

条形介质波导导模的近似分析*

乔力 余守宪

(北方交通大学应用数理系)

提 要

本文提出适用于计算各类条形介质波导导模传播特性与场分布的微扰方法、变分方法。本文导出的各表达式形式较简单,计算结果较其它近似方法准确,与精确的数值计算符合较好,便于应用。

一、引 言

条形介质波导是介质光波导的主要组成部分,在实际集成光路中具有广泛的应用。

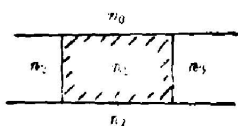


Fig. 1 Cross-section of a strip waveguide

为便于阐述,本文所分析的条形介质波导可概括为图1所示的波导结构:(a)当 $n_0 = n_3 = n_2$ 时,为埋入型;(b)当 $n_0 = n_2$ 时,为镶入型;(c)当 $n_3 = n_0$ 时,为凸条型。对于脊型波导和条载型波导的分析与此完全类似。

条形介质波导的分析远比平面波导复杂,是较复杂的边值问题。多年来人们提出了若干种分析方法^[1~10]。精确计算机解法由于计算量大,难以运用。在近似解析法中,Marcatili^[3]首创的分析法适用于各种条形波导的远截止状态,但在近截止范围内与精确结果相差较大。应用较广的有效折射率法^[4,10],缺少严格的理论依据,但它在近截止范围内比Marcatili方法精确。Payne^[5]对埋入型波导进行了理论分析,得到同Kumer等人^[6]的微扰法基本一致的结果,其精确度比有效折射率法有所提高,并在理论上指出了有效折射率法的缺陷,但仍然不能令人满意。

本文所提出的近似解法的优点是,表达式较简单,计算简便(可借助袖珍计算机进行),精确度比有效折射率法提高,结果与精确数值结果符合较好。我们将以埋入型波导为例,介绍一种求解本征值方程的近似分离变量法,利用变分表达式,导出导模色散关系和场分布的表达式,然后推广到一般的条形波导结构。

二、理 论

1. 微扰分析

考虑如图2所示矩形芯区边长为 $2a$ 、 $2b$ 的埋入型波导。用 $\Psi(x, y, z, t)$ 表示横向电场分量 E_x 或 E_y 。设

收稿日期:1986年1月7日;收到修改稿日期:1986年4月1日

* 本文的部分内容曾在“中日光纤科学和电磁场理论双边会议”(1985年5月,北京)和“全国第三届集成光学会议”(1985年9月,上海)上宣讲。

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y) \exp[i(\beta z - \omega t)] \quad (1)$$

定义归一化宽度 V_1 、高度 V_2 和归一化传播常数 P^2 如下

$$V_1 = ak_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2},$$

$$V_2 = bk_0^2(n_1^2 - n_2^2)^{1/2},$$

$$P^2 = \frac{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}{(n_1^2 - n_2^2) k_0^2},$$

其中 $k_0 = (\omega/c)$, c 是真空中光速, β 是波导导模的传播常数。将坐标尺度扩大到原来的 $k_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$ 倍, 于是芯区边长分别是 $2V_1$ 、 $2V_2$ 。由亥姆霍兹(Helmholtz)方程得到本征值方程

$$H\psi(x, y) = P^2\psi(x, y), \quad (2)$$

其中算符 H 定义为

$$H = H_0 + H',$$

$$H_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + [1 - h_1(x) - h_2(y)],$$

$$H' = h_1(x) \cdot h_2(y),$$

$$h_1(x) = \begin{cases} 0, & |x| < V_1, \\ 1, & |x| > V_1, \end{cases} \quad h_2(y) = \begin{cases} 0, & |y| < V_2, \\ 1, & |y| > V_2. \end{cases} \quad (3)$$

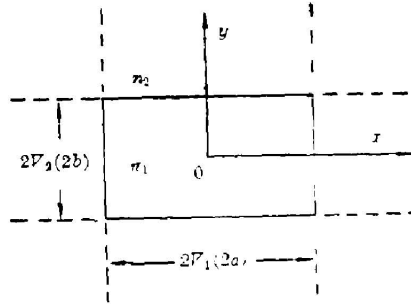


Fig. 2 Cross-section of a buried strip

标量近似要求 $\psi(x, y)$ 和 $\nabla\psi(x, y)$ 在 $x = \pm V_1$, $y = \pm V_2$ 处连续, 构成了埋入型波导的边值问题。

