

一种新型的振荡腔——球体谐振腔

(I) 球体谐振腔的基本性质*

钱士雄

(复旦大学物理系)

提 要

本文介绍了一种新型振荡腔,即由球体介质及其与周围介质的界面所组成的腔——球体谐振腔。讨论了这种球体谐振腔中的本征模式,本征频率以及腔中的内场。由此阐述这种腔作为激光振荡腔的基本特点。最后讨论了由这种腔得到的弹性散射的谱和角分布。

一、引 言

本文介绍一种新型谐振腔——球体谐振腔。它是一个具有完全球体结构的腔,激活介质构成一个球,而由激活介质与周围介质的球形界面提供腔所需要的反馈。这种腔具有极高的品质因素,且已从这种腔得到多种受激振荡输出^[1~3]。本文先介绍这种球体谐振腔的基本性质。

米氏(Mie)很早就应用球体的性质讨论了球状颗粒对光的散射问题^[4]。当时米氏处理的是小球颗粒,其尺寸一般都很小,大约与光的波长相当或甚而比光的波长还短,即 $a \leq \lambda$ 。在散射理论中,人们常采用尺寸参数 α ,它的定义为

$$\alpha = 2\pi a / \lambda_0 \quad (1)$$

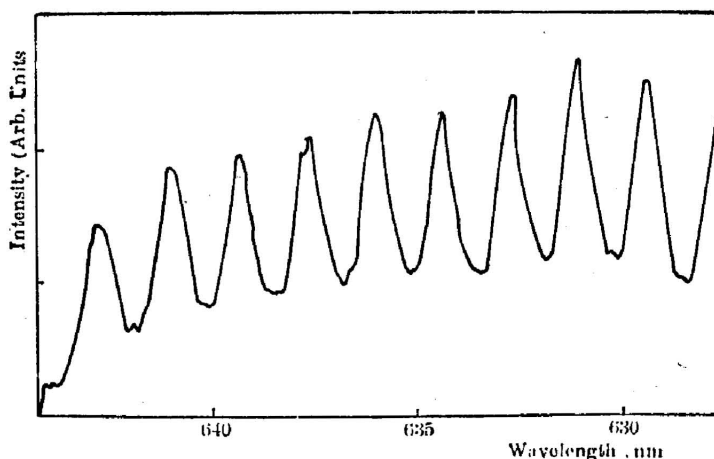


Fig. 1 Elastic scattering spectrum of the spherical droplet

收稿日期: 1985年6月18日

* 本工作完成于美国 Yale 大学应用物理系。

对于半径等于波长的颗粒(在绿光 $\lambda=500\text{ nm}$ 处,半径 a 即为 $0.5\ \mu\text{m}$),尺寸参数 x 近似为6。

近来的实验和计算都表明^[5~7],米氏理论对于大尺寸的球状颗粒仍然可以应用。我们测量了半径在 $25\sim 40\ \mu\text{m}$ 范围的液滴对光的弹性散射。结果如图1所示。散射谱中呈现典型的散射结构峰,且具有明显的角分布。这就表明即使对于大尺寸的球状粒子,仍然可以具有与小球颗粒类似的性质,即它仍然是一个球形腔。在这个腔中可以存在电磁波的驻波。由于驻波的存在,在驻波相应的 x 值处,可以得到大的散射截面,这就是散射谱中散射峰的到来。

二、球体谐振腔中的驻波

在球体腔(球体谐振腔的简称)中波的传播比在平面法布里-珀罗腔中要复杂得多。因为在球体腔中,驻波不再是两个反向传播的平面波的叠加,而是一种矢量球谐函数波的叠加。从球面坐标的波动方程求解,可以知道这时的本征矢量球谐函数驻波为^[8,9]

