第5卷 第9期
1985年9月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 5, No. 9
September, 1985

压缩算符的新形式与压缩态的各种表示和性质*

范洪义
(中国科学技术大学近代物理系)

郭光灿
(中国科学技术大学物理系)

提 要

本文采用正规乘积下积分法找到了压缩算符的新形式。在此基础上深入地研究了压缩态形成的本质，导出压缩态的各种表示和性质，证明了压缩态是准粒子空间中的相干态，推导出压缩态与坐标本征态和动量本征态的转换关系，计算了压缩态的 Wigner 分布函数。

一、引 言

压缩态的特性和应用的前景激起了人们极大的兴趣，虽然迄今实验上尚未证实压缩态的存在，但近年来大量的理论研究表明，在许多光学非线性相互作用过程中都可预言压缩态的产生，如共振荧光、二次谐波、简并参量过程、自由电子激光器、双光子和多光子的光学双稳态、简并四波混频以及 Jaynes-Cumming 模型等。其中四波混频和参量过程较有希望产生在实验上可观察到的压缩态。目前美国贝尔实验室正致力于这方面的实验研究[1]。

量子光学处理单光子的相互作用过程，惯用的方法是采用 Glauber-Sudarshan 的 P 表示，然后将密度算符的方程变为 C-数的 Fokker-Planck 方程。压缩态的产生是基于双光子的非线性相互作用过程，其 P 表示不复存在。因此，如何建立一种处理双光子过程的有效方法，成为目前量子光学急待解决的问题。虽然已提出若干替代表示的尝试[2]，但这个问题还远未得到满意的解决。作者之一曾提出一种利用正规乘积下的积分来处理量子力学问题的有效方法[3]。本文采用这种方法来处理单模压缩态，阐明了压缩态形成的实质，同时揭示了压缩态的若干新的特性。

二、压缩算符的新形式与压缩真空态

压缩态 $|\alpha,\xi\rangle$ 通常记为[4]

$$|\alpha,\xi\rangle=D(\alpha)S(\xi)|0\rangle,\quad a|0\rangle=0, \tag{1}$$

$$D(\alpha)=\exp(\alpha a^{+}-\alpha^{*}a),\ [a,a^{+}]=1,\ D(\alpha)|0\rangle=|\alpha\rangle,\ a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle, \tag{2}$$

$$S(\xi)=\exp\left[\frac{1}{2}(\xi^{*}a^{2}-\xi a^{+2})\right], \tag{3}$$

收稿日期：1984年9月10日；收到修改稿日期：1985年4月16日

* 本文曾在第一届全国量子光学学术讨论会(1984年)上报告。

其中 $D(\alpha)$ 为构造相干态 $|\alpha\rangle$ 的平移算符，$|0\rangle$ 是谐振子真空态，$S(\xi)$ 称为压缩算符，$\xi=r\exp(i\theta)$ 一般取为复数。令 $N=a^+a$ 是粒子数算符，则容易证明 $S(\xi)$ 可作如下分解

$$S(\xi)=\exp\left(-i\frac{\theta}{2}N\right)S(r)\exp\left(i\frac{\theta}{2}N\right),\quad S(r)=\exp\left[\frac{r}{2}(a^2-a^{+2})\right]。\tag{4}$$

于是(1)式变为

$$|\alpha,\ \xi\rangle=D(\alpha)\exp\left(-i\frac{\theta}{2}N\right)S(r)|0\rangle,\quad |\alpha,\ \xi\rangle|_{\theta=0}=D(\alpha)S(r)|0\rangle。\tag{5}$$