由于算符 H 中含有交叉项 H' , 方程(2)不能进行分离变量。注意到, 交叉项 H' 仅在角区 ($|x| > V_1$ 且 $|y| > V_2$) 不为零, 而在非近截止状态, 角区的场很弱, 将 H' 看作微扰项, 用微扰法计入交叉项的影响对零级近似结果进行修正。

设 P^2 为零级本征值, $\psi_0(x, y)$ 为零级近似本征函数, 则有

$$H_0\psi_0(x, y) = P_0^2\psi_0(x, y), \quad (4)$$

设

$$\psi_0(x, y) = X_0(x)Y_0(y), \quad (5)$$

代入方程(4)式, 并注意导模条件 $P^2 < 1$, 即得 E_{mn} 模的零级近似解

$$X_0(x) = \left(\frac{2P_1}{V_1 P_1 + 1}\right)^{1/2} \begin{cases} \cos(\alpha_1 x - \delta_1), & |x| \leq V_1 \\ \cos(\alpha_1 V_1 - \delta_1) \exp[-P_1(|x| - V_1)], & |x| > V_1 \end{cases} \quad (6)$$

$$Y_0(y) = \left(\frac{2P_2}{V_2 P_2 + 1}\right)^{1/2} \begin{cases} \cos(\alpha_2 y - \delta_2), & |y| \leq V_2 \\ \cos(\alpha_2 V_2 - \delta_2) \exp[-P_2(|y| - V_2)], & |y| > V_2 \end{cases} \quad (7)$$

$$P_0^2 = P_1^2 + P_2^2 - 1, \quad (8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 &= 1 - P_1^2, & \alpha_2^2 &= 1 - P_2^2; \\ \delta_1 &= (m-1)\pi/2, & \delta_2 &= (n-1)\pi/2; \end{aligned} \right\} (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (9)$$

本征函数的导数在 $|x| = V_1$ 、 $|y| = V_2$ 处的连续性给出确定 P_1 、 P_2 的波导本征方程为

$$\alpha_1 \tan \alpha_1 V_1 = P_1, \quad (10)$$

$$\alpha_2 \tan \alpha_2 V_2 = P_2. \quad (11)$$

色散关系(即 P^2 与 V_1 的关系)由(8)~(11)式给出, 显然它正是 Marcatili 解, 由 x 、 y 两个

垂直方向上的平板波与本征解构成, 平板波导的芯区宽度分别是 $2V_1$ 、 $2V_2$ (如图 3 所示)。

我们对上述零级近似解进行修正, 以获得一级近似。为此, 利用本征值方程(2)的变分表达式

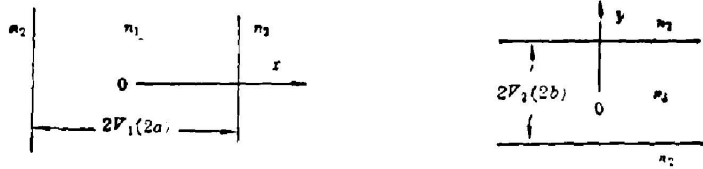


Fig. 3 Two mutually perpendicular equivalent slab waveguides

$$P^2 = \frac{\iint \psi H \psi dx dy}{\iint \psi^2 dx dy} \quad (12)$$

令 ψ 取零级近似解 ψ_0 , 代入上式后, 分区域积分, 并利用本征方程(10)、(11)对积分结果进行化简, 即得本征值 P^2 的一级近似表达式

$$P^2 = P_0^2 + \frac{(1 - P_1^2)(1 - P_2^2)}{(V_1 P_1 + 1)(V_2 P_2 + 1)} \quad (13)$$

