

# 对两种薄膜材料构成的典型周期膜系特性的全面探讨\*

何兆麟 陈惠广  
(新天光学仪器研究所)

## 提 要

本文全面讨论了两类由不等厚层构成的周期膜系 $(pq)^m$ 与 $(aba)^m$ 的特性,包括反射带的定域,反射曲线的周期性与对称性以及反射宽的宽度与高度等等,并提出了一种求反射带宽的图解法。

## 一、前 言

由两种等厚膜层构成的周期膜系早有广泛的应用,由于非等厚周期膜系可以通过改变两种膜层的相对厚度来改变反射带的分布与适当调节反射带的宽度,此外,当相对增加高折射率膜层的厚度时,还能起到减少角度效应的作用,所以应用相当普遍。非等厚周期膜系的理论基础较成熟,但具体讨论的不多,仅文献[1]中略有提及,本文将用简单的方法对最常用的二元周期膜系与三元对称周期膜系的光学特性进行全面的分析。将可看到,结论是相当简洁的。

## 二、讨论的对象与基本符号

本文讨论两类最常用的周期膜系 $(pq)^m$ 与 $(aba)^m$ ,它们都是仅由两种薄膜材料所构成。

### 1. $(pq)^m$ 膜系

$p$ 代表折射率为 $n_1$ 、相位厚度为 $\delta_p$ 的膜层; $q$ 则代表 $n_2$ 与 $\delta_q$ 的膜层,设 $\delta_p$ 与 $\delta_q$ 具有最大公因子 $\delta$ ,则相位厚度可改写为

$$\delta_p = P\delta, \quad \delta_q = Q\delta \quad (1)$$

可知 $P/Q$ 表示单个周期内两种膜层的厚度比\*\*,于是单个周期的相位厚度

$$\phi = (P+Q)\delta \quad (2)$$

### 2. $(aba)^m$ 膜系

类似上段所述, $a$ 对应 $n_1$ 与 $\delta_a$ , $b$ 对应 $n_2$ 与 $\delta_b$ ,单个周期内 $n_1$ 层的总相位厚度为 $2\delta_a$ , $n_2$ 层为 $\delta_b$ 。设它们的最大公因子为 $\delta$ ,可得下式:

$$2\delta_a = P\delta, \quad \delta_b = Q\delta \quad (3)$$

收稿日期: 1986年2月5日

\* 曾在第二届全国光学年会上宣读。

\*\* 分数最简式。

式中  $P$ 、 $Q$ 、 $\phi$  的定义与上段所述完全相同, 此外再引入一个表示单层厚度比的量<sup>\*</sup>  $(A/B) = (\delta_a/\delta_b)$ 。显然, 下述关系式成立

$$\left. \begin{aligned} P &= 2A, Q = B, & B \text{ 为奇数时} \\ P &= A, Q = (B/2), & B \text{ 为偶数时} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

### 3. 反射带的定域

对于任意周期膜系(不限于两种折射率), 其反射带的定域问题在文献[2, 3]中早有结论, 对我们的具体对象而言, 可以表述为: 仅当  $\phi = k\pi$ , 但  $\phi \neq (P+Q)l\pi$ , ( $k, l=0, 1, 2, \dots$ ), 才可能出现高反带。

