

几何近似傅里叶计算全息衍射干涉法

刘立人 黄洪欣 王之江

(中国科学院上海光学精密机械研究所)

提 要

在扩展白光编码栅衍射干涉法的基础上,本文提出了用同轴计算机傅里叶全息图合成编码光栅的新方法,使得谱衍射干涉法的干涉形式可随编码栅图案改变的特点成为现实可能,相应能容易地产生一般干涉形式之外的任何干扰图。编码谱函数由一定的几何图案所构成,本文还提出了几何光学近似方法,使得物面函数可近似用纯相位变化表示,这样将得到较易制作的两元型干涉计算机全息图,从而也避免了复杂的两维傅里叶变换计算。

我们曾提出编码栅傅里叶谱衍射干涉仪,这时干涉形成取决于所用的编码光栅的傅里叶衍射谱的形式^[1],其特点是可以利用不同的编码栅产生各种形式干涉图,包括一般干涉法所不能产生的特殊干涉形式。这种新方法事实上是一种推广的相衬法,所以用作观察和测量相位物体时将具有更大的灵活性并且能够取得更多的信息,可用于生物学、病理学、细菌学和形貌学等方面。但是常用的光栅形式不多,例如只有平行光栅和圆光栅,因此这种新干涉方法的特性不能很好地发挥。作者曾用傅里叶全息图来合成编码光栅^[2],它需要先制作衍射谱的模板,然后再用全息照相法取得全息编码光栅。事实上衍射谱要求刻线宽度近似于所用傅里叶变换透镜的衍射极限,相应的衍射能量也极低,因此全息图的制作不是很容易的。由于计算机全息在原理上可以产生任何二维分布的函数,在此基础上,本文提出用计算机全息图合成编码光栅,这样可以根据所需的衍射谱函数直接合成出编码栅,使得谱衍射干涉法更具有应用价值。

编码栅应当是傅里叶全息图,在众多类别的计算机全息图中,我们采用干涉型的,这是由于在几何光学近似下,几何图案的谱分布函数可用傅里叶变换输入面上的纯位相变化函数来表示,这样避免了复杂的二维傅里叶变换的计算。本文着重讨论同轴式干涉型计算全息,它可以直接用作编码板,并且可以用扩展白光照明。

一、系统的基本原理

典型的系统结构布置如图1所示,透镜1和透镜2用于对编码栅作傅里叶变换,编码板1和2的位置有相互成像的关系,物体通过透镜2和3成像在观察屏上。根据我们已得到的结论^[3],像点场强正比于两编码栅谱与物体的相关积分,即

$$E(x, y; \lambda) = \iint_{-\infty}^{\infty} G_1\left(\frac{\alpha}{\lambda f}, \frac{\beta}{\lambda f}\right) G_2\left(\frac{\alpha}{\lambda f}, \frac{\beta}{\lambda f}\right) O\left(\alpha - \frac{x}{M}, \beta - \frac{y}{M}\right) d\alpha d\beta. \quad (1)$$

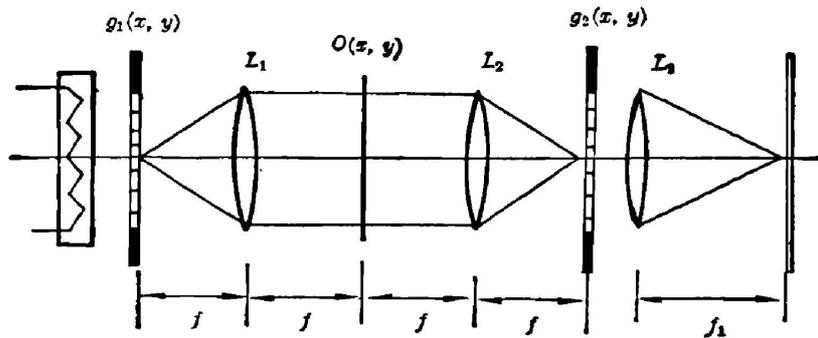


Fig. 1 Basic configuration for explaining the principle

这里 G_1 和 G_2 分别为编码栅 g_1 和 g_2 的傅里叶谱, M 为物体的成像放大率, $M = (f_1/f)$ 。令 $G_s = G_1 G_2$ 称为系统的合成谱函数, 这时背景强度为无物体时的像点强度, 有^[2]

