标的数值变化是一致的; 物镜 III 具有彗差, 它的目视像质比 I、II 都差一些, 相应的指标也比较低, B_{eq} 只有衍射受限系统相应值的 61.9%。

综上所述, 可以得到结论: 构成光学成像系统测不准关系式的因子: 等效带宽 B_{eq} 和等效线宽 δ , 作为小像差系统 (例如显微物镜) 的像质评价指标, 在理论上是合理的; 从测量结果来看, 这两个指标能够正确地反映成像质量, 而且灵敏度相当高。

本研究所阴边杰、于国明和北京自动化研究所刘钟与作者共同研制了像质评价的测试仪器及其数据处理系统, 在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] J. W. Goodman; *Introduction to Fourier Optics*, (McGraw-Hill, San Francisco, 1968), 113.
- [2] J. W. Goodman; *Introduction to Fourier Optics*, (McGraw-Hill, San Francisco, 1968), 113.
- [3] E. J. Song *et al.*; *ICO-13 Conference Digest* (Published by the Organizing Committee of ICO-13,) Sapporo, 1984, 482.

The uncertainty relationship for the optical system and the equivalent bandwidth

SONG FELJUNG

(Beijing Information Optical Instruments Institute)

(Received 24 June 1985)

Abstract

Proceeding from the analysis of the alignment error, the author study the conditional relationship between the "equivalent line width" of the dispersion for the step function edge and the "equivalent bandwidth" of the system, known as the uncertainty relationship for the optical systems. The measurement results are given. The equivalent line width and the equivalent bandwidth beq can be considered as the assessment critia of the imaging quality for the optical systems with small aberrations.