由此可见, 高反带的抑制是以  $(P+Q)\pi$  为周期, 参看图 1。

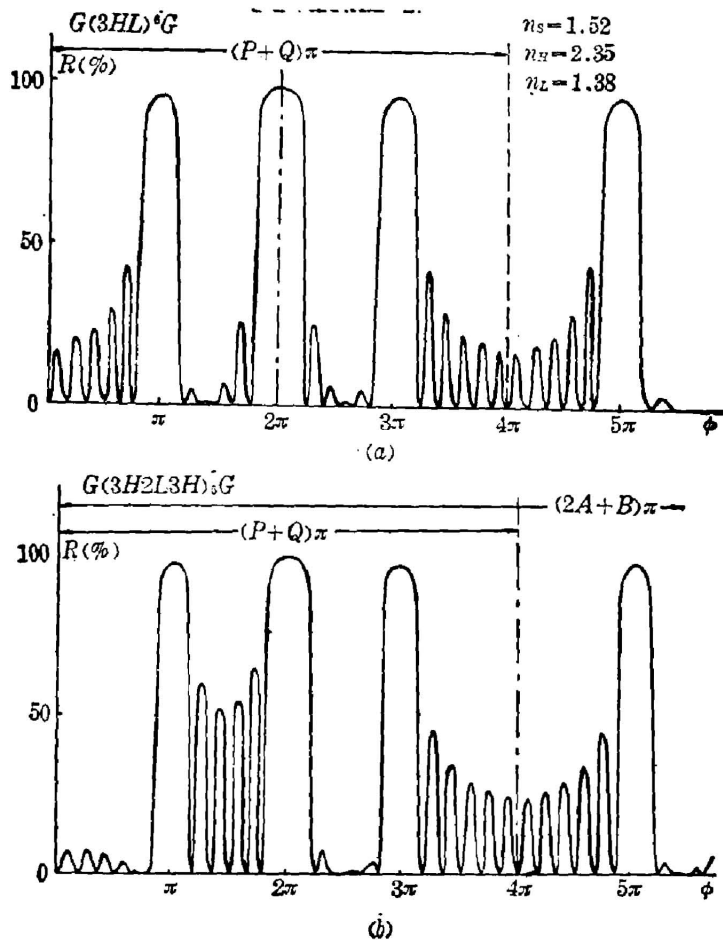


Fig. 1  $R(\phi)$  curves of two kinds of film systems with the same basic structure  $(L3H)^6$ . The period of curve (b) is 8, twice that of suppressed reflectance zones

### 三、周期性与对称性

由上节结论已知高反带的抑制是以  $(P+Q)\pi$  为周期, 因此, 若  $R(\phi)$  曲线存在周期性,

\* 分量最简式。

其周期必为 $(P+Q)\pi$ 的整数倍,下面分别对两种膜系进行讨论。

### 1. $(pq)^m$ 膜系

单周期的特性矩阵为

$$[M] = \begin{bmatrix} \cos \delta_p & i \sin \delta_p / n_1 \\ i n_1 \sin \delta_p & \cos \delta_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta_q & i \sin \delta_q / n_2 \\ i n_2 \sin \delta_q & \cos \delta_q \end{bmatrix}, \quad (5)$$

已知单周期相位厚度 $\phi = \delta_p + \delta_q$ , 现给定 $\phi' = (P+Q)\pi + \phi$ , 由(1)、(2)式易求得对应的单层相位厚度分别为 $\delta'_p = P\pi + \delta_p$ ,  $\delta'_q = Q\pi + \delta_q$ . 代入(5)式可求出相应的 $[M']$ , 当 $P, Q$ 皆为奇数时, 易证 $[M'] = [M]$ ; 当 $P, Q$ 一为奇数一为偶数时, 易证 $[M'] = -[M]$ . 在 $m$ 次周期后, 它们与任何基底组成的等效光纳 $Y'$ 与 $Y$ 是相等的, 可见, 不论 $P, Q$ 奇偶如何,  $R(\phi') = R(\phi)$ 即 $R[(P+Q)\pi + \phi] = R(\phi)$ . 这证明了 $R(\phi)$ 存在周期性, 且 $(P+Q)\pi$ 是其最小周期, 如图1(a)虚线所示。

对称性与单个周期区间的选择有关, 显然易见的是, 若存在对称性, 所选区间的两端至少要有相同的特性, 或都是高反带, 或都是高反带被抑制的情况。因此, 选取 $[0, (P+Q)\pi]$ 区间来试探是否存在对称性是合适的。

任取 $\theta$ 值( $\theta \leq (P+Q)\pi/2$ ); 给定 $\phi' = [(P+Q)\pi/2] + \theta$ 与 $\phi'' = [(P+Q)\pi/2] - \theta$ , 可由(1)、(2)求出相应的 $\delta'_p, \delta'_q$ 与 $\delta''_p, \delta''_q$ , 代入(5)式计算出 $[M']$ 与 $[M'']$ , 当 $P, Q$ 皆为奇数, 有

$$\begin{bmatrix} m'_{11} & m'_{12} \\ m'_{21} & m'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m''_{11} & -m''_{12} \\ -m''_{21} & m''_{22} \end{bmatrix};$$

当 $P, Q$ 一为奇数一为偶数, 有

$$\begin{bmatrix} m'_{11} & m'_{12} \\ m'_{21} & m'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m''_{11} & m''_{12} \\ m''_{21} & -m''_{22} \end{bmatrix}.$$