(13)式右边第一项是 Marcatili 解, 由(8)式给出 $P_0^2 = 1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2$, 第二项是一级修正项, 该项恰好等于 ψ_0^2 在角区上的积分与 ψ_0^2 在全平面上积分之比, 亦即角区场能的零级近似值与总场能零级近似值之比。这一结果与 Kumer 等人^[6]的微扰论方法精确度一致, 但推导过程和方法均不相同, 最终表达式简明易用, 也便于推广到非对称波导结构。公式(3)的数值结果与其它几种方法的比较列于后面的表 1、表 2 中。

我们曾借用量子力学中微扰论的有关公式^[12], 对本征值的二级修正和本征函数的一级修正进行过计算。如果仅考虑相邻模式之间的影响, 计算可大为简化。计算结果表明, 本征值的一级修正可给出较 Marcatili 解精确的场分布, 本征值的二级修正是非常小的, 一般可忽略。

2. 变分分析

Sharma 等人^[11]给出用标量变分分析计算埋入型波导基模的方法, 得到了与 Goell 精确解相符合的结果。根据变分有关理论(例如参看文献[12]), 本文采用的尝试函数, 它对应于 Marcatili 解的场分布, 因而近似构成正交系, 所以这一变分方法对高阶模式同样有效, 且可以分析各种条形介质波导的导模。为了提高精确度, 选取恰当的尝试函数 $\psi_t(x, y)$, 代入下列变分表达式

$$P^2 = \frac{\iint \psi_t H \psi_t dx dy}{\iint \psi_t^2 dx dy} \quad (14)$$

则 P^2 的极值即为本征值的近似值, 相应的尝试函数为本征函数的近似解。

本文选取的尝试函数, 仿照零级近似解的形式

$$\psi_t(x, y) = X_t(x)Y_t(y), \quad (15)$$

$$X_t(x) = \begin{cases} \cos(\alpha_1 x - \delta_1), & |x| \leq V_1 \\ \cos(\alpha_1 V_1 - \delta_1) \exp[-q_1(|x| - V_1)], & |x| > V_1 \end{cases} \quad (16)$$

$$Y_1(y) = \begin{cases} \cos(\alpha_2 y - \delta_2), & |y| \leq V_2 \\ \cos(\alpha_2 V_2 - \delta_2) \exp[-q_2(|y| - V_2)], & |y| > V_2 \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha_1 \tan(\alpha_1 V_1 - \delta_1), \\ q_2 &= \alpha_2 \tan(\alpha_2 V_2 - \delta_2), \end{aligned}$$

α_1 、 α_2 是两个参变量。 $\psi_t(x, y)$ 及 $\nabla\psi_t(x, y)$ 在 $|x|=V_1$ 、 $|y|=V_2$ 处连续。上述尝试函数满足边界条件,所假定的场型接近实际,可以预期得到满意的结果。

将(15)式代入(14)式,分区域积分后,得

$$P^2 = P^{*2} [(1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2) A_1 A_2 + (q_2^2 - \alpha_1^2) A_1 B_2 + (q_1^2 - \alpha_2^2) A_2 B_1 + (q_1^2 + q_2^2) B_1 B_2], \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} P^{*2} &= \frac{4q_1 q_2}{(V_1 q_1 - 1)(V_2 q_2 + 1)}, \\ A_1 &= \int_0^{V_1} X_t(x) dx = \frac{V_1}{2} + \frac{\sin(2\alpha_1 V_1 - 2\delta_1)}{4\alpha_1}, \\ A_2 &= \int_0^{V_2} Y_t(y) dy = \frac{V_2}{2} + \frac{\sin(2\alpha_2 V_2 - 2\delta_2)}{4\alpha_2}, \\ B_1 &= \int_{V_1}^{\infty} X_t^2(x) dx = \frac{\cos^2(\alpha_1 V_1 - \delta_1)}{2q_1}, \\ B_2 &= \int_{V_2}^{\infty} Y_t^2(y) dy = \frac{\cos^2(\alpha_2 V_2 - \delta_2)}{2q_2}. \end{aligned}$$

