

# 非均匀媒质的变换矩阵和流图结构

马 建            王 绍 民  
(上海市激光技术研究所)    (杭州大学物理系)

## 提 要

本文从考虑媒质的径向和轴向的非均匀性, 导出了相应的变换矩阵和流图结构。应用于空气折射率梯度对激光准直的影响和不均匀泵浦引起的激光器附加衍射损耗。结果表明, 轴向折射率梯度在一定条件下可以补偿径向折射率梯度的影响。

光束在径向非均匀媒质中传输的  $3 \times 3$  阶矩阵和流图已经给出<sup>[1]</sup>, 它能方便地解决光在径向非均匀媒质中传输的复杂问题。仅考虑轴向梯度折射率媒质内的光线微分方程的几种解析式也已得到<sup>[2]</sup>。然而, 在许多实际现象中, 径向的非均匀性和轴向的非均匀性总是同时存在的, 而且它们是互相影响、牵制的。事实上, 在设计梯度折射率透镜<sup>[3]</sup>和研究人眼晶状体的折射率分布<sup>[4]</sup>时, 人们已经考虑了这个问题, 但因未得到解析结果, 对分析和解决多个光学元件组合连接的问题就显得不便和困难。而用矩阵和流图的形式则可方便地解决。所以, 有必要给出同时考虑媒质的径向和轴向的非均匀性的变换矩阵和流图结构。

## 一、 $n(r, z)$ 为不可分离变量型

光在变折射率媒质  $n(r, z)$  中传输的微分方程的形式为

$$\frac{d}{ds} \left[ n(r, z) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right] = \nabla n(r, z), \quad (1)$$

取  $z$  为光轴, 对  $n(r, z)$  的折射率分布在通常情况下可展开成级数形式

$$\left. \begin{aligned} n(r, z) &= \sum_{j=0}^{\infty} n_j(z) r^j = n_0(z) + n_1(z)r + n_2(z)r^2 + \dots, \\ n_j(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} n_{ji} z^i = n_{j0} + n_{j1}z + n_{j2}z^2 + \dots, \quad j=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

令  $r(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ , 再由(2)、(1), 并考虑傍轴近似, 解得传输矩阵为

$$\left. \begin{aligned} &\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \\ &\left. \begin{aligned} a &= 1 + 2n_{10}z^2 / (n_{00} + n_{01}) + \dots, \\ b &= z - n_{01}z^2 / (n_{00} + n_{01}) + \dots, \\ c &= 4n_{10}z / (n_{00} + n_{01}) + \{ (n_{11}/n_{00}) - [n_{10}(n_{02} + n_{01}) / n_{00}(n_{00} + n_{01})] \} z^2 + \dots, \\ d &= 1 - [2n_{01}z / (n_{00} + n_{01})] + \{ (n_{10}/n_{00}) - (n_{02}/n_{00}) \\ &\quad + [n_{01}(n_{02} + n_{01}) / n_{00}(n_{00} + n_{01})] \} z^2 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

利用递推公式

$$a_m = \frac{1}{m(m-1)n_{00}} \left\{ \sum_{j=2}^{m-1} [2a_{j-2}n_{1,m-j} - j(j-1)a_j n_{0,m-1} - (m-j+1)(j-1)a_{j-1}n_{0,m-j+1}] - (m-1)a_{m-1}n_{01} + 2a_{m-2}n_{10} \right\}, \quad (m \geq 2) \quad (4)$$

可求至任意精度。人们在透镜设计和光通讯耦合等应用中,多希望  $\Delta n$  大的元件,已制得  $\Delta n=0.22$  的结果<sup>[5]</sup>,通常  $n_{j1}, n_{j2}, \dots, (j=0, 1, 2, \dots)$  可做得很大,而  $z$  很小(对玻璃等材料  $z$  不易大),故级数求至  $z^2$  项一般已够了,(3)式的流图如图 1 所示。

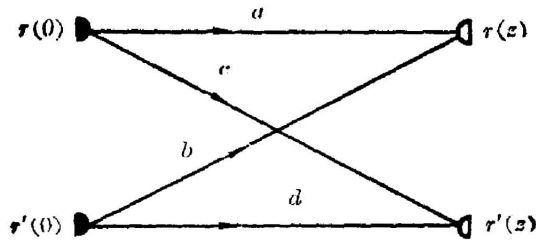


图 1 (3)式的流图结构

Fig. 1 Flow graph for Eq. (3)

