

光线在非均匀折射率介质中传播的一种研究方法

张为俊 吴存恺

(中国科学院安徽光学精密机械研究所)

提 要

本文从简单的折射定律出发, 导出了在类透镜介质中光线传播的光线矩阵, 并且通过引入等效折射率, 从而比较直观地研究了高斯光束和超高斯光束的自聚焦现象, 所得结果与其它方法处理的结果一致。

一、引 言

文中符号的约定: 用 (r, r') 表示光线上的点及该点的传播方向, 其中 $r' = \frac{dr}{dz}$, 如图 1 所示。

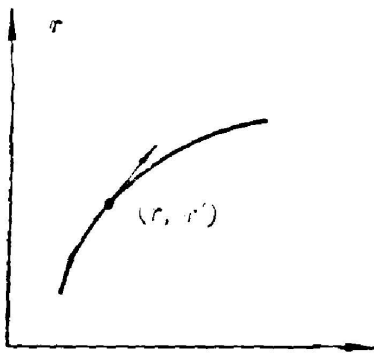


Fig. 1 Scheme of (r, r') in ray optics

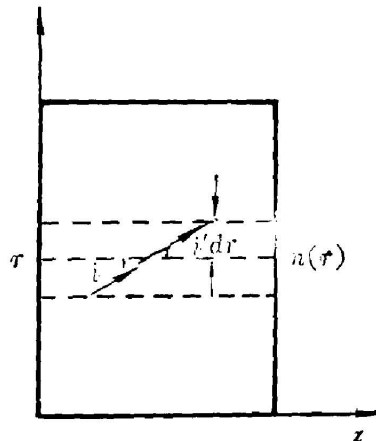


Fig. 2 Scheme to establish fundamental equation

一般情况下, 在处理非均匀介质的光线传播问题时, 人们基本上用几何光学中的光线方程: $\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n$ 来描述, 由此求出介质的光线矩阵^[1]。本文则是从简单的折射定律(如图 2 所示, 处理对象为平行于 z 轴的层状介质) $n \cos i = n' \cos i'$ 出发, 得到传播过程中的基本方程:

$$n(r) \cos i(r) = \text{const.} \quad (1)$$

从而求出类透镜介质的光线矩阵, 同时进一步引入等效折射率, 计及传播的衍射效应, 由此将几何光学和物理光学有机地联系起来, 直观地处理高斯和超高斯光束自聚焦问题, 取得了令人满意的结果。

二、光线在类透镜介质中的传播

如图 3 所示, 将类透镜介质的折射率 $n(r) = n_0 \left(1 - \frac{K^2}{2K} r^2\right)$ 代入基本方程 (1) 得到

$$\cos i(r) = \frac{b}{1 - \frac{a}{2} r^2}, \quad (2)$$

其中: $a = K_2/K$, $b = \cos i_0 \left(1 - \frac{a}{2} r_0^2\right)$ 。

由于

$$\frac{dr}{dz} = \operatorname{tg} i(r) = \left(\frac{1}{\cos^2 i} - 1\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

将 (2) 式代入 (3) 式得

$$\frac{dr}{dz} = \frac{1}{b} \sqrt{\left(1 - \frac{a}{2} r^2\right)^2 - b^2}, \quad (4)$$

在近轴近似下, r 为一阶小量, 且 r_0, r'_0 也为一阶小量。因此, 积分 (4) 式, 可以解出:

