

对称膜系的复数等效折射率

吴启宏
(浙江大学光仪系)

提 要

首先把对称周期的等效折射率推广到复数范围, 然后利用复变函数公式来计算截止带中的反射率。文中用导纳轨迹图来说明复数等效折射率的合理性和完整性。文中还给出了反射率随等效折射率变化的曲线图, 利用它可以方便地查出反射率值。

利用等效折射率概念可以方便地分析对称周期膜系在通带内纹波的大小, 并设法尽量减小纹波的幅度。但是在截止带内, 由于等效折射率变为虚数, 通常就不要采用这个概念进行分析和计算。

本文首先把等效折射率推广到复数范围, 然后用它来计算对称膜系在截止带内的反射率, 并给出一张利用等效折射率和等效位相厚度两个参数来直接估计截止带反射率的图表。

对称膜系的等效折射率是埃普斯坦首先提出的。他指出: 对于形成如(PQP)的对称膜系, 在数学上可以等效于一层单层膜。这个对称膜系的特征矩阵为

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta_p & (i \sin \delta_p / n_p) \\ i n_p \sin \delta_p & \cos \delta_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta_q & (i \sin \delta_q / n_q) \\ i n_q \sin \delta_q & \cos \delta_q \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} \cos \delta_p & (i \sin \delta_p / n_p) \\ i n_p \sin \delta_p & \cos \delta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Gamma & (i \sin \Gamma / E) \\ i E \sin \Gamma & \cos \Gamma \end{bmatrix}, \quad (1)$$

上式中的 E 和 Γ 就是该等效单层膜的等效折射率和等效位相。 E 和 Γ 可以用下列公式计算

$$E = \left(\frac{n_p^2 \{ \sin 2\delta_p \cos \delta_q + (1/2) [(n_p/n_q) + (n_q/n_p)] \cos 2\delta_p \sin \delta_q \}^{1/2} - (1/2) [(n_p/n_q) - (n_q/n_p)] \sin \delta_q}{\sin 2\delta_p \cos \delta_q + (1/2) [(n_p/n_q) + (n_q/n_p)] \cos 2\delta_p \sin \delta_q + (1/2) [n_p/n_q - (n_q/n_p)] \sin \delta_q} \right), \quad (2)$$

$$\Gamma = \cos^{-1} M_{11} = \cos^{-1} \{ \cos 2\delta_p \cos \delta_q - (1/2) [(n_q/n_p) + (n_p/n_q)] \sin 2\delta_p \sin \delta_q \}. \quad (3)$$

对于形式如(PQP)^s的对称膜系则有

$$E_{(PQP)^s} = E, \quad \Gamma_{(PQP)^s} = S\Gamma, \quad (4)$$

即周期性对称膜系的等效折射率与单个周期的相同, 而等效位相则是单个周期的 S 倍。在截止带内, $|\cos \Gamma| > 1$ 和 $E^2 < 0$, 这时 E 和 Γ 均不再是实数。由于人们习惯于介质膜料的折射率均是实数这一观念, 故在截止带内就不再利用等效折射率这个概念。

其实等效折射率和等效位相仅是一种数学上的等效概念, 可以不受实数范围的约束。事实上, 将上述公式中的 E 视作光学导纳意义更确切, 而导纳值一般是复数。所以表现为复数值的等效折射率和等效位相是可以接受的。

在截止带内, 等效折射率是纯虚数, 计算比较简单。等效位相 Γ 则可以按照下列复变函数公式^[9]进行计算得到。单个周期的对称膜系的等效位相为

$$\Gamma = \arccos M_{11} = -i \ln(M_{11} + \sqrt{M_{11}^2 - 1}), \quad (5)$$

则由 S 个周期构成的对称膜系的等效位相为

$$S \cdot \Gamma = -iS \ln(M_{11} + \sqrt{M_{11}^2 - 1}). \quad (6)$$

于是通过计算就可以得到周期性对称膜系和基底的组合导纳 Y

$$Y = \frac{n_2 \cos S\Gamma + iE \sin S\Gamma}{\cos S\Gamma + i(n_2/E) \sin S\Gamma}, \quad (7)$$