我们用计算机方法求出 P^2 为极值时的 α_1 、 α_2 值(可采用标准程序求 $(\partial P^2/\partial \alpha_1) = 0$ 、 $(\partial P^2/\partial \alpha_2) = 0$ 的联立方程组的实根,如负梯度法^[3]),然后代入(16)、(17)、(18)式,即可求出相应于给定 V_1 值(及 $(b/a) = (V_2/V_1)$ 的值)的场分布及归一化频率。对几种模式的计算

Table 1 P^2 for E_{11} mode of buried strip ($b/a=0.5$)

P^2	V_1													
	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
Marcattili			0.011	0.105	0.189	0.261	0.325	0.382	0.432	0.476	0.637	0.784	0.798	0.840
effective index	0.061	0.154	0.155	0.210	0.205	0.218	0.308	0.414	0.456	0.495	0.648	0.737	0.799	0.840
perturbation			0.077	0.151	0.220	0.284	0.342	0.394	0.440	0.483	0.639	0.735	0.798	0.840
variational	0.063	0.047	0.104	0.164	0.229	0.289	0.345	0.396	0.441	0.483	0.639	0.735	0.798	0.840
Goell	0.020	0.060	0.120	0.180	0.240	0.300	0.350	0.405	0.450	0.495	0.670	0.750	0.790	0.840

Table 2 P^2 for E_{21} mode of buried strip ($b/a=0.5$)

P^2	V_1													
	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	6.0	7.0
Marcattili		0.051	0.125	0.191	0.250	0.304	0.352	0.396	0.435	0.471	0.503	0.533	0.649	0.726
effective index	0.097	0.148	0.200	0.249	0.297	0.341	0.382	0.420	0.455	0.488	0.517	0.545	0.654	0.729
perturbation	0.014	0.064	0.150	0.210	0.265	0.315	0.361	0.402	0.441	0.476	0.507	0.536	0.650	0.727
variational	0.031	0.094	0.156	0.214	0.268	0.317	0.362	0.404	0.441	0.476	0.507	0.536	0.650	0.727
Goell	0.040	0.090	0.160	0.210	0.260	0.310	0.360	0.410	0.450	0.490	0.530	0.560	0.650	0.720

结果列于表 1、表 2、表 3, 表中同时列出 Marcatili 法, 有效折射率法、微扰法及 Goell 法的相应数值。由表可见, 变分法的精确度较其它近似方法有显著提高, 与数值分析结果一致。

Table 3 Field distribution for E_{11} mode of buried strip ($b/a=0.5, V_1=\pi$)

$\psi(x, 0)/\psi(0, 0)$	x								
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
Marcatili	1.00	0.982	0.930	0.844	0.729	0.588	0.426	0.270	0.176
variational	1.00	0.983	0.934	0.853	0.744	0.609	0.455	0.304	0.202

三、讨 论

上述微扰分析和变分分析方法很容易推广到一般的条形介质波导(图 1(d))。只要将其算符相应改变为

$$H = H_0 + H', \quad (19)$$

$$H_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + [1 - h_1(x) - h_2(y) - \Delta_3^2 h_1(x) - \Delta_0^2 h_2(y)], \quad (20)$$

$$H' = (1 + \Delta_3^2) h_1(x) h_2(y), \quad (21)$$

其中 $h_1(x)$ 、 $h_2(y)$ 与前面已有定义相同, $h_3(y)$ 的定义为

$$h_3(y) = \begin{cases} 0, & y > V_2 \\ 1, & y < V_2 \end{cases} \quad (22)$$

$$\Delta_0^2 = \frac{n_2^2 - n_0^2}{n_1^2 - n_2^2}, \quad \Delta_3^2 = \frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}$$

同理可得一级近似表达式为

$$P^2 = P_0^2 + \frac{(1 + \Delta_3^2)(I_2 + I_3)J_2}{(I_1 + I_2 + I_3)(J_1 + J_2)}, \quad (23)$$