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_{e\,mn} &= \frac{-m}{\sin\theta} \sin m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(\rho) \mathbf{e}_\theta - \cos m\phi \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} z_n(\rho) \mathbf{e}_\phi, \\ \mathbf{M}_{o\,mn} &= \frac{m}{\sin\theta} \cos m\phi P_n^m(\cos\theta) z_n(\rho) \mathbf{e}_\theta - \sin m\phi \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} z_n(\rho) \mathbf{e}_\phi, \\ \mathbf{N}_{e\,mn} &= \frac{z_n(\rho)}{\rho} \cos m\phi n(n+1) P_n^m(\cos\theta) \mathbf{e}_r + \cos m\phi \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \mathbf{e}_\theta \\ &\quad - m \sin m\phi \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \mathbf{e}_\phi, \\ \mathbf{N}_{o\,mn} &= \frac{z_n(\rho)}{\rho} \sin m\phi n(n+1) P_n^m(\cos\theta) \mathbf{e}_r + \sin m\phi \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + m \cos m\phi \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \mathbf{e}_\phi, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 M 和 N 是两种相正交的本征矢量球谐函数,下标 e 及 o 用来区分具有不同的 ϕ 坐标对称性的函数, n 及 m 则表示矢量球谐函数中缔合勒让德函数 $P_n^m(\cos\theta)$ 的序号。变量 $\rho=kr$,其中 k 为球体腔中的波矢量值。 $z_n(\rho)$ 是几种球贝塞尔函数,即 j_n 、 y_n 、 $h_n^{(1)}$ 和 $h_n^{(2)}$ 中的一种(有时人们称它们为球贝塞尔、球诺尔曼和球汉格尔函数),它们分别为

$$\left. \begin{aligned} j_n(\rho) &= \sqrt{(\pi/2\rho)} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho), & y_n(\rho) &= \sqrt{(\pi/2\rho)} Y_{n+\frac{1}{2}}(\rho), \\ h_n^{(1)}(\rho) &= j_n(\rho) + iy_n(\rho), & h_n^{(2)}(\rho) &= j_n(\rho) - iy_n(\rho). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(2)式中给出的 $\mathbf{M}_{e\,mn}$ 、 $\mathbf{M}_{o\,mn}$ 、 $\mathbf{N}_{e\,mn}$ 及 $\mathbf{N}_{o\,mn}$ 即是在球体谐振腔中可以存在的本征驻波。

当有平面波入射到这个球状介质球时,根据电磁场对应的边界条件,我们可以求得球体腔内部的电磁场强度。可以发现,根据球体腔的大小及光学性质(即折射率)不同,这时某些序号的球腔模可以在对应的波长处得到极强的内场,这就是这个特定球体腔内实际存在的本征驻波。

三、球体腔中的光场强度

假定入射的平面电磁波是沿 Z 向入射的,其偏振方向沿 X 方向,波长为 λ ,如图2所

示。我们可以将这个平面偏振电磁波按矢量球谐函数进行分解

$$\mathbf{E}_i = E_0 \exp(ikr \cos \theta) \mathbf{e}_z = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (M_{01n}^{(1)} - iN_{01n}^{(1)}), \quad (4)$$

其中 $E_n = E_0 i^n [(2n+1)/n(n+1)]$ 即是模数为 n 的本征矢量球谐函数驻波的系数。而 M 和 N 的上标(1)则表示这些函数中的 $z_n(\rho)$ 应取第一种球贝塞尔函数 $j_n(\rho)$ 。

从电磁波的边界条件,可以得到球体腔(半径为 a , 折射率为 n_0)内的内场为

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (c_n M_{01n}^{(1)} - i d_n N_{01n}^{(1)}), \quad (5)$$

其中的 c_n 和 d_n 是相应的展开系数,它反映了该模所对应的内场强度,其值为

$$\left. \begin{aligned} c_n &= \frac{\mu_1 j_n(x) [x h_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x) [x j_n(x)]'}{\mu_1 j_n(n_1 x) [x h_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x) [n_1 x j_n(n_1 x)]'}, \\ d_n &= \frac{\mu_1 n_1 j_n(x) [x h_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 n_1 h_n^{(1)}(x) [x j_n(x)]'}{\mu_1 n_1^2 j_n(n_1 x) [x h_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 n_1 h_n^{(1)}(x) [n_1 x j_n(n_1 x)]'}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中 μ_1 和 μ 分别是球体介质和周围介质的磁导率, n_1 是球体介质对周围介质的相对折射率。