其中 n_2 是基底的导纳。最后由组合导纳 Y 求得膜系的反射率。

在截止带的中心处 $g=1$, 规整膜系 $(H/2)L(H/2)$ 或 $(L/2)H(T/2)$ 的等效折射率和等效位相有简洁的解析表达式。这时, $\delta_p = (\pi/4)$, $\delta_q = (\pi/2)$, 等效折射率为

$$E = in_p, \quad (8)$$

令 $w = (n_p/n_q)$, 等效位相为

$$\begin{aligned} \Gamma &= -i \ln(M_{11} + \sqrt{M_{11}^2 - 1}) \\ &= -i \ln \left[-\frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(w^2 + 2 + \frac{1}{w^2} \right) - 1} \right] \\ &= \pm i \ln w + \pi. \quad (k=0 \text{ 的主值}) \end{aligned} \quad (9)$$

为了与矩阵法的计算结果比较, Γ 取第二个解, 即 $\Gamma = -i \ln w + \pi$ 。对于由 S 个周期构成的对称膜系, 等效位相 $S\Gamma$ 则为

$$-iS \ln w + S\pi, \quad (10)$$

对称膜系的正、余弦值分别为

$$\left. \begin{aligned} \cos S\Gamma &= (1/2) [(-w)^S + (-1/w)^S], \\ \sin S\Gamma &= (1/2i) [(-w)^S - (-1/w)^S]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

薄膜的特征矩阵为

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \cos S\Gamma & (i \sin S\Gamma/E) \\ iE \sin S\Gamma & \cos S\Gamma \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (-n_p/n_q)^S + (-n_q/n_p)^S & (-i/n_p) [(-n_p/n_q)^S - (-n_q/n_p)^S] \\ in_p [(-n_p/n_q)^S - (-n_q/n_p)^S] & (-n_p/n_q)^S + (-n_q/n_p)^S \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

(12)式与文献[1]中利用矩阵法求得的表达式完全一致。两种方法相比, 本文推导的结果中各项的含义要明确得多。

常用的几种高低折射率组成的对称膜系的等效折射率和等效位相在截止带内随波数的变化分别列于图 1、2、3。

从所周知, 理想金属薄膜的复折射率为 $N = -ik$, 其位相厚度 $\delta = (2\pi/\lambda)Nd$ 也是虚数。在截止带中, 对称膜系的等效折射率为纯虚数, 等效位相是复数, 其中实部值为 $k\pi$, 对于光学特性的计算没有贡献, 起作用的仍是虚部。所以这时的对称膜系可以看作一层消光系数随波数渐变的理想金属薄膜。这种理想金属膜的消光系数越大, 反射率越高。所以对称膜系的反射率变化主要受等效折射率的影响, 如图 4 所示。对 $(H/2)L(H/2)$ 膜系等效折射率和反射率均随波数增大而单调增大。当膜系中的周期数增加时 ($S=5$) 等效位相成倍增加, 特别是截止带中心处增加最快, 于是反射率转为主要受等效位相影响。由单调曲线变为