经 $m$ 次周期后,  $[M']$ 与 $[M'']$ 和任何基底组成的等效光纳 $Y'$ 与 $Y''$ 互为共轭, 相应的 $R(\phi') = R(\phi'')$ , 即 $R\{[(P+Q)\pi/2] + \theta\} = R\{[(P+Q)\pi/2] - \theta\}$ . 说明在单周期 $[0, (P+Q)\pi]$ 内,  $R(\phi)$ 存在对称性, 对称中心在 $\phi = (P+Q)\pi/2$ 处, 如图1(a)点划线所示。

### 2. $(aba)^m$ 膜系

用上段同样的方法, 给定 $\phi' = [(P+Q)\pi + \phi]$ , 代入单周期的特征矩阵中, 易证得: 当 $B$ 为奇数时,  $R[(P+Q)\pi + \phi] = R(\phi)$ , 即 $(P+Q)\pi$ 为 $R(\phi)$ 曲线的最小周期; 当 $B$ 为偶数时, 同样令 $\phi' = [(P+Q)\pi + \phi]$ , 它们的等效折射率代表式<sup>[4]</sup>, 可得到 $E' = (n_1^2 E)$ , 可知在通带区的 $R(\phi') \neq R(\phi)$ , 即 $(P+Q)\pi$ 不可能是 $R(\phi)$ 曲线的周期。

再以 $\phi'' = [2(P+Q)\pi + \phi]$ 进行试探, 利用特征矩阵可证 $R(\phi'') = R(\phi)$ . 此证: 当 $B$ 为偶数时,  $2(P+Q)\pi$ 是 $R(\phi)$ 曲线的最小周期。

根据(4)式可知, 不论 $B$ 为奇数还是偶数,  $R(\phi)$ 曲线的周期皆为 $(2A+B)\pi$ .

由上节可知, 反射带的抑制皆以 $(P+Q)\pi$ 为周期, 它与 $(pq)^m$ 膜系以及当 $B$ 为奇数的 $(aba)^m$ 膜系的 $R(\phi)$ 曲线周期一致; 唯有 $B$ 为偶数的 $(aba)^m$ 膜系的 $R(\phi)$ 曲线周期是反射带抑制周期的两倍, 如图1(b), 在 $[0, (2A+B)\pi]$ 区间内也存在对称性, 对称中心在 $(2A+B)\pi/2$ 处, 如图1(b)中点划线所示。

#### 四、高反带的宽度

根据高反带边界的定义<sup>[5]</sup>, 对我们所讨论的两种膜系都能方便地得到确定反射带边界的方程, 利用(1)式和(3)式, 可得到统一的方程表达式为  $\cos(P\delta)\cos(Q\delta) - (1/2)[(n_1/n_2) + (n_2/n_1)]\sin(P\delta)\sin(Q\delta) = \pm 1$ 。若令  $\rho = (n_1/n_2)$ , 并利用(2)式, 则简化为

$$(\rho+1)^2 \cos \phi - (\rho-1)^2 \cos\left(\frac{P-Q}{P+Q} \phi\right) = \pm 4\rho, \quad (6)$$

由(6)式方程可得到以下几个结论:

(1)  $\rho$  变为  $(1/\rho)$ , (6)式不变, 即两种材料互换, 反射带宽不变。

(2)  $P$ 、 $Q$  交换, (6)式不变, 即两种膜层的相对厚度互换, 不影响带宽。

(3) 已知高反带唯有在  $\phi = k\pi$  处才可能出现, 一般情况下, 高反带对  $k\pi$  是不对称。

对普遍情况, 很难给出对应边界点的  $\phi$  的解析表达式, 利用图解法, 易于求得  $\phi$  的数值解。令  $A = [4\rho/(1+\rho)^2]$ ,  $B = [(1-\rho)/(1+\rho)]^2$ ,  $C = |(\rho-Q)/(\rho+Q)|$ , (6)式简化为

$$\cos \phi \pm A = B \cos(C\phi), \quad (7)$$

现以  $\phi$  为横轴,  $y$  为纵轴, 作出以下三条曲线:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \cos \phi + A, \\ y_2 &= \cos \phi - A, \\ y_3 &= B \cos(C\phi), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$y_3$  与  $y_1$ 、 $y_2$  的交点便决定了高反带的边界, 当  $y_3$  与  $y_1$ 、 $y_2$  仅有切点时, 便是高反带被抑制的情况, 图解举例如图 2 所示, 横轴在开关处被切断, 从图 2 中还可看到高反带对  $\phi = k\pi$  是不对称的。