计算表明,对于球体腔来讲,可以存在的模的数目相当大。即使对于同一个模数 n ,在 c_n 或 d_n 谱中,也可以存在有多个峰值与之对应,即 c_n 或 d_n 系数可以有多个极大值对应于同一个模数。我们用序数 l 来表示它们,写为 $c_{n,l}$ 或 $d_{n,l}$ 。

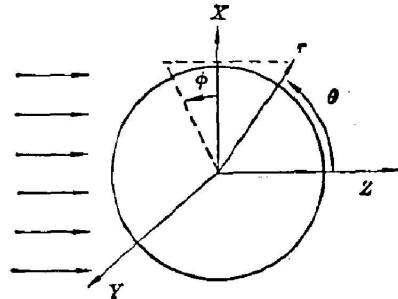


Fig. 2 Scattering of a plane wave by a spherical cavity

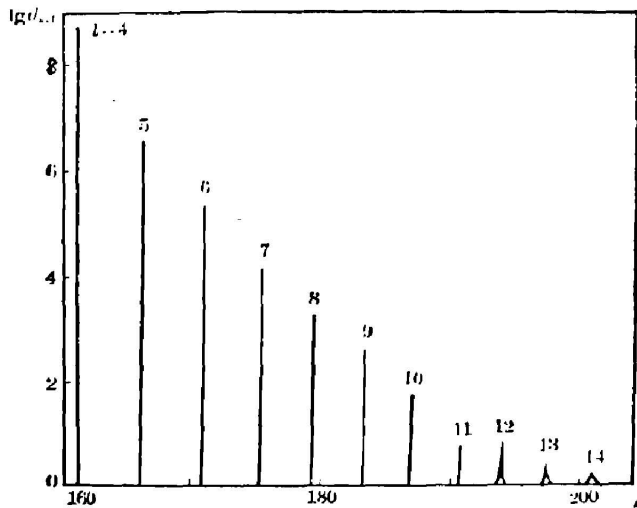


Fig. 3 Internal field coefficients $d_{n,l}$ of several modes with mode number 200 of the spherical cavity

我们序数 l 来表示它们,写为 $c_{n,l}$ 或 $d_{n,l}$ 。

图 3 中给出对于某个模数 $n=200$ 的一部分共振峰。从图 3 可见,随着 l 的增大,峰值移向短波,而且变得越来越宽,内场系数也随之减小。

表 1 给出了对应某一个序数 ($l=4$) 的不同的本征模的位置、宽度及相应的内场系数 c_n 和 d_n 。由表 1 可以看出,对于同一个序数,随着模数的增大,本征模移向大的尺寸参数处。即对同一个球滴(确定的 a),当模数增大时,模移向短波。同时,本征模变得越来越窄。

当 $n=260$ 时,峰宽度已经达到 10^{-9} 。这相应于很高的品质因素 Q 。随着模数的增大,内场系数也急剧增加,模数每增加 10,内场系数几乎增加一个量级。

从上面的讨论,我们可以看到球体谐振腔有它独特的优点,即极高的品质因素。这样高

Table 1 Positions, widths and coefficients (a_n, d_n, b_n, c_n) of the eigen modes of spherical cavity with $l=4$

n	x	Δx	a_n	d_n	x	Δx	b_n	c_n
60	53.50	1×10^{-2}	1	17	53.12	5×10^{-3}	1	22
70	61.37	1×10^{-3}	1	44	60.98	5×10^{-4}	1	55
80	69.187	8×10^{-5}	1	121	68.77	8×10^{-6}	1	151
90	76.96	1×10^{-5}	1	349	76.53	1×10^{-5}	1	424
100	84.695	3×10^{-6}	1	1×10^3	84.26	6×10^{-6}	1	1.3×10^3
110	92.406	5×10^{-7}	1	3.1×10^3	91.97	1×10^{-6}	1	3.8×10^3
120	100.09	5×10^{-8}	1	9.6×10^3	99.65	1×10^{-7}	1	1.2×10^4
130	107.764	1×10^{-8}	1	3.1×10^4	107.32	1×10^{-8}	1	3.7×10^4
140	115.417	4×10^{-10}	1	1.0×10^5	114.96	4×10^{-10}	1	1.2×10^5
150	123.056	3×10^{-11}	1	3.3×10^5	122.60	5×10^{-11}	1	4×10^5
160	130.682	3×10^{-12}	1	1.1×10^6	130.23	1×10^{-11}	1	1.3×10^6
170	138.298	1×10^{-12}	1	3.7×10^6	137.84	4×10^{-12}	1	4.5×10^6
180	145.90	$< 10^{-12}$	1	1.7×10^7	145.44	$< 10^{-12}$	1	2.1×10^7
190	153.49	$< 10^{-12}$	1	5.9×10^7	153.03	$< 10^{-12}$	1	1.1×10^8
200	161.08	$< 10^{-12}$		1.1×10^8	160.61	$< 10^{-12}$		6.3×10^8