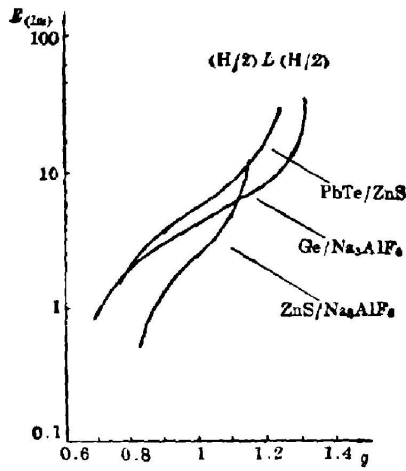


Fig. 1 Equivalent index of $(H/2)L(H/2)$

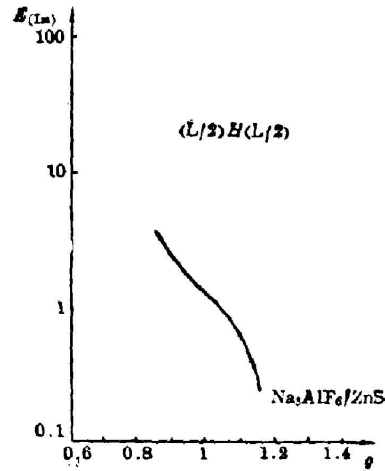


Fig. 2 Equivalent index of $(L/2)H(L/2)$

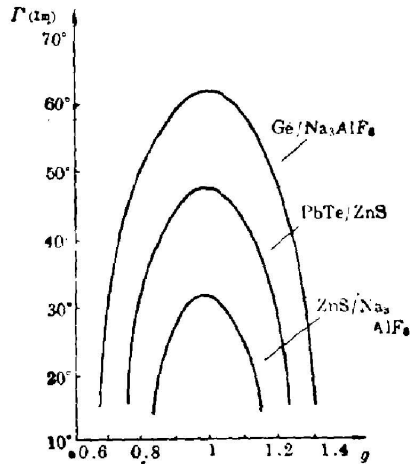


Fig. 3 Equivalent phase thickness of $(H/2)L(H/2)$ and $(L/2)H(L/2)$

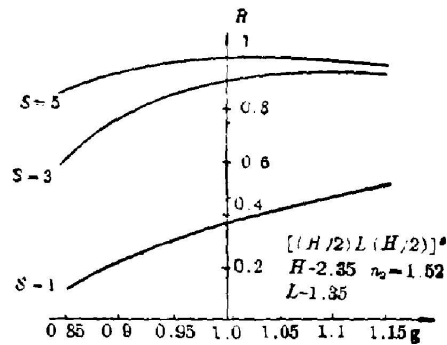


Fig. 4 Reflectance as a function of the number of symmetrical periods in the stop band

在截止带中心具有峰值的曲线。

在截止带中引进复数等效折射率后，便能在整个波段上用作分析对称膜系的反射率特性。结合导纳圆技术，我们可以更加直观地看到，随着波数增加，等效折射率从实数变成虚数，又从虚数变成实数。而膜系的反射率由随周期数增加振荡变为单调增加，再变化为振荡状况。

在通带内， E 和 Γ 是实数，其导纳圆与单层透明薄膜的导纳圆相仿。 $E > n_2$ 时，轨迹在 $(n_2, 0)$ 的右边；反之则在左边。图 5 中用虚线表示。周期数不同时，导纳处在圆周的不同部位，所以反射率在振荡。

在截止带内， E 是纯虚数，记为 ie ， Γ 是复数，与前述一样记为 $S\pi - iS\beta$ 。其中 $\beta > 0$ 。导纳圆轨迹可以推导如下

$$\sin(S\pi - iS\beta) = (-1)^S i \operatorname{sh} S\beta, \quad \cos(S\pi - iS\beta) = (-1)^S i \operatorname{ch} S\beta \quad (13)$$

膜系和基底的组合导纳 Y 为

$$Y = x + iy = \frac{ie \operatorname{sh} S\beta + n_2 \operatorname{ch} S\beta}{\operatorname{ch} S\beta - i(n_2/e) \operatorname{sh} S\beta}, \quad (14)$$

其中 x, y 为导纳的实部和虚部。整理得到导纳圆方程是

$$x^2 + y^2 + [(e^2 - n_2^2)/n_2^2]x = e^2. \quad (15)$$

该方程与复折射率为 $-ik$, 位相为 $-i\beta$ 的理想金属膜的方程完全一样, 不同的是周期数 S 增加时, 对称膜系的轨迹从 $(n_2, 0)$ 出发, 沿逆时针方向, 趋于虚轴上的 ie 点。在图 5 中用实线表示这段轨迹。由于它比较短, 不足 $(\pi/2)$ 弧度, 与各等反射率图(图中未画出)只相交一次, 所以当周期数增加时, 反射率单调地增加。