## 二、 $n(r, z)$ 为可分离变量型

对一些特殊情况下的媒质折射率分布,矩阵元可有明确的解析表示。当  $n(r, z)$  为可分离变量型,  $n(r, z) = n(z)n(r)$ 。

$$1. \quad n(r, z) = n(z)(1 + \alpha_0 r - \beta_0 r^2)$$

利用(1)式,并考虑傍轴近似,得

$$n(z) \frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{dn(z)}{dz} \frac{dr}{dz} = n(z)(\alpha_0 - 2\beta_0 r), \quad (5)$$

(5)式为变系数二阶常微分方程,无法得到普遍的  $r[n(z), z]$  的解析式。设轴向折射率为线性缓变的

$$n(z) = n(0)(1 + kz), \quad |kz| \ll 1, \quad (6)$$

气体媒质常常是适用的,作近似  $[(1/n(z))[dn(z)/dz] \approx k$ , (5)式可解得

$$\begin{cases} r(z) = a_1 r(0) + b_1 r'(0) + e_1 \alpha_0, \\ r'(z) = c_1 r(0) + d_1 r'(0) + f_1 \alpha_0, \end{cases} \quad i \begin{cases} 1, & 8\beta_0 > k^2 \\ 2, & 8\beta_0 < k^2 \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \exp(-kz/2) \{ \cos(q_1 z/2) + [k \sin(q_1 z/2)]/q_1 \}, \\ b_1 &= 2 \exp(-kz/2) [\sin(q_1 z/2) q_1], \\ c_1 &= -\exp(-kz/2) [(k^2/2q_1) + (q_1/2)] \sin(q_1 z/2), \\ d_1 &= \exp(-kz/2) \{ \cos(q_1 z/2) - k [\sin(q_1 z/2)/q_1] \}, \\ e_1 &= [1 - \exp(-kz/2) \cos(q_1 z/2) - k \exp(-kz/2) \sin(q_1 z/2) q_1] / 2\beta_0, \\ f_1 &= \exp(-kz/2) [(q_1/2) + (k^2/2q_0)] \sin(q_1 z/2) / 2\beta_0, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_2 &= \exp(-kz/2) [\exp(-kz/2)(q_2 - k) + \exp(-kz/2)(q_2 + k)] / 2q_2, \\
 b_2 &= \exp(-kz/2) [\exp(q_2z/2) - \exp(-q_2z/2)] / q_2, \\
 c_2 &= 2\beta_0 \exp(-kz/2) [\exp(-q_2z/2) - \exp(q_2z/2)] / q_2, \\
 d_2 &= \exp(-kz/2) [\exp(-q_2z/2) \cdot (q_2 + k) + \exp(q_2z/2) \cdot (q_2 - k)] / 2q_2, \\
 e_2 &= \exp(-kz/2) \{ [\exp(-q_2z/2) \cdot (k - q_2) / 2q_2] \\
 &\quad - [\exp(q_2z/2) \cdot (k + q_2) / 2q_2] + [\exp(kz/2)] \} 2\beta_0, \\
 f_2 &= \exp(-kz/2) [\exp(q_2z/2) - \exp(-q_2z/2)] / q_2. \\
 q_i &= \begin{cases} \sqrt{8\beta_0 - k^2}; & \text{当 } i=1, \\ \sqrt{k^2 - 8\beta_0}; & \text{当 } i=2. \end{cases}
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

写成变换矩阵

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i & e_i \alpha_0 \\ c_i & d_i & f_i \alpha_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

文献[1]讨论的情况是这里  $k \rightarrow 0$  时的特例。(9)式的矩阵的流图可表述如图2所示。

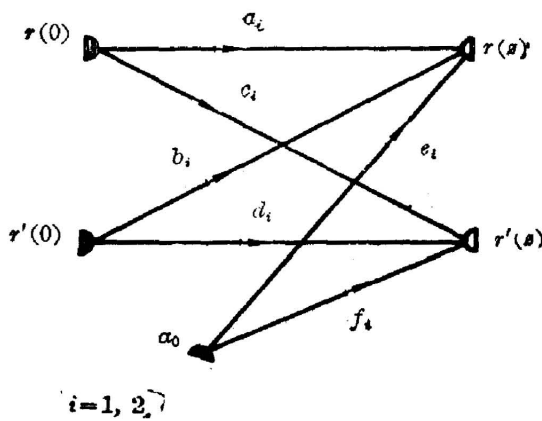


图2 非均匀媒质的流图结构

Fig. 2 Flowgraph for inhomogeneous media

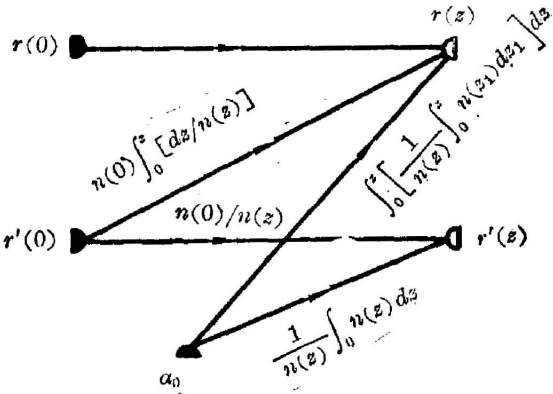


图3 (12)式的流图结构

Fig. 3 Flowgraph for Eq. (12)

