

计算全息术中的空间域滤波*

陆 达 郭敏贤 金国藩
(清华大学精密仪器系,北京)

提 要

在计算全息技术中,降低载频有着重要的意义。本文提出了一种适用于含二次项波面的空间域高轴滤波方法。在某些情况下,载频可降至一般频率域滤波的1/3左右,文后给出了两例实验结果。

一、引 言

自1966年Lohmann和Brown提出用计算机绘制全息图的方法以来^[1],计算全息技术有了很大的发展,在许多方面已得到了成功的应用。用计算机绘制全息图,原则上可以得到任意波面,但由于计算机容量及绘图密度等因素的限制,使得它只适于刻划空间带宽积较小的波面,它的灵活性好的优点只能在很小的范围内得以发挥。因此,降低计算机全息图的总抽样数对扩大应用范围有着重要的意义。

计算全息图通常由黑白的二值图形组成,存在着高阶衍射,因此在使用中必须做空间滤波处理。为使所需级组与其它级组分离,计算全息图中要引入一定的载波频率,显然,载频越低,则全息图的总抽样数也越少。

通常的滤波操作均在频率域进行。典型的装置为 $4f$ 系统,滤波面是第一个傅里叶透镜的后焦面。在频域滤波中,所需要的线性载波频率为:

$$f_c \geq 1.5B_s, \quad (1)$$

其中, f_c 为载频; B_s 是再现波面的频带宽度。频域滤波是一种通用的方法,适用于各种类型的波面。但在许多情况下,再现波面均含二次项位相因子,因此我们提出了一种适用于这种情况的空间域滤波的方法,以利于降低载频。

二、空间域滤波

在一般情况下,载频均在一维方向上选取,因此在对滤波过程的讨论中仅讨论一维函数,设欲再现波面的位相函数为 $\varphi(x)$,则可将其分解为一个二次项与其它项迭加的形式:

$$\varphi(x) = \varphi_a(x) + \varphi_b(x), \quad (2)$$

其中, φ_a 是二次项,它的焦距记作 f_a ; φ_b 为其它项,计算全息图所画的二值图形函数 $H(x)$ 应包含 $\varphi(x)$ 的各次谐波,记作**:

收稿日期:1984年11月5日;收到修改稿日期:1985年5月24日

* 本文的部分工作曾得到中国科学院科学基金的资助。

** 为今后的讨论统一起见,令 $i=1$ 的级组是我们所需要的。

$$H(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi^{(i)}(x). \quad (3)$$

1. 同轴像面滤波

1972年, Y. Ichioka 和 Lohmann 曾提出过同轴像面滤波的方法^[2]。在这种方法中, 不需要线性载频, 因此计算全息图的总抽样数很低, 仅刻划 $\varphi(x)$ 本身就够了, 这种滤波方式显然是不够完全的。我们定义一个函数来描述这种不完全性:

$$Q \triangleq \sum_{i=1}^l M_i W^{(i)} / W^{(0)}, \quad (4)$$

其中 M_i 表示第 i 级衍射的相对能量; $W^{(i)}$ 为第 i 级在滤波面上的空间宽度。显然 Q 越小, 则滤波越完全, 定义 $Q=0$ 为完全滤波。

2. 离轴像面滤波

为了克服同轴滤波的不完全性, 我们提出了一种离轴像面滤波(如图1所示)的方法。基本

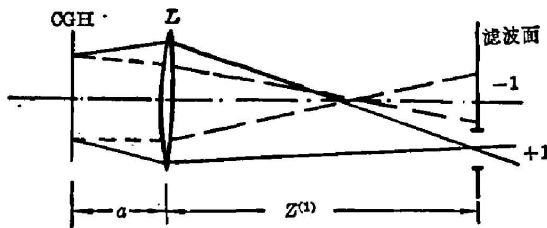


Fig. 1 Schematic diagram of off-axis filtering in an image plane

思想如下: 对 $\varphi(x) = \varphi_a(x) + \varphi_b(x)$ 的含二次项波面施加一定的线性载频, 使得 $\varphi_a^{(i)}$ 与其它各级组衍射不仅在轴向分离, 在垂轴方向也能完全分离开, 下面将给出完全分离的临界条件。

由于施加了线性载频, 计算全息图所画的二值函数不仅包括前述的 $\varphi(x)$ 的各次谐波, 且增加了线性载频的各级衍射项 $\varphi_c^{(i)}$, 它可表述为:

$$H(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi^{(i)}(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} [\varphi_a^{(i)}(x) + \varphi_b^{(i)}(x) + \varphi_c^{(i)}(x)]. \quad (5)$$