我们利用文献[3]中提出的正规乘积下积分法，可证明在坐标表像和动量表像中 $S(r)$ 的新形式分别为*

$$S(r)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{\sqrt{\mu}}|q/\mu\rangle\langle q|,\quad \mu=\exp r>0,\tag{6}$$

$$S(r)=\int_{-\infty}^{\infty}dp\sqrt{\mu}\,|\mu p\rangle\langle p|,\tag{7}$$

其中 $|q\rangle$ 与 $|p\rangle$ 分别是坐标 Q 与动量 P 的本征态(取 $\hbar=\omega=m=1$)

$$|q\rangle=\pi^{-1/4}\exp\left[-\frac{q^2}{2}+\sqrt{2}\,qa^+-\frac{a^{+2}}{2}\right]|0\rangle,\quad Q|q\rangle=q|q\rangle,\tag{8}$$

$$|p\rangle=\pi^{-1/4}\exp\left[-\frac{p^2}{2}+i\sqrt{2}\,pa^++\frac{a^{+2}}{2}\right]|0\rangle,\quad P|p\rangle=p|p\rangle。\tag{9}$$

由(6)与(7)式立即导出

$$S(r)|q\rangle=\exp\left[\frac{r}{2}(a^2-a^{+2})\right]|q\rangle=\frac{1}{\sqrt{\mu}}|q/\mu\rangle,\quad S(r)|p\rangle=\sqrt{\mu}\,|\mu p\rangle,\tag{10}$$

$$S(r)QS^{-1}(r)=\mu Q,\quad S(r)PS^{-1}(r)=P/\mu,\quad \mu=e^r>0。\tag{11}$$

从而清楚地反映了“压缩”特性，而且对 $|q\rangle$ 和 $|p\rangle$ 的压缩效果互逆。

记压缩真空态为 $|\mathbf{0}\rangle_r\equiv S(r)|0\rangle$，下标 r 表示它与参数 r 有关，则由压缩算符的新形式极易得到压缩真空态的各种表示。

1．压缩真空在坐标表像中的表示

由(6)式立刻得到

$$|\mathbf{0}\rangle_r=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{\sqrt{\mu}}|q/\mu\rangle\langle q|0\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}dq\sqrt{\frac{\mu}{\pi}}\exp\left(-\frac{\mu^2q^2}{2}\right)|q\rangle,\ \mu=e^r。\tag{12}$$

于是压缩真空态的波函数为

$$\langle q|\mathbf{0}\rangle_r=\sqrt{\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{\mu^2q^2}{2}\right)。\tag{13}$$

由(12)与(5)式可得当 $\theta=0$ 时压缩态的波函数

$$D(\alpha)S(r)|0\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}dq\sqrt{\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}}\exp\left[-\frac{\mu^2q^2}{2}+i\sqrt{2}\,x_2q+ix_1x_2\right]|q+\sqrt{2}\,x_1\rangle,\ \alpha=x_1+ix_2,\tag{14}$$

---

* (6)式的证明如下，用(8)式及 $|0\rangle\langle 0|=:e^{-a^+a}:$ 得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{\sqrt{\mu}}|q/\mu\rangle\langle q|=\frac{1}{\sqrt{\pi\mu}}\int_{-\infty}^{\infty}dq:\exp\left[-\frac{q^2}{2}\left(1+\frac{1}{\mu^2}\right)+\sqrt{2}\left(\frac{a^+}{\sqrt{\mu}}+a\right)q-\frac{a^2+a^{+2}}{2}-a^+a\right]:$$

$$=\exp\left(-\frac{a^{+2}}{2}\operatorname{th}r\right)\exp\left[-\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)\ln\operatorname{ch}r\right]\exp\left(\frac{a^2}{2}\operatorname{th}r\right)=\exp\left[\frac{r}{2}(a^2-a^{+2})\right].$$

其中，: : 表示取正规乘积。(7)式的证明类同。

$$\langle q|D(\alpha)S(r)|0\rangle=\sqrt{\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}}\exp\left[-\frac{\mu^2(q-\sqrt{2}x_1)^2}{2}+i\sqrt{2}x_2\right]q-ix_1x_2。\tag{15}$$

为了求压缩真空的粒子表像，把(8)式代入(12)式积分得

$$|0\rangle_r=\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}r\exp\left(-\frac{a^{+2}}{2}\operatorname{th}r\right)|0\rangle,\quad \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}r=\sqrt{\frac{2\mu}{\mu^2+1}},\quad \operatorname{th}r=\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}。\tag{16}$$