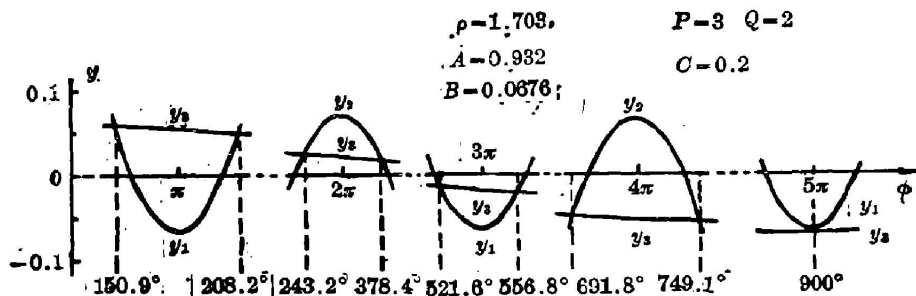


Fig. 2 An example of the graphic approach for determining band-width

由(8)式可知,  $|y_3|$  恒小于 1, 而  $A$  恒大于 0, 因此, 在  $\phi = k\pi$  附近, 当  $k$  为奇数,  $y_3$  只可能与  $y_1$  相交; 当  $k$  为偶数,  $y_3$  只可能与  $y_2$  相交, 因而(7)式可分别表达为

$$\left. \begin{aligned} \cos \phi + A &= B \cos(C\phi), \quad (k \text{ 为奇数}) \\ \cos \phi - A &= B \cos(C\phi), \quad (k \text{ 为偶数}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由图 2 还可看到, 在  $\phi = k\pi$  处, 只要  $y_2$  与  $y_1$  ( $k$  为奇数) 或  $y_3$  与  $y_2$  ( $k$  为偶数) 的距离较大, 则相应的交点就较远, 也即反射带宽较宽, 定义带宽判定值  $D$ ,

$$D = \begin{cases} |y_3 - y_1|_{\phi=k\pi}, & (k \text{ 为奇数}) \\ |y_3 - y_2|_{\phi=k\pi}, & (k \text{ 为偶数}) \end{cases}$$

利用(9)式可求得

$$D = \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^2 \left| 1 - \cos \left( \frac{2P}{P+Q} k\pi \right) \right|. \quad (10)$$

由(10)式可见, 当  $\cos[2Pk\pi/(P+Q)] = 1$ ,  $D = 0$ , 两曲线将在  $k\pi$  处相切, 反射带不出现; 当  $\cos[2Pk\pi/(P+Q)]$  越趋近  $-1$ ,  $D$  越大, 相应的带宽也就越宽, 根据  $D$  值可以方便地比较出对应不同的  $\rho$ 、 $P$ 、 $Q$  与  $k$  的反射带宽度的大小, 而不必求出具体带宽。

## 五、高反带的高度

一般来说, 不等厚周期膜系高反带的反射率计算要借助计算机, 我们在这里将用近似法求出如何对各级反射带的高度作出比较。

在这里作两点近似。由上节已知, 高反带一般情况下对  $\phi = k\pi$  是不对称, 即最大反射率不一定出现在  $\phi = k\pi$  处; 事实上, 它与最大反射率的偏差是很小的, 所以后面的讨论只针对  $\phi = k\pi$  处的反射率, 第二个近似是略去界面内的多次反射, 这虽然会使反射率计算产生较大误差, 但对各反射带射带有类似的误差, 在作判别时, 由于是相对比较, 误差将被抵消。

设入射介质为  $n_0$ , 出射介质为  $n_s$ ; 膜系上界面的反射系数为  $r_0$ , 下界面的反射系数为  $r_s$ , 介质  $n_1$  到介质  $n_2$  的反射系数为  $r_1$ , 介质  $n_2$  到介质  $n_1$  的反射系数为  $r_2$ ,  $r_2 = -r_1$ ; 合振幅反射系数为  $r$ , 能量反射率。

(1) 对  $(pq)^m$  膜系

膜层数为  $2m$ , 由叠加法易求得

$$R = r \cdot r^* \approx m^2 r_1^2 - [(m-1)(r_1 - r_0 - r_s)]^2 - 2m[(m-1)(r_1^2 - (r_0 + r_s)r_1) \cos[2Pk\pi/(P+Q)]]. \quad (11)$$