的品质因素在一般的法布里-珀罗腔中并不容易得到。这是因为法布里-珀罗腔的反射镜很难具有极接近于 100% 的反射率。而在球体腔中, 这些模都是表面模, 从电场分布可以知道, 高电场主要集中在表面附近, 而在球体内部则场要小得多。模的表面波性决定了这些驻波可以利用表面处波的全反射特性而得到极高的反馈, 从而使得球体腔内部的驻波场可以远远大于球外入射的光电场或出射场。球体腔的高品质因素使得它可以应用于有广阔增益范围的介质, 即使介质的增益极小, 也有可能球体腔中产生振荡而得到受激输出。

其次, 这种球体腔的尺寸可以很小, 对于 $x=200$ 的腔, 波长 $\lambda=500 \text{ nm}$ 的光子在腔内的回转时间(指光子在球体的大圆上运行一周所需的时间)只有 0.3 ps 。这个时间远远短于一般自发辐射的寿命。正因为如此, 各种自发辐射(自发荧光, 自发喇曼散射)都有可能在这种球体腔内得到干涉加强, 从而发射具有模结构的输出^[10]。再者, 若希望从有极短寿命的增益介质得到微微秒量级的受激振荡, 这种腔自然是一种理想的激光腔。

四、由吸收介质组成的球腔

上节的讨论适用于由完全无吸收且具有完善球体结构的介质所组成的腔。但实际上, 介质不可能是完全无吸收的, 界面也很难是严格的球面。在这一节我们讨论当介质具有吸收时的情况。

对有吸收的介质, 其介电常数为复数, 则可以把光学折射率也写成复数形式

$$\tilde{n}_0 = n_R + iK, \quad (7)$$

其中 K 是介质的消光系数。 $K = (\alpha\lambda/4\pi)$, 其中 α 即是吸收系数。消光系数的存在, 使得球体腔的内场及腔模线宽发生很大变化。

根据内场公式(6)式, 我们可以求得在有不同的消光系数时球体腔的一些本征模的变化情况。例如, 对序数 $l=8$, 我们求得模数为 160、200、240 及 280 的一些本征模在消光系数从

Table 2 Coefficient a_n and d_n of several eigen modes of spherical cavity with $l=9$, as function of the extinction coefficient K of medium, ($n_1=1.36$)

K	n		160		200		240		280	
	a_n	d_n	a_n	d_n	a_n	d_n	a_n	d_n	a_n	d_n
10^{-4}	0.045	2.5								
10^{-5}	0.322	18	5×10^{-4}	0.85						
10^{-6}	0.82	47	5×10^{-3}	8.4	2.7×10^{-6}	0.18				
10^{-7}	0.98	55	0.05	81	3×10^{-5}	1.8				
10^{-8}	1	55	0.35	550	3×10^{-4}	18	8×10^{-6}	0.3		
10^{-9}	1	56	0.84	1.3×10^3	3×10^{-3}	180	8×10^{-7}	2.9		
10^{-10}	1	56	0.98	1.5×10^3	0.02	1.7×10^6	8×10^{-6}	29		
10^{-11}	1	56	1	1.5×10^3	0.21	1.4×10^4	8×10^{-5}	2.8×10^2		
10^{-12}	1	56	1	1.5×10^3	0.65	4×10^4	8×10^{-4}	2.8×10^3		
0	1	56	1	1.5×10^3	1	6.6×10^4	1	3.7×10^6		