利用文献[3]中给出的算符公式

$$e^{fa^{+2}}e^{ga^2}=\frac{1}{\sqrt{1-4fg}}\exp\left(\frac{ga^{+2}}{1-4fg}\right)\exp[-a^+a\ln(1-4fg)]\exp\left(\frac{fa^2}{1-4fg}\right),\tag{17}$$

其中 f 与 g 须满足下列条件

$$\operatorname{Re}(-1+f+g)<0,\ \operatorname{Re}\left(\frac{1-4fg}{-1+f+g}\right)<0;\ 或\ \operatorname{Re}(-1-f-g)<0,\ \operatorname{Re}\left(\frac{1-4fg}{-1-f-g}\right)<0。\tag{18}$$

我们可以求出不同压缩真空态的内积

$$_\lambda\langle 0|0\rangle_r=\sqrt{2\mu\mu'/(\mu^2+\mu'^2)}。\tag{19}$$

2. 压缩真空在动量表像中的表示

由(7)式可以求出

$$|0\rangle_r=\int_{-\infty}^{\infty}dp\sqrt{\mu}|\mu p\rangle\langle p|0\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{\mu\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{p^2}{2\mu^2}\right)|p\rangle。\tag{20}$$

所以压缩真空的动量波函数为

$$\langle p|0\rangle_r=\frac{1}{\sqrt{\mu\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{p^2}{2\mu^2}\right),\tag{21}$$

$$D(\alpha)S(r)|0\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{\mu\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{p^2}{2\mu^2}-\sqrt{2}ix_1p-ix_1x_2\right)|p+\sqrt{2}x_2\rangle,\tag{22}$$

$$\langle p|D(\alpha)S(r)|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{\mu\sqrt{\pi}}}\exp\left[-\frac{(p-\sqrt{2}x_2)^2}{2\mu^2}-\sqrt{2}ix_1p+ix_1x_2\right]。\tag{23}$$

由(16)式知压缩真空包含偶数个光子态的叠加

$$|0\rangle_r=\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\operatorname{th}r)^n(2n!)^{1/2}}{n!2^n}|2n\rangle,\tag{24}$$

如对压缩真空消灭几个粒子，则有

$$\begin{aligned}a^n|0\rangle_r&=\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}r\,a^n\exp(-a^{+2}\operatorname{th}r/2)|0\rangle\\&=\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}r\exp(-a^{+2}\operatorname{th}r/2)\sum_{k=0}^{n/2}\frac{n!}{2^kk!(n-2k)!}(-\operatorname{th}r)^{n-k}(a^+)^{n-2k}|0\rangle,\end{aligned}\tag{25}$$

$$a^n|0\rangle_r=\sum_{k=0}^{n/2}\frac{n!}{2^kk!(n-2k)!}(-\operatorname{th}r)^{n-k}(a^+)^{n-2k}|0\rangle_r,\tag{26}$$

其中用到了算符公式[5]

$$a^n\exp(\nu a^{+2})=\exp(\nu a^{+2})\sum_{k=0}^{n/2}\frac{n!\nu^k}{k!(n-2k)!}:(2\nu a^++a)^{n-2k}:。\tag{27}$$

由(25)式立即得压缩真空与粒子态 $|n\rangle$ 的内积，例如当 n 为偶数时有

$$\langle n|0\rangle_r = \langle 0|\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}} r \sum_{k=0}^{n/2} \frac{\delta_{n,2k}}{2^k k!(n-2k)!}(-\operatorname{th} r)^{n-k}(a^+)^{n-2k}|0\rangle$$

$$= \frac{\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}} r}{(n/2)!}\left(-\frac{\operatorname{th} r}{2}\right)^{n/2}。 \tag{28}$$