$$E_b(\lambda) = \iint_{-\infty}^{\infty} G_1\left(\frac{\alpha}{\lambda f}, \frac{\beta}{\lambda f}\right) G_2\left(\frac{\alpha}{\lambda f}, \frac{\beta}{\lambda f}\right) d\alpha d\beta$$

$$= G_1\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \otimes \otimes G_2\left(-\frac{x}{\lambda f}, -\frac{y}{\lambda f}\right) \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} \quad (2)$$

这里 $\otimes \otimes$ 表示二维卷积积分。用作编码板的计算机全息图, 有许多种类是二元函数, 它们的谱有一些独特的性质: 编码板的透过率函数 $g(x, y)$ 只能取 0 和 1, 因此 $g^2 = g$, 它们的变换为

$$G(f_x, f_y) \otimes \otimes G(f_x, f_y) = G(f_x, f_y), \quad (3)$$

由于 g 是实数型非对称函数, 它的谱函数是厄米型函数, 即

$$G(f_x, f_y) = G^*(-f_x, -f_y). \quad (4)$$

通常在使用上使两编码板的图案相同, 因此可以取以下几种组合:

(1) 两编码栅之间相互成像, 即

$$g_1(x, y) = g_2(-x, -y) = g(x, y).$$

因此合成谱 G_s 和背景强度 E_b 分别为

$$\left. \begin{aligned} G_s &= G\left(\frac{\alpha}{\lambda f}, \frac{\beta}{\lambda f}\right) \cdot G\left(-\frac{\alpha}{\lambda f}, -\frac{\beta}{\lambda f}\right) = |G|^2, \\ E_b &= G\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \otimes \otimes G\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = G(0, 0), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

结果表明, 合成谱为实函数, 背景为合成谱的零级所产生。

(2) 两编码栅反成像, 即

$$g_1(x, y) = g_2(x, y) = g(x, y).$$

这时

$$\begin{aligned}
 G_s &= G^2, \\
 E_b &= G\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \otimes \otimes G\left(-\frac{x}{\lambda f}, -\frac{y}{\lambda f}\right) \Bigg|_{\substack{x=0 \\ y=0}} \\
 &= G\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) ** G\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \Bigg|_{\substack{x=0 \\ y=0}}
 \end{aligned} \quad (6)$$

这里 ** 表示二维相关积分。合成谱为原编码栅谱的平方。

(3) 两编码栅互补成像, 即

$$g_1(x, y) = g(x, y), \quad g_2(x, y) = 1 - g(-x, -y),$$

此时

$$\begin{aligned}
 G_s &= G(0, 0) - |G|^2, \\
 E_b &= 0,
 \end{aligned} \quad (7)$$

这里 $E_b = 0$ 表示暗场观察, 能得到较好的条纹对比度。当 $g(x, y)$ 是偶函数时, 它的谱是实偶函数, 合成谱分布是中心对称的, 在设计 $g(x, y)$ 时可充分利用这一性质。

二、干涉型计算机全息图合成编码光栅

相位物体的成像干涉形式取决于编码板的傅里叶变换谱的形式, 现在要解决的问题是给出谱分布函数, 求出编码函数并合成出编码光栅。计算机全息有许多种^[3], 本文采用计算干涉图来合成编码栅, 这是考虑到:

(1) 这种计算机全息为两元函数, 编码方式简单, 容易制作。

(2) 这种计算机全息可由波前的位相分布 $\varphi(x, y)$ 产生。它的傅里叶谱在几何光学近似下, 由 $\varphi(x, y)$ 的变化率决定, 因此给出干涉谱函数的图样可直接且简单地求出位相波前函数, 而不必作二维傅里叶计算。