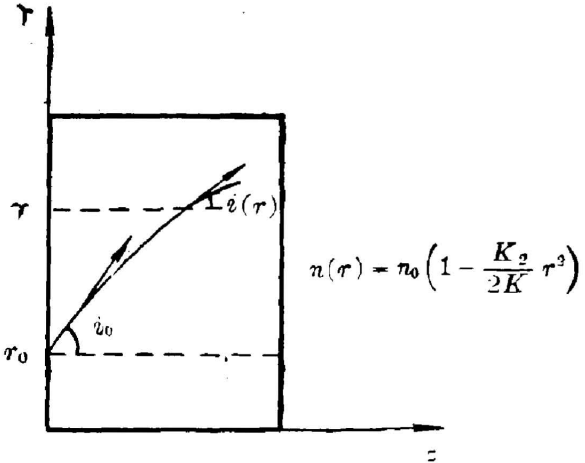


Fig. 3 Propagation of optical ray in lenslike media

$$\begin{cases} r(z) = \cos\left(\sqrt{\frac{K_2}{K}} z\right) r_0 - \sqrt{\frac{K}{K_2}} \sin\left(\sqrt{\frac{K_2}{K}} z\right) r'_0, \\ r'(z) = -\sqrt{\frac{K_2}{K}} \sin\left(\sqrt{\frac{K_2}{K}} z\right) r_0 + \cos\left(\sqrt{\frac{K_2}{K}} z\right) r'_0. \end{cases} \quad (5)$$

由此可得长度为 l 的类透镜介质的光线矩阵。

三、高斯光束的自聚焦

众所周知, 电场在介质中可以诱导出折射率 $\Delta n = n_2 |E|^2$ 。因此, 高斯光束在该介质中传播时, 其本身则会诱导介质产生一个透镜效应。这个效应和传播中的衍射效应相互竞争, 从而产生自聚焦现象。

几何光学一般忽略了衍射效应, 本方法也不例外。但是, 如下面讨论所示, 我们完全可以将衍射效应归结到一个等效折射率 n_e 中, 从而求解传播问题。

1. 求等效折射率 n_e 。由麦克斯韦方程得波方程:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [(n_0 + \Delta n) E] = 0. \quad (6)$$

将 E 写成: $E = \varepsilon(r, z) \exp(iK_0 z - i\omega t)$, 利用慢变振幅近似, (6) 式成为

$$\left(i2K \frac{\partial}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2\right) \varepsilon = -2K^2 \left(\frac{\Delta n}{n_0}\right) \varepsilon. \quad (7)$$

因 $\varepsilon = A \exp(i\phi)$, 从而 (7) 式分成两个方程

$$K \frac{\partial}{\partial z} A^2 = -\nabla_{\perp} \cdot (A^2 \nabla_{\perp} \phi), \quad (8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi + \frac{1}{2K} (\nabla_{\perp} \phi)^2 - \frac{K}{2} \left(\frac{\nabla_{\perp}^2 A}{K^2 A} + 2 \frac{\Delta n}{n_0} \right) = 0. \quad (8b)$$

由(8b)式不难看出,与 Δn 地位相等,衍射效应等效的折射率 n_e 为

$$n_e = \frac{n_0 \nabla_{\perp}^2 A}{2K^2 A}. \quad (9)$$

从(9)式可以知道,对于无径向分布的光波 $A(z)$, $n_e \equiv 0$.

2. 求聚焦点 Z_f , 假设在传播过程中,光束保持高斯线型^[2]:

$$A(r, z) = A_0 \left(\frac{a_0}{a(z)} \right) \exp \left(-\frac{r^2}{2a^2(z)} \right), \quad (10)$$

由(9)和(10)式得

$$n(r) = n_0 + n_2 |E|^2 + n_e = n_0 + n_2 A_0^2 \frac{a_0^2}{a^2} \exp \left(-\frac{r^2}{a^2} \right) - \frac{n_0}{K^2 a^2} + \frac{n_0 r^2}{2K^2 a^4}. \quad (11)$$