再看压缩算符 $S(r)$ 对粒子态的作用(不失一般性,可设 $\mu=e^r<1$),用(6)式、(16)式及厄米多项式的积分公式

$$S(r)|n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq\,|q/\mu\rangle}{\sqrt{\pi^{1/2}\mu 2^n n!}} \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) H_n(q)$$

$$= \frac{(-\operatorname{th} r)^{n/2}}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left[\frac{a^+}{\sqrt{-\operatorname{sh} 2r}}\right]|0\rangle_r。 \tag{29}$$

以上这些性质都是从压缩算符的新形式的基础上推导出的。再用(10)、(11)式的关系(这里恢复 $\hbar\omega$)

$$Q=\sqrt{\hbar/2\omega}\,(a+a^+),\quad P=i\sqrt{\hbar\omega/2}\,(a^+-a)。 \tag{30}$$

考察处于压缩真空时的测不准关系,极易导出

$${}_r\langle 0|Q|0\rangle_r=0,\quad {}_r\langle 0|P|0\rangle_r=0, \tag{31}$$

$${}_r\langle 0|Q^2|0\rangle_r=\langle 0|S^{-1}Q^2S|0\rangle=(\hbar/2\mu^2\omega)\langle 0|a^{+2}+a^2+aa^++a^+a|0\rangle=(\hbar/2\omega\mu^2), \tag{32}$$

$${}_r\langle 0|P^2|0\rangle_r=\mu^2\langle 0|P|0\rangle=(\hbar\omega\mu^2/2), \tag{33}$$

由此给出

$$(\Delta Q)^2={}_r\langle 0|Q^2|0\rangle_r-{}_r\langle 0|Q|0\rangle_r^2=[\hbar\exp(-2r)/2\omega],\ (\Delta P)^2=[\hbar\omega\exp(2r)/2], \tag{34}$$

$$\Delta Q\,\Delta P=\hbar/2,\quad (\Delta Q/\Delta P)^2=\exp(-4r)/\omega^2。 \tag{35}$$

可见"压缩"特性是在真空阶段就产生了压缩真空,使得在其中一个正交分量上具有比相干态小的量子起伏。压缩态的形成实质上是真空的标度变换过程。这个变换使得零点起伏变得与相位有关,亦即圆状的零点起伏被压扁而变为椭圆。(5)式表明压缩态的形成过程(如图1所示),图(a)为相干态的真空态。其零点起伏与位相无关;图(b)为真空态的标度变换。如当 $r>0$ 时;零点起伏在 x_1 方向上被压缩而形成椭圆;图(c)说明

$$R^{-1}(\theta/2)=\exp(-i\theta N/2)$$

的作用是使椭圆的主轴转动过($\theta/2$)的角度,即改变了压缩方向的位相,但并不改变压缩的

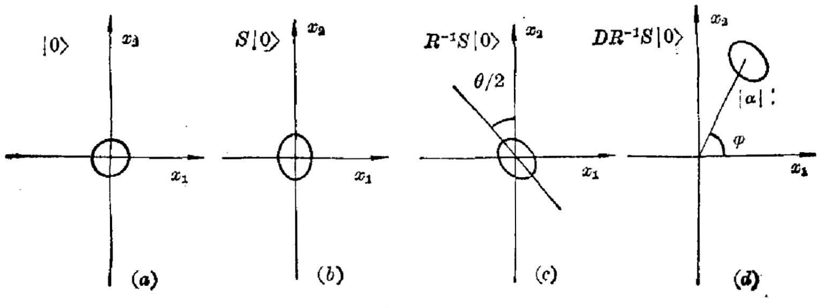

图1　压缩态的形成

Fig. 1　Formation of squeezed state

程度；图(d)表示 $D(\alpha)$ 的作用是使被压缩的真空态平移。令 $\alpha=|\alpha|\exp(i\varphi)$，则平移的大小为 $|\alpha|$，平移的方向角为 φ。