(3) 在编码栅谱衍射干涉仪中, 其结构是两编码栅相互成像或者使编码栅中心对称。实际起作用的是 $|G|^2$ 消除了编码栅谱的相位因子, 因此只需考虑 $\varphi(x, y)$ 波前产生的谱函数的强度分布, 而不必考虑其谱函数的位相分布。

(4) 适合于同轴型全息。这是由于编码光栅本身就是一种同轴型全息图。

在几何光学近似下^[4], 相位物体上某点 (x_0, y_0) 邻近处的相位因子为 $\varphi(x, y)$, 其变化的一级近似为

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} (x - x_0) + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} (y - y_0).$$

产生的空间频率为

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \mathbf{i} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \mathbf{j}, \quad (8)$$

如图 2 所示的光学变换系统中, 该物点 (x_0, y_0) 在谱面上的位置 (x', y')

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{\lambda f}{2\pi} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \\
 y' &= \frac{\lambda f}{2\pi} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \Bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}
 \end{aligned} \quad (9)$$

通过(8)式和(9)式建立了谱面上的点和物面上的相应变化之间的关系,即建立了相位分布和相应的谱面轨迹之间的关系。相反,我们也应当注意纯相位变化在谱面上产生的轨迹的相对强度和相应的相位因子。

如把 (x_0, y_0) 点附近的 $\varphi(x, y)$ 扩展到整个物面,这时通过傅里叶变换计算或者通过几何光学成像计算,不难求出由 (x_0, y_0) 点上相位变化函数在谱面上 (x', y') 点附近的相位分布因子。如前所述,设计上合成谱为实函数,这个相位因子不是必需的。而 (x', y') 点上的强度相对值由产生该点的物面上相应相位分布的相对面积大小决定。

根据谱函数 $G(x, y)$,若推导出的物体的波前位相因子为 $\varphi(x, y)$,则同轴型全息图的分函数为

$$t(x, y) = 0.5[1 + \cos \varphi(x, y)], \quad (10)$$

其最大值位于 $\varphi(x, y) = 2n\pi$;最小值位于 $\varphi(x, y) = 2[n + (1/2)]\pi$ 。作为计算机绘制的二元全息图,只能取值0和1。设宽度为 q ,则合成编码光栅为

$$g(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin m\pi q(x, y)}{m\pi} \exp[jm\varphi(x, y)], \quad (11)$$

m 表示衍射级次,这是由于条纹矩形化的结果。显然, $m=1$ 项将产生我们所需的干涉谱 $G(x, y)$,对 m 级衍射,有

$$f_m(x, y) = mf(x, y),$$

由此轨迹为

$$x'_m = m\lambda f f_x, \quad y'_m = m\lambda f f_y. \quad (12)$$

可见

- (1) 当 $m=0$,产生直流分量;
- (2) 当 $m=-1$, $x'_{-1} = -x'$, $y'_{-1} = -y'$,产生干涉谱 $G(x, y)$ 的中心对称分布;
- (3) 当 m 为正的高次项,图坐标放大 m 倍; m 为负的高次项;相应于 m 为正的对称分布。高级衍射分量的大小取决于作图时的宽度函数 q ,显然当 q 取0.5时将消除二次衍射项。

一般情况下,忽略高级项的作用,取零级和 ± 1 级,因此这种计算机全息谱并不是原来设计的谱,它包括了中心直流、 $G(x, y)$ 和 $G(-x, -y)$ 三项,因此在设计时应当注意,干涉谱只能是偶函数。

三、设计实例

下面给出三种特殊的干涉谱的编码栅的干涉型全息图的具体设计方法。

1. 十字线

十字线本身是对称分布的,可认为由两条正交的直线段组成,如图3所示。一段直线可

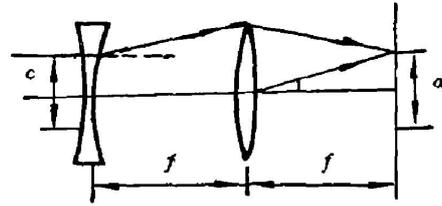


Fig. 2 Approximate Fourier-transformation for phase variation in geometric approach