利用近轴近似: $0 < r \leq a$, (11)式化简为:

$$n(a) = n_0 + n_2 A_0^2 \frac{a_0^2}{a^2} - \frac{n_0}{K^2 a^2}. \quad (12)$$

为简明起见,取初始条件 $\cos i_0 = 1$, 由(1)式和(11)式得:

$$\cos i(a) = \frac{\beta a^2}{a^2 + r a_0^2}, \quad (13)$$

其中:

$$r = \frac{1}{K^2 a_0^2} \left(\frac{n_2 A_0^2 K^2 a_0^2}{n_0} - 1 \right), \quad (14a)$$

$$\beta = 1 + \gamma. \quad (14b)$$

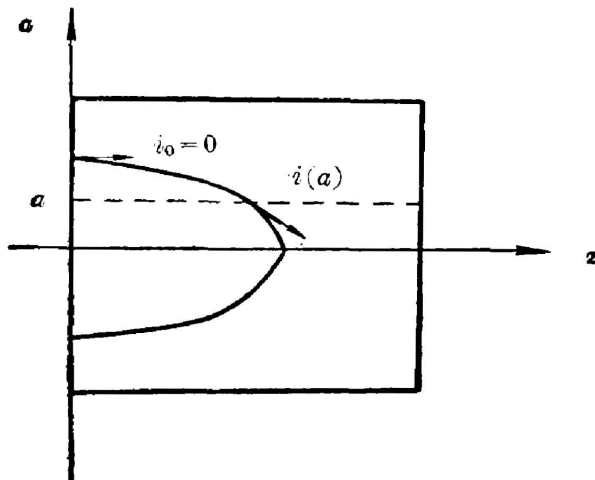


Fig. 4 Self-focusing of a Gaussian beam with initial condition $i_0 = 0$

如图 4 所示

$$\frac{da}{dz} = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 i(a)} - 1}, \quad (15)$$

令: $s^2 = a^2$, $s_0 = a_0^2$. 在聚焦处, 显然有: $s_f = 0$, 积分(15)式得:

$$Z_f = \frac{\beta}{2} \times \int_0^{s_0} \frac{s^{\frac{1}{2}} ds}{[(1 - \beta^2)s^2 + 2rs_0s + r^2s_0^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (16)$$

为了求出上式的积分, 我们进行一些量级的估计, 从而进行简化。

输入功率:

$$P = \frac{n_0 c}{2\pi} \int_0^{\infty} A^2 2\pi r dr = \frac{n_0 c a_0^2 A_0^2}{2}.$$

令: $P_0 = c\lambda^2/8\pi^2 n_2$, 则(14a)式成为:

$$r = \frac{1}{K^2 a_0^2} \left(\frac{P}{P_0} - 1 \right). \quad (17)$$

一般情况下, $r \ll 1$, 例如: 取 $\lambda \sim 10^3 \text{ \AA}$, $a_0 \sim 10^2 \mu\text{m}$, $P/P_0 \sim 2$, 则有 $\gamma \sim 10^{-8}$.

$\gamma \ll 1$, 将(16)式化简, 积分得

$$Z_1 = \frac{1}{2\sqrt{2r}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{s_0 - s}} = \frac{\sqrt{s_0}}{\sqrt{2r}},$$

即

$$Z_1 = \frac{K a_0^2 / \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{P}{P_0} - 1}}.$$

四、超高斯光束的自聚焦

1. 超高斯线型为^[2]

$$A(r, z) = A_0 \left(\frac{a_0}{a(z)} \right) \exp \left[-\frac{b}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^N \right], \quad (18)$$

其中 $N=5$, $b=6.91$ 。将(18)式代入(9)式, 得

$$n_r = \frac{n_0 N^2}{2K^2 a^2} \left[\frac{b^2}{4} \left(\frac{r}{a} \right)^{2N-2} - \frac{b}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^{N-2} \right]. \quad (19)$$

在近轴近似下, $0 < r \ll a$, 因此, 可以略去 $n_r a_0 \left(\frac{r}{a} \right)^{N-2}$ 。这样

$$n(r) = n_0 + n_2 |E|^2 = n_0 + n_2 A_0^2 \frac{a_0^2}{a^2} \exp \left[-b \left(\frac{r}{a} \right)^N \right]. \quad (20)$$