由此可见，“压缩”效应的本质是在强电磁场与物质的非线性作用过程中，真空的性质发生变化的结果，压缩参数是这种“压缩”效应的量度。

三、压缩态作为准粒子相干态所呈现的性质

可以证明压缩态 $|\alpha, r\rangle$ 即为变换后 Fock 空间中的相干态。事实上，若令

$$b=S(r)aS^{-1}(r),$$

则有 $a=b\operatorname{ch}r-b^+\operatorname{sh}r$，$a^+=b^+\operatorname{ch}r-b\operatorname{sh}r$。而 b 和 b^+ 满足对易关系 $[b, b^+]=1$。于是从 Baker-Hausdorff 公式，用到了关系 $b|\mathbf{0}\rangle_r=S(r)aS^{-1}(r)S(r)|0\rangle=0$，可以得到

$$\begin{aligned}|\alpha, r\rangle&=D(\alpha)S(r)|0\rangle=D(\alpha)|\mathbf{0}\rangle_r\\&=\exp(-|\alpha|^2/2)\exp[\alpha(b^+\operatorname{ch}r-b\operatorname{sh}r)\exp(-\alpha^*(b\operatorname{ch}r-b^+\operatorname{sh}r)]|\mathbf{0}\rangle_r\\&=\exp[(-|\alpha^*\operatorname{sh}r+\alpha\operatorname{ch}r|^2/2)+(\alpha^*\operatorname{sh}r+\alpha\operatorname{ch}r)b^+]|\mathbf{0}\rangle_r。\end{aligned}\tag{36}$$

从(36)式可知

$$|\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{sh}\,\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{ch}\,\boldsymbol{r}\rangle=\exp[-(|\alpha^*\operatorname{sh}r+\alpha\operatorname{ch}r|^2)+(\alpha^*\operatorname{sh}r+\alpha\operatorname{ch}r)b^+]|\mathbf{0}\rangle_r\tag{37}$$

是在压缩真空态上建立起来的归一化相干态，或称为准粒子(产生算符为)相干态。显然它满足

$$b|\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{sh}\,\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{ch}\,\boldsymbol{r}\rangle=(\alpha^*\operatorname{sh}r+\alpha\operatorname{ch}r)|\boldsymbol{\alpha}^*\mathbf{sh}\,\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{ch}\,\boldsymbol{r}\rangle。\tag{38}$$

当 $r=0$，$\mu=1$ 时，它退化为相干态 $|\alpha\rangle$。若令

$$\begin{pmatrix}\beta\\ \beta^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}r & \operatorname{sh}r\\ \operatorname{sh}r & \operatorname{ch}r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha^*\end{pmatrix},\tag{39}$$

则(38)式可化为

$$b|\boldsymbol{\beta}\rangle=\beta|\boldsymbol{\beta}\rangle,\qquad |\alpha, r\rangle=D(\alpha)S(r)|0\rangle=|\boldsymbol{\beta}\rangle。\tag{40}$$

由此极易求出不同压缩态的内积

$$\langle\alpha, r|\alpha', r'\rangle=\langle\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\beta}\rangle=\exp\{[(|\beta|^2+|\beta'|^2)/2]+\beta^*\beta'\},\ \beta'=\alpha'^*\operatorname{sh}r'+\alpha'\operatorname{ch}r'。\tag{41}$$

而压缩态的完备性关系可改用如下的正规乘积积分

$$\int\frac{d^2\alpha}{\pi}|\alpha, r\rangle\langle\alpha, r|=\int\frac{d^2\beta}{\pi}|\boldsymbol{\beta}\rangle\langle\boldsymbol{\beta}|=\int\frac{d^2\beta}{\pi}:\exp(-|\beta|^2+\beta b^++\beta^*b-b^+b):=1,\tag{42}$$