2.  $2\beta_0 r \ll \alpha_0$

事实上确实有些现象可用这种特例来描述，如大气的折射率梯度等，这时(5)式可化为

$$n(z) \frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{dn(z)}{dz} \frac{dr}{dz} = \alpha_0 n(z). \quad (10)$$

方程(10)式的解析解为

$$\left. \begin{aligned}
 r(z) &= r(0) + n(0) \int_0^z \frac{dz}{n(z)} r'(0) + \alpha_0 \int_0^z \left[ \frac{1}{n(z)} \int_0^z n(z_1) dz_1 \right] dz, \\
 r'(z) &= [n(0)/n(z)] r'(0) + [\alpha_0/n(z)] \int_0^z n(z) dz.
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

若  $\alpha_0 = 0$ , 上式将退化为文献[2]讨论的情况，也可用于讨论轴向梯度透镜效应等<sup>[6]</sup>。(11)式可写成变换矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 1 & n(0) \int_0^z [1/n(z)] dz & \alpha_0 \int_0^z \left\{ [1/n(z)] \int_0^z n(z_1) dz_1 \right\} dz \\ 0 & n(0)/n(z) & \left[ \alpha_0 \int_0^z n(z) dz \right] / n(z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

其流图结构如图 3 所示。

### 三、应 用

#### 1. 令 $n(z) = n(0)(1+kz)$

利用(12)式,得激光三点准直图,如图 4 所示。对垂直梯度  $\alpha_0$ ,  $k$  有补偿作用。图 4 中

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{u^2}{2} + \frac{ku - \ln(1+ku)}{k^2} \right], \\ f_1 &= \left[ 1 - \frac{ku}{2(1+ku)} \right] u, \\ e_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{v^2 - 2uv}{2} + \frac{1}{k^2} \left[ kv - \ln \frac{(1+ku+kv)}{1+ku} \right] \right\} \\ &\quad - \frac{u}{k} \left( 1 + \frac{ku}{2} \right) \ln \left[ \frac{1+k(u+v)}{1+ku} \right], \\ f_2 &= \frac{v}{1+k(u+v)} \left[ 1 + \frac{k(v+2u)}{2} \right]. \end{aligned}$$

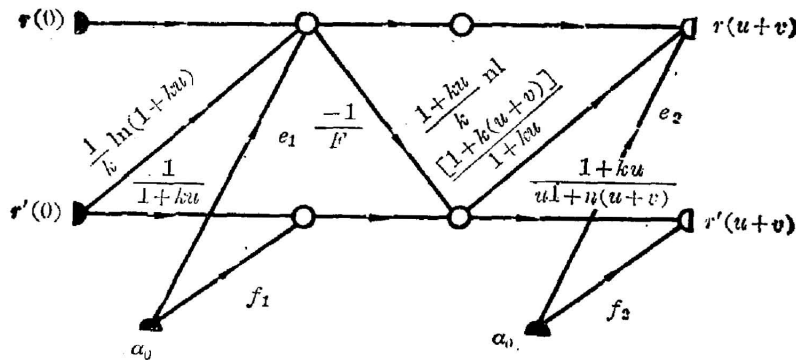


图 4 激光三点准直图

Fig. 4 Flowgraph for 3-point alignment

#### 2. 泵浦的径向和轴向非均匀引起激光器的附加衍射损耗

一般工作物质主要是径向非均匀,轴向折射率梯度很小,可近似为

$$n(r, z) = n(0)(1+kz)(1+\alpha_0 r - \beta_0 r^2),$$

图 5 中,利用(9)式,得从  $R_1$  开始向右但不包括  $R_1$ 、 $R_2$  的单程变换矩阵。

$$\begin{pmatrix} a & b & e_1 \alpha_0 \\ c & d & f_1 \alpha_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n(e) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i & b_i & e_i \alpha_0 \\ c_i & d_i & f_i \alpha_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n(0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