2. 超高斯线型的数值研究

数值分析表明, 对于超高斯线型

$$y(x) = \exp(-bx^N). \quad (21)$$

随着 N 的增大, 线型的顶变平, 沿变陡, 如图 5 所示。

对于 $N=5$, $b=6.91$ 的超高斯线型, 通过计算, 我们得到 $y'(x)$ 的曲线, 如图 6 所示, 其中 $x_m = 0.6497$, 对应于 $y(x)$ 的拐点,

$$y'(x) = -bN x^{N-1} \exp(-bx^N). \quad (22)$$

由图 6 可以看出: $y'(x)$ 是以 x_m 为峰值点, 宽度为 Δ 的窄曲线

3. 超高斯光束的自聚焦

如图 7 所示, 实验表明, 超高斯光束通过长度为 l 的介质自聚焦后, 再经过焦距为 f 的透镜, 在焦平面上得到一个环^[2]。

由上节讨论, 超高斯线型顶较平, 因此在近轴近似下, 线型的斜率均较小, 从而光线通过介质后的偏转也较小, 即对初始值 $r=r_0$, 有 $r(l) - r_0 = \Delta r$ 为小量。这样, 我们便可以在求解 $r(z)$ 的过程中, 将 $n(r)$ 在 r_0 处线性近似, 由(20)式得到:

$$n(r) = n_0'(1 - 2r), \quad (23)$$

其中

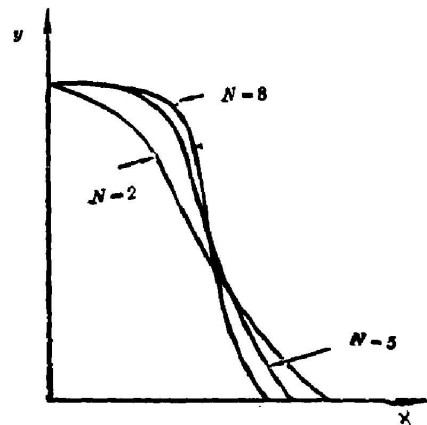


Fig. 5 Gaussian and super-Gaussian profiles corresponding to $N=2$, $N=5$ and $N=8$, respectively

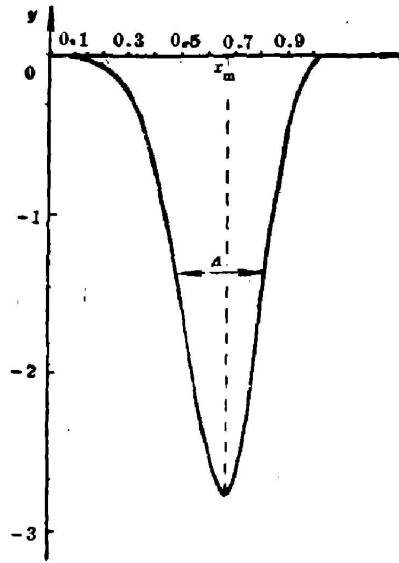


Fig. 6 Curve of $y'(x)$, where $N=5$, $b=6.91$, x_m is inflexion of $y(x)$

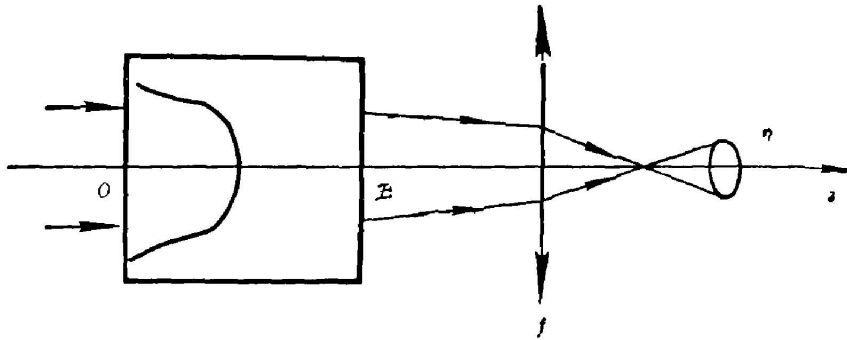


Fig. 7 Self-focusing of a super-Gaussian beam, the radius of ring is η , the length of media is L , and the focus is f