φ_a 、 φ_b 、 φ_c 所对应的最高空间频率分别为: $F_{a \max}$ 、 $F_{b \max}$ 和 F_c ($F_{a \max} > 0$, $F_{b \max} > 0$, $F_c > 0$); 不同级衍射下的对应值为: $F_a^{(i)}$ 、 $F_b^{(i)}$ 、 $F_c^{(i)}$; 它们与基波的关系分别为:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a^{(i)} &= i\varphi_a, & F_a^{(i)} &= iF_{a \max}, \\ \varphi_b^{(i)} &= i\varphi_b, & F_b^{(i)} &= iF_{b \max}, \\ \varphi_c^{(i)} &= i\varphi_c, & F_c^{(i)} &= iF_c. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

我们可以把 φ_a 和 L 认为是一个焦距为 f_s 的组合透镜 L' 。对 L' 而言, 变换的对象不再是 $H(x)$, 而是 $H(x) - \varphi_a(x)$, 记作 $H'(x)$, 其等效关系的示意图如图2所示。 $H'(x)$ 的第 i 级衍射记作 $\varphi'^{(i)}$; $\varphi'^{(i)}$ 在 $P^{(i)}$ 平面的弥散中心记作 $\xi^{(i)}$, 弥散宽度记作 $2W^{(i)}$, 则:

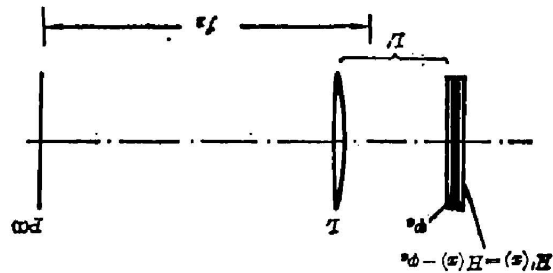


Fig. 2 Equivalent relation of off-axis filtering in an image plane

$$\begin{aligned} W^{(i)} &= \frac{1}{2\pi} \left[(i-1) \max \left\{ \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \right\} + i \max \left\{ \frac{\partial \varphi_b}{\partial x} \right\} \right] f_s \lambda \\ &= [(i-1)F_{a \max} + iF_{b \max}] f_s \lambda. \end{aligned} \quad (7)$$

由于 φ_0 的偶级衍射是一个暗点, 所以更准确的描述应为*:

$$W^{(i)} = \begin{cases} [(i-1)F_{0\max} + iF_{b\max}]f_x\lambda, & (i \text{ 为奇数}) \\ iF_{b\max}f_x\lambda, & (i \text{ 为偶数, 不含 } 0) \end{cases} \quad (8)$$

可以证明, +1 级与其它级组(0 级除外)分离必须满足如下条件:

$$|F_0| \geq F_{0\max} + 2F_{b\max}. \quad (9)$$

由于 0 级在 $P^{(1)}$ 的弥散与 $H(x)$ 无关, 因此以上的证明只能说明(9)式是必要的分离条件, 但不一定是充分的, 为此, 应再考虑 +1 级与 0 级分离的临界条件。0 级在 $P^{(1)}$ 平面的弥散宽度 $2W^{(0)}$ 可用几何光学的方法求出:

$$W^{(0)} = (f_x - z^{(1)})D / (2f_1), \quad (10)$$

式中 D 为计算全息图的最大宽度, 则 0 级与 +1 级分离应满足:

$$\xi^{(1)} - W^{(1)} - W^{(0)} > 0, \quad (11)$$

即:

$$F_0 > |F_{b\max} - F_{0\max}|. \quad (12)$$

由于 $F_{0\max} > 0$, $F_{b\max} > 0$, 所以必有:

$$|F_{0\max} + 2F_{b\max}| > |F_{b\max} - F_{0\max}|, \quad (13)$$

因此, 当 $F_{0\max} \geq F_{b\max}$ 时, (9)式不仅是完全滤波的必要条件, 而且也是充分的。

为了与一般的频率域滤波相比较, 将(9)式改写为:

$$F_0 \geq (B_0/2) + F_{b\max}, \quad (14)$$

式中 B_0 是 $\varphi(x)$ 的频带宽度,

$$B_0 \triangleq 2(F_{0\max} + F_{b\max}).$$

由(1)式可知, 在频谱面滤波时, 线性载波频率选取原则为 $f_c \geq 1.5B_0$ 。因此在一般情况下, 使用离轴像面滤波所需的载频, 将低于谱面滤波。定义 $R \triangleq (F_0/f_c)$, 以此来表征载频降低的比例, 有:

$$R = (1/3) + (1.5F_{b\max}/B_0). \quad (15)$$

由(15)式可见, 在某些情况下(如 $\varphi_b \ll \varphi_0$), 使用离轴像面滤波的方法, 所用载频仅为频率域滤波的 1/3 左右。

三、实验验证

本节将对上节的理论论述进行实验验证。

1. 仅含二次项的滤波

本例所要再现的波面是一个曲母线的锥面波, 用于对合成孔径雷达的信号进行处理。这个波面的数学表达式如下:

$$\varphi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2}{f(y)}, \quad (16)$$