(2) 对  $(aba)^m$  膜系

膜层数为  $(2m+1)$ , 同样可求得

$$R \approx 2m^2 r_1^2 + (r_0 + r_s)^2 - 2m^2 r_1^2 \cos[2Pk\pi/(P+Q)]. \quad (12)$$

由(11)式、(12)式可见,  $R$  的大小除了取决于  $n_0$ 、 $n_1$ 、 $n_2$ 、 $n_s$  的选择与  $m$  的确定之外, 还取决于  $\cos[2Pk\pi/(P+Q)]$ 。由于它的系数为正值\*, 而此项却带负号, 可知当  $\cos[2Pk\pi/(P+Q)]$  趋于  $-1$  时,  $R$  趋于极大。把此结论与(10)式联系起来, 可得一个新的推论: 对  $(pq)^m$  与  $(aba)^m$  膜系, 尽管  $P$ 、 $Q$  不同(膜系结构有区别);  $k$  不同(反射带级次不同), 但只要它们具有相同的折射率排列(包括相同的周期数  $m$ ), 都可按  $\cos[2Pk\pi/(P+Q)]$  趋近  $-1$  的程度来比较反射带的宽度与高度, 较接近  $-1$  则反射带较宽且较高。

最后对两个膜系作分析:

1.  $(2HL2H)^m$  膜系,  $P=2A=4$ ,  $Q=B=1$

因此, 反射带抑制周期为  $5\pi$ , 反射曲线的周期也为  $5\pi$ , 在  $[0, 5\pi]$  区间内,  $2.5\pi$  为对称中心, 在此区间内, 有四个高反带, 分别为

\* 对  $(pq)^m$  膜系, 当  $m$  较大时也必为正值。

$$\cos[2P\pi/(P+Q)] = 0.309, \quad k=1, 4;$$

$$\cos[2P \cdot 2\pi/(P+Q)] = -0.809, \quad k=2, 3.$$

## 2. (3H2L3H)<sup>m</sup> 膜系 $P=A=3, Q=(B/2)=1$

因此,反射带抑制周期为  $4\pi$ ; 而反射曲线的周期为  $8\pi$ , 在  $[0, 8\pi]$  区间内,  $4\pi$  为对称中心, 在此区间内, 有六个高反带, 分别为

$$\cos[2P \cdot \pi/(P+Q)] = 0, \quad k=1, 7;$$

$$\cos[2P \cdot 2\pi/(P+Q)] = -1, \quad k=2, 6; \quad (\text{高反带 } \phi=k\pi \text{ 对称})$$

$$\cos[2P \cdot 3\pi/(P+Q)] = 0, \quad k=3, 5.$$

尽管上面分析的是两个膜系, 但只要它们的折射率排列相同, 它们反射带的宽度与高度仍然可进行比较。按由大至小的排列, 依次为  $k_{2,6}, k_{3,3}, k_{1,7}$  与  $k_{5,5}$ , 最后为  $k_{1,4}$ 。

由上述分析可见, 利用本文的结论, 可以方便地对一给定膜系的特性曲线建立起全面的了解。

### 参 考 文 献

- [1] Z. Knittl; *«Optics of Thin Films»*, (John Wiley & Sons, Czechoslovakia, 1976).
- [2] L. I. Epstein; *J. O. S. A.*, 1955, **45**, No. 5 (May), 360.
- [3] A. Thelen; *J. O. S. A.*, 1963, **53**, No. 11 (Nov), 1266.
- [4] H. A. 麦克劳德; *«光学薄膜技术»*, (国防工业出版社 1974), 197.
- [5] *ibid*, 160.

## A comprehensive investigation on characteristics of typical periodic film systems consisting of two thin-film materials

HE ZHAOLIN AND CHEN HUIGUANG  
(Xing Tian Optical Instrument Institute, Guiyang)

(Received 5 February 1986)

### Abstract

A comprehensive investigation of the characteristics of two kinds of periodic film system  $(pq)^m$  and  $(aba)^m$  consisting of two layers with difference thicknesses is presented in this paper. The location of high reflectance zones, the periodicity and symmetry of reflectance curves, and the width and height of high reflectance zones are discussed. In addition, a graphical approach to determine the width of reflectance zones is suggested.