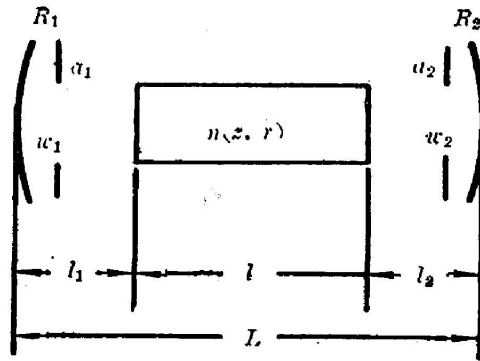


图5 非均匀泵浦的固体激光器

Fig. 5 A solid state laser pumped inhomogeneously

反向传输矩阵为

$$\exp(kz) \begin{pmatrix} d & b & e_{II}\alpha_0 \\ c & d & f_{II}\alpha_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(kz) \begin{pmatrix} d & b & (bf_I - de_I)\alpha_0 \\ c & a & (af_I - ce_I)\alpha_0 \\ 0 & 0 & (ad - bc) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

显然, 由此很容易得到文献[7]更完整的结果:

光轴在镜面  $R_1$  和  $R_2$  处的位移和倾角

$$\begin{cases} r_j = [(1 - D_j)E_j + B_jF_j]/(2 - A - D), \\ r'_j = [(1 - A_j)F_j + C_jE_j]/(2 - A - D), \end{cases} \quad j = \begin{cases} 1, R_1 \text{ 处的量,} \\ 2, R_2 \text{ 处的量.} \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & E_1 \\ C_1 & D_1 & F_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(kz) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/R_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & b & e_{II}\alpha_0 \\ c & a & f_{II}\alpha_0 \\ 0 & 0 & ad - bc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/R_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & e_I\alpha_0 \\ c & d & f_I\alpha_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & E_2 \\ C_2 & D_2 & F_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(kz) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/R_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & e_I\alpha_0 \\ c & d & f_I\alpha_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/R_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & b & e_{II}\alpha_0 \\ c & a & f_{II}\alpha_0 \\ 0 & 0 & ad - bc \end{pmatrix}. \quad (17)$$

当选  $S = (a_1/w_1) = (a_2/w_2) = 1.2$  时, 其相对附加衍射损耗率为

$$\bar{v}_{\pm} = \frac{\pi [1 - (A + D)^2/4]^{1/2} (\{[(1 - D_1)E_1 + B_1F_1]^2/B_1\} + \{[(1 - D_2)E_2 + B_2F_2]^2/B_2\})}{10\lambda(2 - A - D)^2}. \quad (18)$$

#### 四、讨 论

由图4分析可知, 当  $k > 0$  时,  $k$  越大,  $r(0)r'(0)$  对  $r(u+v)$ 、 $r'(u+v)$  的传递作用就越

小; 而  $k < 0$  时情况正相反。这对选择激光准直的环境是非常重要的。

由(9)式中的矩阵元, 当  $\beta_0 \doteq (k^2/8)$  时, 聚焦现象消失。再作  $|kz/2| \ll 1$  的近似, 可发现, 在一定条件下, 轴向的折射率梯度可以补偿径向的效应, 这对减少激光器的光轴漂移和附加衍射损耗的具体设计也是有意义的。

作者对王之江教授、邓锡铭教授、余文炎副研究员、沈冠群副研究员和唐武、王效敬等同志的有益讨论谨致谢意。

### 参 考 文 献

- [1] 王绍民;《中国科学》, 1981, No. 8 (Aug), 946.
- [2] 乔亚天;《光学学报》, 1984, 4, No. 1 (Jan), 89.
- [3] D. T. Moore; *J. O. S. A.*, 1971, 61, No. 7 (Jul), 886.
- [4] J. W. Blaker; *J. O. S. A.*, 1980, 70, No. 2 (Feb), 220.
- [5] J. L. Coutaz, P. C. Jausaud; *Appl. Opt.*, 1982, 21, No. 6 (Mar), 1063.
- [6] 陈尧生;《光学学报》, 1983, 3, No. 4 (Jul), 374.
- [7] 王绍民等;《杭州大学学报》, (自然科学版), 1982, 9, No. 2 (Apr), 168.

## Augmented transfer matrices and flow graph structures for inhomogeneous media

MA JIAN

(Shanghai Institute of Laser Technology)

WANG SHAOMIN

(Department of Physics, Hangzhou University)

(Received 9 April 1984; revised 12 April 1985)

### Abstract

Taking radial and axial inhomogeneity of medium into consideration, we have obtained augmented transfer matrices and flow graph structures. As their applications we have studied the effect of air index gradient on laser alignment and the additional diffraction loss of laser caused by inhomogeneous pump. Results show that the axial index gradient can compensate the effect caused by radial index gradient in some cases.