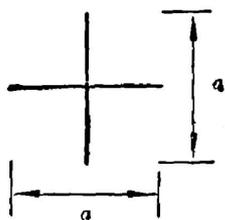


Fig. 3 Spectrum for interference in the shape of a cross

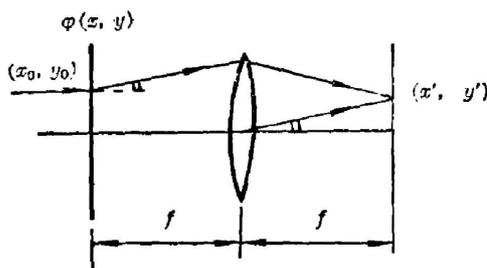


Fig. 4 Generation of the intensity spectrum in the shape of a short line by an equivalent cylinder lens

以用等效柱面透镜产生,如图4所示。对于 y 方向的长度为 a 的线段,相应的相位体为

$$\text{Rect}\left[\frac{y}{(c/2)}\right]\exp\left(\pm j\frac{\pi y^2}{\lambda f_0}\right), \quad (13)$$

这里满足边界条件: $(a/c) = (f/f_0)$, c 为相位体的宽度,即编码栅的宽度, f_0 为等效柱面透镜的焦距的绝对值(图4中为负柱面透镜,相应于(13)式的指数前取“+”号)。因此满足干涉方程的极大值的等位线方程: $\pm(\pi y^2/\lambda f_0) = 2n\pi$, 由此得出

$$y = \pm\sqrt{2\lambda f_0 n} = \pm\sqrt{2\lambda(f_0/a)n}. \quad (14)$$

因为 $-(c/2) \leq y \leq (c/2)$, 因此, $0 \leq n \leq (ca/8\lambda f)$, 最大等位线数为 $n_{\max} = (ca/8\lambda f)$, 这实质上是菲涅耳波带片的一维分布。

同理,对于 x 方向的长为 a 的线段

$$x = \pm\sqrt{2\lambda f_0 n'} = \pm\sqrt{2\lambda(f_0/a)n'}, \quad (15)$$

其中 $-(c/2) \leq x \leq (c/2)$, $0 \leq n' \leq (ca/8\lambda f)$ 。

考虑到编码板的中心对称,以消除相位因子,十字线编码栅设计成如图5所示,其中上下两区产生垂直线段,左右两区产生水平线段。工艺上由于先要用计算机控制的绘图仪制得放大的图,然后再缩小成所需的尺寸 c ,设放大倍数为 M ,作为输入计算机的方程应为

$$y = \pm M\sqrt{2\lambda(f_0/a)n'}, \quad (16)$$

具体设计数据: $f = 135\text{ mm}$, $c = 32\text{ mm}$, $a = 1\text{ mm}$, $n'_{\max} = 54$, $M = 6.25$, 白光平均波长取 5500 \AA , 因此, $\sqrt{2\lambda f_0/a} = 2.18$ 。

2. 平行直线段对

图6是所要产生的平行直线段对。中心偏离 $\pm b$ 可由 $\exp(\pm j2\pi bx/\lambda f)$ 线性相位因子(棱镜)产生,因此偏离 $\pm b$ 、长为 a 的直线段的编码栅的等效相位分布为

$$\text{Rect}\left[\frac{y}{(c/2)}\right]\exp\left[j\frac{\pi}{\lambda}\left(\pm\frac{y^2}{f_0} \pm \frac{2b}{f}x\right)\right]. \quad (17)$$

在设计时考虑到干涉谱的中心对称性,取第一和第四象限对应于 $+b$ 线段,而第二和第三象限对应于 $-b$ 线段,计算中取二次因子为负号,在 $x \geq 0$ 的第一和第四象限内,干涉极大时的等位线方程为 $-(y^2/f_0) + (2b/f)x = 2\lambda n$, 由此得出

$$y^2 = \frac{2bc}{a}\left(x - \frac{\lambda f}{b}n\right), \quad (18)$$

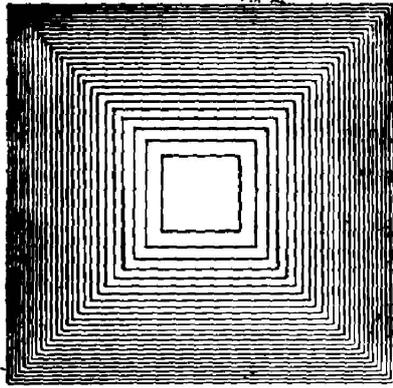


Fig. 5 A possible pattern of the computer-generated interferograms for the spectrum of a cross