其中 I_1 、 I_2 、 I_3 、 J_1 、 J_2 是场函数在不同区间上的积分, 边界条件给出关系式

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \tan(\alpha_1 V_1 - \delta_1) &= \gamma_1, \\ \alpha_2 \tan(\alpha_2 V_2 - \alpha_2 y_0 - \delta_2) &= \gamma_2, \\ \alpha_2 \tan(\alpha_2 V_2 + \alpha_2 y_0 + \delta_2) &= P_2, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中 y_0 是因波导沿 y 方向的非对称而引入的量。

$$\alpha_1^2 = 1 - P_1^2, \quad \alpha_2^2 = 1 - P_2^2, \quad \gamma_1^2 = P_1^2 + \Delta_3^2, \quad \gamma_2^2 = P_2^2 + \Delta_0^2$$

变分表达式可以写成

$$P^2 = P^{*2} [(1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2) A_1 B_1 + (\gamma_2^2 - \alpha_1^2 - \Delta_0^2) A_2 B_1 + (P_2^2 - \alpha_1^2) A_3 B_1 + (P_1^2 - \alpha_2^2 - \Delta_0^2) A_1 B_2 + (P_1^2 + \gamma_2^2 - \Delta_0^2) A_2 B_2 + (P_1^2 + P_2^2) A_3 B_2], \quad (25)$$

其中 A_1 、 A_2 、 A_3 和 B_1 、 B_2 是尝试函数在不同区间上的积分, 这些积分易计算且结果简单。 α_1 、 α_2 和 y_0 是参变量, 求(25)式的极值即得归一化传播常数 P^2 的近似解。

对于嵌入型、凸条形两种非对称波导, 用(23)式和(25)式计算出的一级近似和变分结果都比 Marcatili 解精确, 与有限元结果符合甚好, 因为篇幅有限, 具体的图表不再在此例举。

仿此, 还可计算矩形截面双沟道定向耦合器的耦合特性。

参 考 文 献

- [1] J. E. Goell; *Bell Syst. Tech. J.*, 1969, **48**, No. 7 (Sep), 2133.
- [2] C. Yeh, K. Ha, S. B. Dong, W. P. Brown; *Applied Optics*, 1979, **18**, No. 10 (May), 1490.
- [3] E. A. J. Marcattili; *Bell Syst. Tech. J.*, 1969, **48**, No. 7 (Sep), 2071.
- [4] R. M. Knox, P. P. Toullos, «*Proceedings of the MRI Symposium on Submillimeter Waves*», (Polytechnic Press, Brooklyn, Mar., 1970), 497.
- [5] F. P. Payne; *Optical and Quantum Electronics*, 1982, **14**, No. 6 (Nov), 525.
- [6] A. Kumar, K. Thyagarajan, A. K. Ghatak; *Optics Letters*, 1983, **8**, No. 1 (Jan), 63.
- [7] S. Akiba, H. A. Haus; *Applied Optics*, 1982, **21**, No. 5 (Mar), 804.
- [8] V. A. Karpenko, Y. D. Stolyarov, V. F. Kholomeyev; *Radio Eng. Elect. Phys.*, 1980, **25**, No. 1 (Jan), 36.
- [9] S. T. Peng, A. A. Oliner; *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, 1981, **29**, No. 9 (Sep), 843.
- [10] H. Furuta, H. Noda, A. Ihaya; *Applied Optics*, 1974, **13**, No. 2 (Feb), 322.
- [11] A. Sharma, P. K. Mishra, A. K. Ghatak; «*Proceedings of Second European Conference on Integrated Optics*», (IEE, London and New York, 1983), 9.
- [12] L. I. Schiff; «*Quantum Mechanics*», (McGraw-Hill Book Company, New York, 3rd Edition, 1968).
- [13] 刘德贵等; «FORTRAN 算法汇编» 第一分册, (国防工业出版社, 1980年3月), 364.

Approximate analysis of guided modes in strip waveguides

QIAO LI AND SHE SHOUXIAN

(Department of Applied Mathematics and Physics, Northern Jiaotong University, Beijing)

(Received 7 January 1986; revised 1 April 1986)

Abstract

In this paper we present the perturbation method and variational method used in evaluating propagation constants and field distributions of guided modes in strip waveguides. The formulas are simple in form and easy to apply. The results are more accurate than those obtained by using other approximate methods and agree well with exact computer results.