$10^{-4} \sim 10^{-12}$ 范围时的宽度及内场系数值, 如表 2 所列。

从表 2 可以见到, 随着介质吸收的增大, 球体腔本征模的内场系数 c_n 及 d_n 急剧下降。这种下降对于高模数的模(就同一序而言), 亦即具有高的品质因素的窄模更为明显, 使得一些高 Q 值模很容易为很小的吸收所熄灭。

五、弹性散射

对于具有连续光谱分布的入射光, 由半径为 a 、相对折射率为 n_1 的球体所散射时, 可以在一些波长 λ 处得到散射峰。如果我们仍取偏振为 X 向的平面入射波, 则可得到散射光场的公式为

$$E_s = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (i a_n N_{(3)}^{(3)} - b_n M_{(1)}^{(3)}), \quad (8)$$

其中函数 M 和 N 的上标(3)表示在(2)式中的 $z_n(\rho)$ 应取第三种球贝塞尔函数 $h_n^{(3)}(\rho)$ 。 a_n 和 b_n 则是模数 n 的本征模的散射系数, 它们由下式决定

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{\mu n_1^2 j_n(n_1 x) [x j_n(x)]' - \mu_1 j_n(x) [n_1 x j_n(n_1 x)]'}{\mu n_1^2 j_n(n_1 x) [x h_n^{(3)}(x)]' - \mu_1 j_n(x) [n_1 x h_n^{(3)}(n_1 x)]'} \\ b_n &= \frac{\mu j_n(n_1 x) [x j_n(x)]' - \mu j_n(x) [n_1 x j_n(n_1 x)]'}{\mu_1 j_n(n_1 x) [x h_n^{(3)}(x)]' - \mu h_n^{(3)}(x) [n_1 x j_n(n_1 x)]'} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

可以见到, 散射场系数 a_n 和 b_n 与内场系数 d_n 和 c_n 两者具有同样的分母因子, 所以它们的峰值自然处在同样的波长位置。即在满足共振条件的波长处, 入射光可以在球体内部产生极强的内场, 因而也可以得到强的弹性散射。

我们计算了相对折射率为 1.36, 尺寸参数 x 在 330~345 之间的球体的弹性散射截面 Q_{scat} , 结果示于图 4。由分析可知, 在相应于这样大的尺寸参数的弹性散射谱中, 主要是高序数的模的贡献, 而低序数($l=1, 2, \dots$ 等)的模由于线宽太窄而未标出在图中。在实际中, 由于介质的吸收以及界面的非完善球面性, 最低序的模也不易测得。

我们测量了球状液滴的弹性散射的角分布。测量结果呈现十分清晰的叶状结构。由于

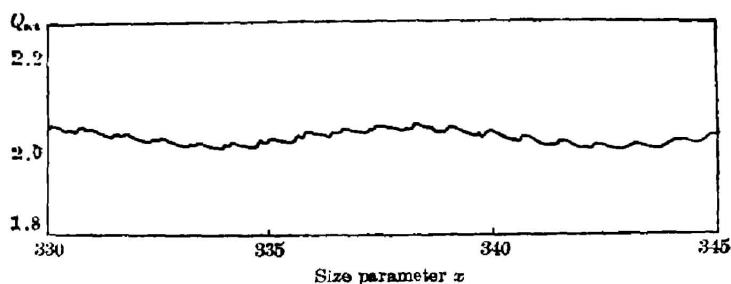


Fig. 4 Scattering cross section of spheres with size parameters between 330~345 and relative refractive index of 1.36