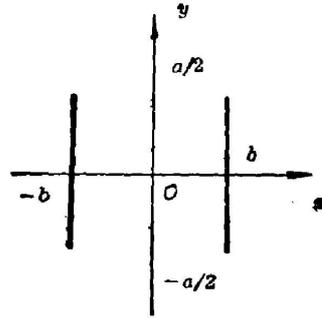


Fig. 6 Spectrum for interference in the shape of a pair of short lines

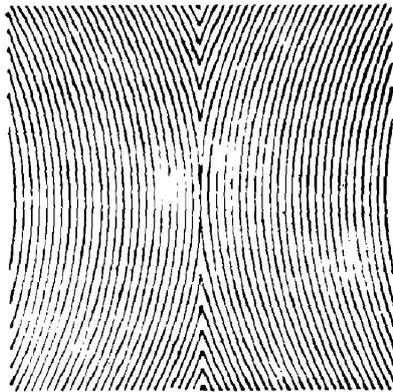


Fig. 7 A possible pattern of the computer-generated interferograms for the spectrum of a pair of short lines

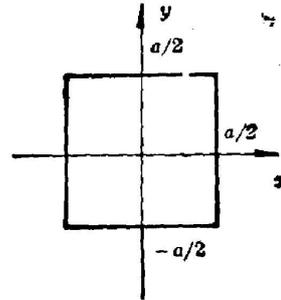


Fig. 8 Spectrum for interference in the shape of a check

这是开口朝 +x 轴方向, 在 x 轴上间隔为 $(\lambda f/n)$ 的抛物线族。同样, 在 $x < 0$ 的第二和第三象限内, 干涉极大的等位线方程

$$y^2 = -\frac{2bc}{a} \left(x + \frac{\lambda f n}{b} \right) \quad (19)$$

这样就得到了图 7 所示的编码光栅, 为方便起见 x 方向尺寸也取 c。同样, 计算机绘图放大 M 倍, 则计算机方程与编码栅方程有区别, 应为

$$y^2 = \frac{2bc}{a} M \left(|x| - \frac{\lambda f}{b} M n \right) \quad (20)$$

具体设计参数是: 波长取白光中心波长 6500 \AA , 而编码光栅在 x 方向相当于 $51/\text{mm}$ 的光栅, 使两平行线长等于其衍射间隔, 即 $b = (a/2) = 0.37 \text{ mm}$, 编码板尺寸 $c = 20 \text{ mm}$, 实际绘图时 $M = 6.67$, 因此输入计算机的方程为

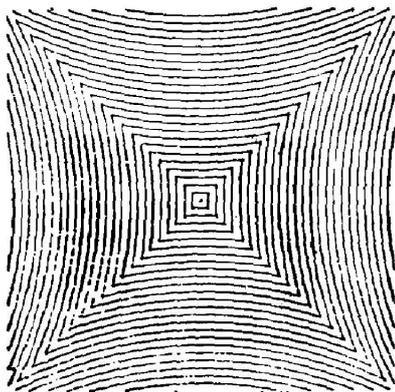


Fig. 9 A possible pattern of CGIs for the spectrum of a check

$$y^2 = 20 M \left(|x| - \frac{Mn}{5} \right). \quad (21)$$

3. 方框

方框型干涉谱也是中心对称函数,方框由二对等长平行线构成(如图8所示),注意到偶函数的谱是中心对称的,设计了如图9所示的分布函数,左右二部分产生方框的左右二条线。编码栅方程与上节平行直线对的讨论一样,设计参数也一样。