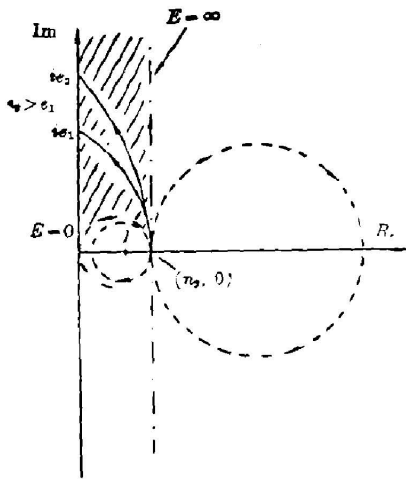


Fig. 5 Admittance locus of symmetrical periods

在截止带的一侧边缘, $e=0$ 导纳圆成为经过原点和 $(n_2, 0)$ 点的圆(点划线)。它是截止带中半径最小的导纳圆, 也可以看作是位于原点和 $(n_2, 0)$ 点之间的通带导纳圆簇中半径最大的一个。

在截止带的另一侧边缘 $e \rightarrow \infty$, 导纳圆变成经过 $(n_2, 0)$ 点, 并平行于虚轴的直线(点划线)。它可以看作是截止带中半径最大的导纳圆, 是一种临界的状态。因为在通带中, 当 $E \rightarrow \infty$ 时, 导纳圆半径逐渐增大, 最后也蜕变成这条直线。

综上所述, 截止带的导纳圆簇正好填补在表示通带的两簇导纳圆之间的中间区域(斜线部分)。这说明等效折射率概念推广到复数后, 形成一个自给的完善的分析手段。

从薄膜设计的角度考虑, 截止带中最主要的参数是反射率的大小。设计周期性对称膜系时, 以往在处理好通带的纹波后, 对截止带的特性, 都采用特征矩阵的算法校验。复数等效折射率的引进, 使得我们能利用等效折射率和等效位相两个参数, 借助于图表来直接估算反射率的数值。作为例子, 在图 6 中我们作了在 $K_0(n_2=1.52)$ 基底上反射率随 E 和 Γ 变化的曲线。使用时, 首先查出该波数下的 E 和 Γ , 然后从图 6 中找出反射率。设膜系为 $\text{ZnS}/\text{Na}_3\text{AlF}_6$, 波数为 0.9, 查图 1, 3 得到 $E \approx 1.4$, $\Gamma \approx 26^\circ$, 当 S 分别为 5, 7, 9 时, 从图 6 中得到反射率为 94%, 99.2%, 99.9%。用特征矩阵计算的结果分别为 96%, 99.3%, 99.89%。由于反射率是对数坐标, 故在反射率较高时, 误差很小。假如截止程度不够, 则可根据 E 和所要求的反射率 R 从图 6 中找出应有的 Γ' 值, 该 Γ' 和单个周期的 Γ 值的比值即是所需要的周期数。

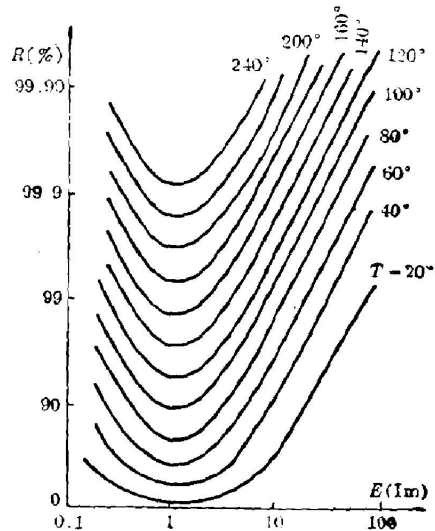


Fig. 6 Reflectance vs. equivalent index E and phase thickness Γ

参 考 文 献

- [1] H. A. 麦克劳德;《光学薄膜技术》, (国防工业出版社, 北京, 1974), 208。
[2] 数学手册编写组;《数学手册》, (人民教育出版社, 北京, 1979), 509。

Complex equivalent index of symmetrical periods

WU QIHONG

(Department of Optical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou)

(Received 17 December 1985; revised 16 March 1986)

Abstract

In this paper, the equivalent index of symmetrical periods is extended to the complex-number fields, then the reflectance in the stop band is calculated with the aid of the formulas of complex function. The admittance locus is used to explain the reasonableness and completeness of the complex equivalent index. A diagram of reflectance vs. equivalent index is given, by which the reflectance in the stop band can be obtained easily.