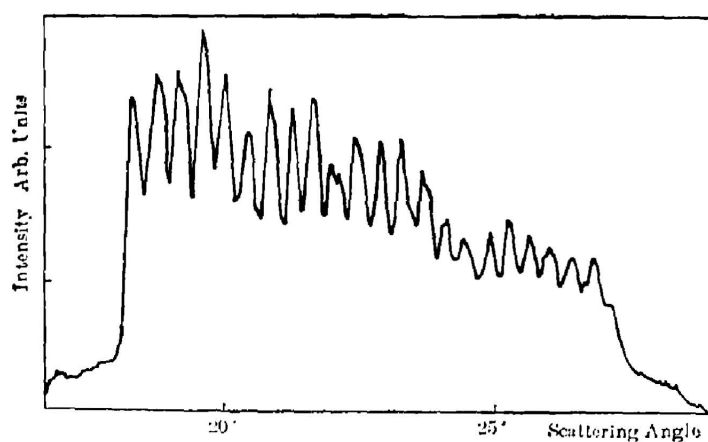


Fig. 5 Angular distribution of the elastic scattering $\lambda=532\text{ nm}$

液滴的半径为 $25\sim 40\ \mu\text{m}$, 对可见波段的光波, 这相当于尺寸参数为几百, 因而在整个 180° 散射角范围中存在着大量的亮叶。图 5 给出了波长为 532 nm 的绿光的弹性散射的角分布, 这个角分布是在近前向的散射角处记录的。可以见到, 在约 10° 的散射角范围中存在着 23 个叶状结构, 其强度随角度增大而减小。如果采用氮-氦激光照射液滴, 也可得到类似的叶结构, 只是由于波长不同, 叶状的数目也不同。

当存在吸收时, 从表 2 可知, 这时弹性散射场的系数 a_n 及 b_n 随 K 的增大急剧降低, 表明弹性散射强度随之减小。

六、结 论

从上面的讨论可以看出:

- (1) 球体腔是一个特殊的腔, 它有大量的本征模。这些模有相当高的反馈和很小的损耗。
- (2) 球体腔的尺寸可以做得很小。极短的腔长相应于很短的回转时间(ps 级), 这可望用于极短寿命的增益介质的振荡腔。同时它也使得许多自发辐射谱都可以具有模结构。
- (3) 计算表明, 球体腔内具有极高的光电场, 这样强的光电场自然极为有利于多种非线性

性光学效应的产生。与腔的谐振性质相配合,这种腔是十分吸引人的。

在本工作过程中,得到 Yale 大学应用物理系张国鼎(Richard K. Chang)教授的宝贵指教与帮助;同时,作者与 Judith K. Snow 也进行了许多有益的讨论,对此一并表示感谢。

参 考 文 献

- [1] H.-M. Tzeng, K. F. Wall *et al.*; *Opt. Lett.*, 1984, **9**, No. 7 (Jul), 273.
- [2] J. B. Snow, S.-X. Qian *et al.*; *Opt. Lett.*, 1985, **10**, No. 1 (Jan), 37.
- [3] S.-X. Qian, J. B. Snow *et al.*; *to be published.*
- [4] G. Mie; *Ann. Physik*, 1908, **25**, No. 4, 377.
- [5] A. Ashkin, J. M. Dziedzic; *App. Opt.*, 1981, **20**, No. 10 (May), 1803.
- [6] P. Chylek, J. T. Kiehl *et al.*; *App. Opt.*, 1978, **17**, No. 19 (Oct), 3019.
- [7] R. E. Benzer, P. W. Barber *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **44**, No. 7 (Feb), 475.
- [8] M. Kerker; *«The Scattering of Light and other Electro-Magnetic Radiation»*, (Academic, New York, 1969).
- [9] C. F. Bohren, D. R. Huffman; *«Absorption and Scattering of Light by Small Particles»*, (Wiley, New York, 1983).
- [10] P. R. Colmell, C. K. Rushforth *et al.*; *J. O. S. A.*, 1984, **A1**, No. 12 (Dec), 1181.

A new type resonator——spherical resonant cavity

(I) Basic characteristics

QIAN SHIRONG

(Department of Physics, Fudan University, Shanghai)

(Received 18 June 1985)

Abstract

This paper presents a new type resonator——spherical resonant cavity, which consists of a spheric medium and its interface with surrounding medium. The intrinsic modes, mode frequencies and the internal field of this spherical cavity are discussed. It is pointed out that this kind of cavity can be used as a good optical resonator. Finally, the spectrum and angular distribution of elastic scattering from the spherical droplet are given.