四、实 验

在实验中首先观察了上述三种编码光栅的傅里叶谱分布,它们与设计的预言一致,分别产生图10的(a)、(b)、(c)三种干涉谱,其中中心亮点是零级衍射光。上述设计的三种干涉谱产生的都是一般干涉仪不能产生的特殊形式的干涉形式,十字型干涉谱表示了在水平和垂直方向上平均化后与中心相位比较的干涉,平行直线对型干涉谱表示相位平均化后的剪切干涉,方框型干涉谱表示了方框轨迹上相位平均化后与中心相位的比较干涉。它们的作用很令人感兴趣的,在实验中,用酒精灯作为被测物体,这样得到的干涉图案见图11,其中图11(a)是用十字型干涉谱产生的,图11(b)是用垂直平行直线对干涉谱产生,图11(c)是用水平平行直线对干涉谱产生,图11(d)是用方框型干涉谱产生,图11(e)是用平行光栅产生的三点型干涉谱,即相当于横向剪切干涉,光栅周期为0.2 mm,作比较用。干涉仪系统(即图1)参数为 $f=185$ mm, $f_1=135$ mm,扩展白光源直接采用照相用的白炽灯泡。

酒精灯火焰的折射率变化在灯芯处较复杂,而灯芯之上的折射率梯度分布基本上属横向的。从平行光栅的横向剪切干涉图(图11(e))中可以看出这种分布情况,再以它作为参考来讨论其它几种干涉的效果。由于垂直线对的干涉谱走向与灯芯之上的火焰折射率梯度相正交,均化取样于垂直线段上的折射率,其值是较相近的,因此均化干涉的结果使这部分的条纹更清晰(图11(b)),相反,水平线对的干涉谱与折射率梯度方向一致,均化取样于水平线段上的折射率,其值变化最大,因而均化干涉的结果使得灯芯之上的条纹更模糊(图11(c)),而方框形干涉谱中的垂直线段的取样在灯芯之上较水平线段取样起主导作用,因此干涉图(图11(d))与垂直线对的(图11(b))差别不大。十字线干涉谱的均化取样于通过中心的十字线上的折射率,可见只有当折射率变化很大时才能产生明显的均化干涉条纹,如图11(c)所示;这使得火焰的轮廓显得最为尖锐。