其中 $f(y)$ 是 y 的函数。

对于这个锥面波, 我们可以把它理解成许多 x 方向柱面波在 y 方向叠加而成, 对每个柱

* 注意, 当 $i < 0$ 时, $W^{(i)} < 0$; $W^{(i)}$ 的符号仅表明它所在级组的正负。

面波均可施用离轴像面滤波的方法。滤波所用的柱面镜焦距为: $f_1 = 322 \text{ mm}$ 。

经简单的计算可知,本例属 $\varphi_0 = 0$ 的情况。因此,可选 $F_0 \geq (B_x/2)$ 作为线性载波频率。所绘出的计算全息图如图 3 所示。该图总抽样数为 318 条线,图幅 $40 \times 40 \text{ mm}$,最高空间频率为 14 lp/mm 。

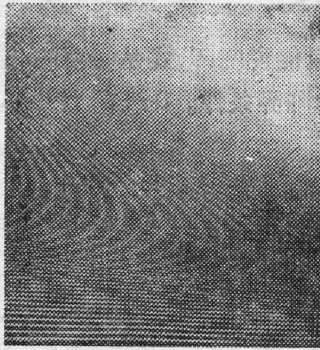


Fig. 3 CGH used in off-axis filtering

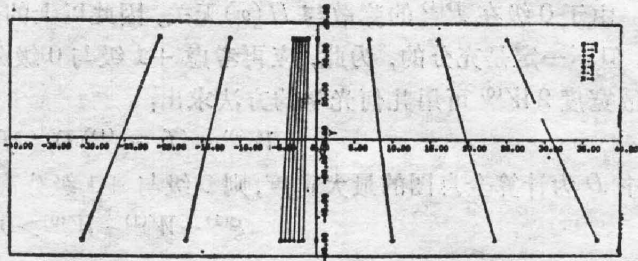


Fig. 4 Computer simulation of off-axis filtering

图 4 给出了这个滤波过程的计算机模拟结果,图中相同中心符号所夹的范围为不同级组的弥散范围。显然,所需的 +1 级,即标有“◇”符号的直线已同其它级组完全分离,但与 y 轴有一偏角。图 5(a) 是实际的光强分布,左侧的细线为所需要的级组。图 5(b) 是将滤波面安放在频谱面上拍得的照片,显然 +1 级与其它级组已混叠。由此可知,在离轴像面滤波的情况下,所需的载频的确比谱面滤波要低,表 1 给出了不同滤波方式所对应的计算全息图抽样数及最高空间频率等参数的比较,表中所列的全息图刻划的是同一波面。

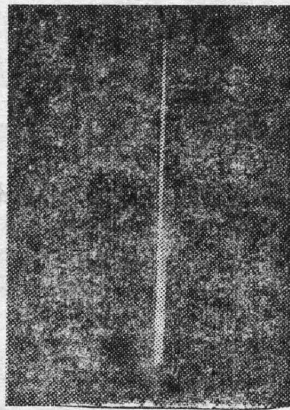


Fig. 5(a) Practical distribution of light intensity in an image plane

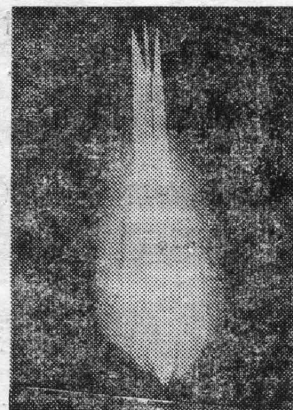


Fig. 5(b) Practical distribution of light intensity in a frequency plane

Table 1 Comparison of different filtering schemes

	抽 样 数	最高空间频率	Q
同轴像面滤波	79	7 lp/mm	0.1029
离轴像面滤波	318	14 lp/mm	0
频谱面滤波	1040	26 lp/mm	0

在本例中,欲再现波面为一个锥面波,在不同 y 值处具有不同的焦距,各自的 $z^{(1)}$ 值也不尽相同。因此,理想的滤波面应在一个曲面上。计算机的模拟表明,可以用一个倾斜的平面来代替这个曲面,同样可以完全分离出 +1 级衍射来。所以,滤波器的实际安放位置如图 6 所示。