$$\begin{cases} n'_0 = n_0 + n_2 A_0^2 (1 + b N x_0^N) \exp(-b x_0^N), \\ \alpha = \frac{n_2 A_0^2 b N x_0^{N-1} \exp(-b x_0^N)}{n_0 + n_2 A_0^2 (1 + b N x_0^N) \exp(-b x_0^N)} \cdot \frac{1}{a_0}, \\ x_0 = \frac{r_0}{a_0}. \end{cases} \quad (24)$$

推导中假定了 $a(z)$ 在通过介质后变化很小, 即 $a(z) = a_0$ 。取 $i_0 = 0$, 利用(1)式和(23)式得:

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{1}{b} \sqrt{(1 - \alpha r)^2 - b^2}. \quad (25)$$

这里 $b = 1 - \alpha r_0$, 解得:

$$r(z) = \frac{1}{\alpha} \left[1 - b \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha}{b} z \right) \right]. \quad (26)$$

由于 α 是小量, 因此:

$$r'(l) = -\frac{al}{1 - \alpha r_0}. \quad (27)$$

利用(24)式和(27)式,得到环半径(见图7)

$$\eta = f |r'(l)| = \frac{n_2 A_0^2 b N x_0^{N-1} \exp(-bx_0^N)}{n_0 + n_2 A_0^2 \exp(-bx_0^N)} \cdot \frac{l}{a_0} f_0 \quad (28)$$

由于 $n_2 A_0^2 \ll n_0$, (28)式为

$$\eta = b N x_0^{N-1} \exp(-bx_0^N) \frac{n_2 A_0^2}{n_0} \cdot \frac{l}{a_0} f_0 \quad (29)$$

因为 $y'(x_0) = -b N x_0^{N-1} \exp(-bx_0^N)$ 是以 x_m 为峰值点的窄曲线,所以,圆环的半径为

$$\eta = b N x_m^{N-1} \exp(-bx_m^N) \frac{n_2 A_0^2}{n_0} \cdot \frac{l}{x_0} f, \quad (30)$$

其环宽由 $y'(x_0)$ 曲线的宽度 Δ 决定,由(30)很容易看出: $\eta \propto N$ 。这与实验结果完全一致^[3]。

五、讨 论

从上面几个例子,可以发现这种从折射定律出发处理光线在非均匀介质中传播的方法,使得所研究的问题在物理上非常直观。特别在处理自聚焦现象时,将光束的衍射效应等效成一个折射率,从而在波动光学和几何光学中形成了一个桥梁。这种概念的引入,估计对于其它类似的波动光学难以处理的问题提供了一种研究方法。

作者感谢白贵儒副教授的有益讨论。

参 考 文 献

- [1] A. Yariv; "Quantum Electronics", (John Wiley & Sons, New York, 1975), 106~108.
- [2] Y. R. Shen; "The Principles of Nonlinear Optics", (John Wiley & Sons, New York, 1984), 307~313.
- [3] "Laser Program Annual Report—1975", (Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, Calif.), 169~175.

A new method to study optical ray propagations in media with ununiform refractivity

ZHANG WEIJUN AND WU CUNKAI

(Laboratory of Laser Spectroscopy, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 29 January 1986; revised 16 May 1986)

Abstract

In this paper, the ray matrix in lenslike media is derived from the simple refraction law. By introducing the equivalent index of refraction, the self-focusing phenomenon of Gaussian beam and Super-Gaussian beam are treated more intuitively. The results obtained are consistent with those derived from using other methods.