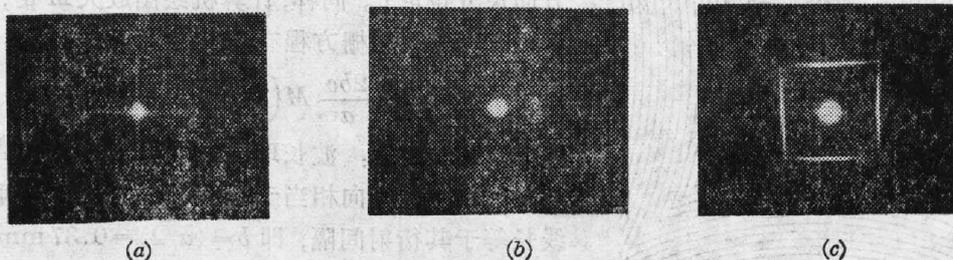


Fig. 10 Reconstructed F-T spectra of the three CGIs shown in Figs. 5~9

(a) a cross, (b) a pair of short lines, and (c) a check

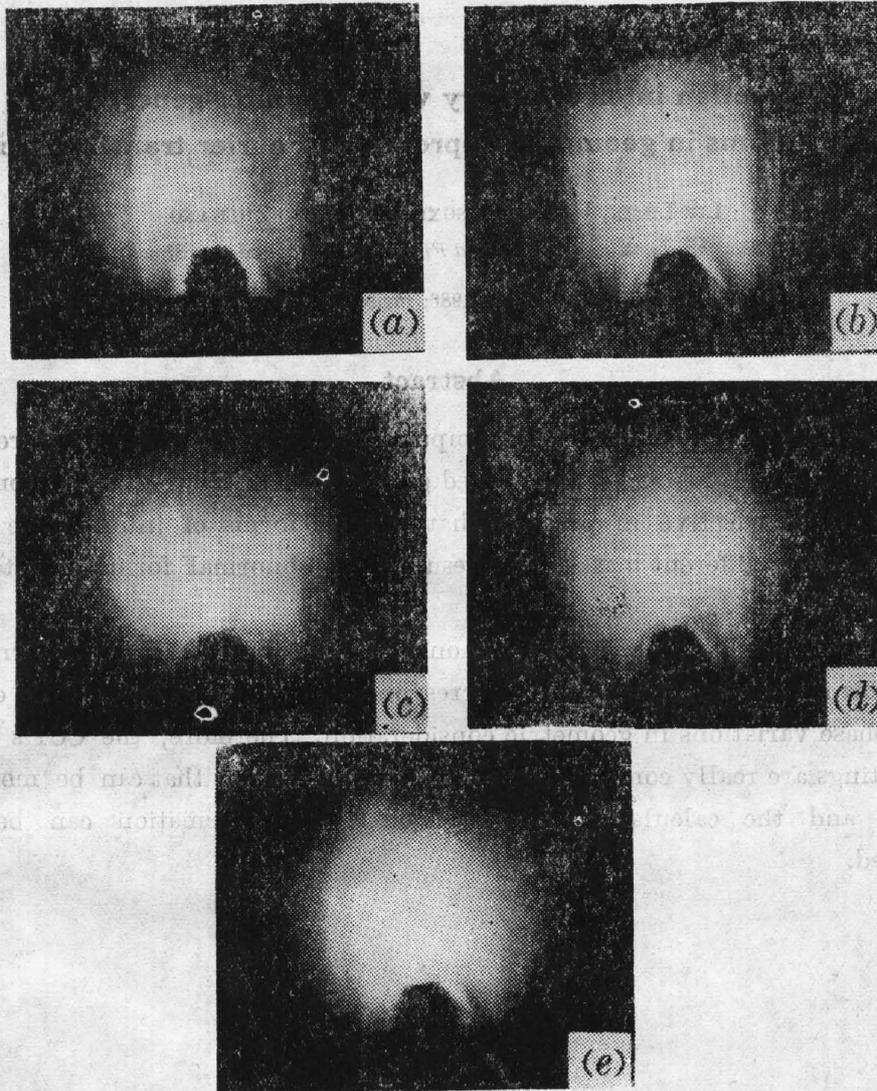


Fig. 11 Interferograms of an alcohol-lamp flame

(a) with the spectrum of a cross, (b) with the spectrum of a pair of vertical short lines, (c) with the spectrum of a pair of horizontal short lines, (d) with the spectrum of a check, and (e) by Ronchi gratings

曹根娣同志为本工作作了铬板光刻,特表感谢。

参 考 文 献

- [1] 刘立人;《光学学报》,1984, 4, No. 11 (Nov), 970.
- [2] 刘立人;《中国激光》,1985, 12, No. 11 (Nov), 641.
- [3] W-H. Lee;《Progress in Optics》, 16, (ed. by E. Wolf, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1978), 119.
- [4] M. Born and E. Wolf;《Principles of Optics》, (Pergamon, New York, 1975). 119~127.

Diffraction interferometry with computer-generated interferograms in geometric approach of Fourier transformation

LIU LIBEN, HUANG HONGXIN AND WANG ZHIJIANG

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica)

(Received 21 January 1986; revised 22 April 1986)

Abstract

A new method with in-line F-T computer-generated holograms is proposed to synthesize the coded gratings for the coded grating F-T diffraction interferometry, so that it becomes effective in practice that various forms of interference can be achieved by using different masks. As a result, any abnormal forms of interference can be easily obtained.

The required F-T spectrum commonly consists of geometric patterns, thus, another new idea is proposed that the corresponding object function can be expressed by pure phase variations in geometric consideration. Therefore, the CGHs used for coded gratings are really computer-generated interferograms that can be more easily prepared, and the calculation for 2D Fourier transformation can be totally economized.