2. 含高次项的滤波

本实验所用的计算全息图用于补偿凹面全息光栅的像差,其波面函数的形式为:

$$\varphi(x, y) = C_{12}xy^2 + C_{20}x^2 + C_{22}x^2y^2 + C_{30}x^3 + C_{01}y + C_{04}y^4, \quad (17)$$

式中的 C_{ij} 是实常数。式中除 $C_{20}x^2$ 这个二次项外,还存在其它项,显然,在本例中 $\varphi_b \neq 0$ 。如按一般的频域滤波处理,计算全息图将刻划 2000 条线左右,而采用本法后,仅刻 730 条线就可以了。所画的计算全息图的示意图见图 7。图 8(a) 给出了该全息图滤波面的实际光强分布;图 8(b) 是频谱面的照片,各级组已混叠。

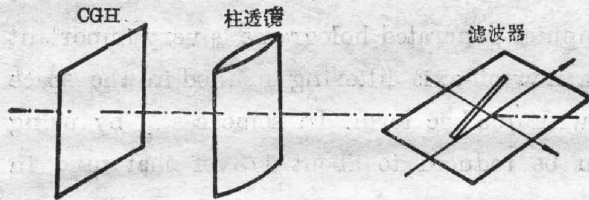


Fig. 6 Geometry of the filter for a conical wavefront

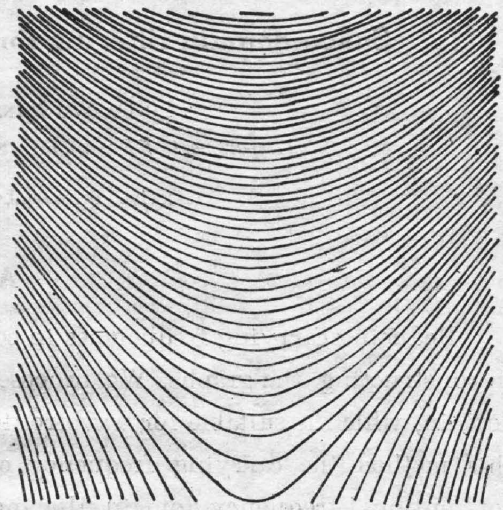


Fig. 7 The scheme of CGH for compensating aberration of a holographical grating

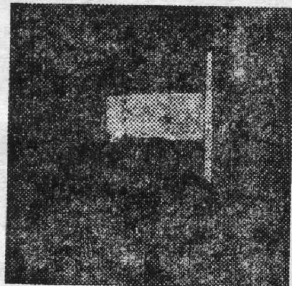


Fig. 8(a) Practical distribution of light intensity in an image plane

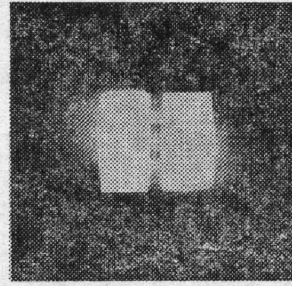


Fig. 8(b) Practical distribution of light intensity in a frequency plane

四、结 论

在实际应用中,降低计算机全息图的载频有着非常重要的意义。本文的理论推导及其后的实验表明,对含二次项的波面来说,通过空间域滤波的方式可以大大地降低载频。离轴像面滤波具有与通用的谱面滤波同等的功能。在某些情况下,抽样数可减至谱面滤波时的 1/3 左右,大大扩展了计算全息图的应用范围。

在本文完成过程中,清华大学物理系夏学江教授曾给予热情的指导与帮助,谨此表示衷心感谢。

参 考 文 献

- [1] B. R. Brown, A. W. Lohmann; *Appl. Opt.*, 1966, 5, No. 6 (Jun), 967.
[2] Y. Ichioke, A. W. Lohmann; *Appl. Opt.*, 1972, 11, No. 11 (Nov), 2597.

Space-domain filtering for computer generated hologram*

LU DA WU MINXIAN AND CHIN KUOPAN

(*Department of Precision Instruments, Tsinghua University, Beijing*)

(Received 5 November 1984; revised 24 May 1985)

Abstract

Reducing carrying frequencies in computer generated holograms is very important in constructing the graphs. We propose a new off-axis filtering method in the space domain, which is suitable for wavefronts with quadric term. In some cases, by using this method the carrying frequency can be reduced to about 1/3 of that used in conventional frequency domain filtering.

Two sets of preliminary experimental results are shown.

* Supported by the Scientific Foundation, Academic Sinica.