其中用到了 $d^2\alpha=d^2\beta$ 以及压缩真空态构成的投影算子的正规乘积

$$|\mathbf{0}\rangle_r\,{}_r\langle\mathbf{0}|=:\exp(-b^+b):。\tag{43}$$

应当注意(42)和(43)式中的正规乘积记号 $::$ 是针对 b 和 b^+ 而言，即在 $::$ 下 b 与 b^+ 对易，而不是 a 与 a^+ 对易。(42)式表明，只要压缩参数 r 选定，则压缩态构成完备集。由(5)式易证，压缩态还可写成

$$|\alpha, r\rangle=\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}r\exp\{[-\operatorname{th}r(\alpha^{*2}+a^{+2})/2]+(\alpha^*\operatorname{th}r+\alpha)a^+-(|\alpha|^2/2)\}|0\rangle。\tag{44}$$

由此利用 $|0\rangle\langle0|=:\exp(-a^+a):$ 及正规乘积下积分法可以计算

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi}|\alpha, r\rangle\langle\alpha, r'| = \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}} r \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}} r' \int \frac{d^2\alpha}{\pi} :\exp[-|\alpha|^2+\alpha(a^+ + a \operatorname{th} r')$$
$$+\alpha^*(a+a^+\operatorname{th} r)]\exp\{[-\operatorname{th} r(\alpha^{*2}+a^{+2})/2]$$
$$-[\operatorname{th} r(\alpha^2+a^2)]-a^+a\}: = \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}(r-r'), \tag{45}$$

其中利用了数学公式

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi}\exp(\xi|\alpha|^2+\xi\alpha+\eta\alpha^*+f\alpha^2+g\alpha^{*2}) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2-4fg}}\exp\left(\frac{-\xi fg+\xi^2 g+\eta^2 f}{\xi^2-4fg}\right)。\tag{46}$$

(46)式积分收敛条件是

$$\operatorname{Re}(\xi+f+g)<0,\ \operatorname{Re}\left(\frac{\xi^2-4fg}{\xi+f+g}\right)<0,\ 或\ \operatorname{Re}(\xi-f-g)<0,\ \operatorname{Re}\left(\frac{\xi^2-4fg}{\xi-f-g}\right)<0。\tag{47}$$

因此由(46)式知，不同压缩参数的压缩态也可以形成完备集，即

$$\operatorname{ch}^{\frac{1}{2}}(r-r')\int \frac{d^2\alpha}{\pi}|\alpha, r\rangle\langle\alpha, r'| = 1。\tag{48}$$

显然当 $r=r'$ 时，(48)式还原为(42)式。令

$$\beta = \alpha^* \operatorname{sh} r + \alpha \operatorname{ch} r = x_1' + ix_2', \quad \alpha = x+iy, \tag{49}$$

则还可以进行如下正规乘积下的单重积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1'|\alpha, r\rangle\langle\alpha, r| = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1'|\beta\rangle\langle\beta| = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1' :\exp(-|\beta|^2+\beta b^+ + \beta^* b - b^+ b:$$
$$= \sqrt{2\pi}\exp[-(P'-\sqrt{2}x_2')^2], \tag{50}$$

其中 $P'=(b-b^+)/\sqrt{2}i$，(50)式最后一步用了指数算符的分解公式[8]。类似地，作以下积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_2'|\alpha, r\rangle\langle\alpha, r| = \sqrt{2\pi}\exp[-(Q'-\sqrt{2}x_2')^2], \quad Q'=(b+b^+)/\sqrt{2}。\tag{51}$$

考虑到

$$\left.\begin{aligned} &P'=(b-b^+)/\sqrt{2}i=P/\mu, \quad Q'=(b+b^+)/\sqrt{2}=\mu Q, \\ &x_1'=x_1(\operatorname{ch} r+\operatorname{sh} r)=e^r x_1=\mu x_1, \quad x_2'=e^{-r}x_2=(x_2/\mu)。\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

所以(50)与(51)式可分别改写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1|\alpha, r\rangle\langle\alpha, r| = (\sqrt{2\pi}/\mu)\exp[-(P-\sqrt{2}x_2)^2/\mu^2], \quad \alpha = x_1+ix_2, \tag{53}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_2|\alpha, r\rangle\langle\alpha, r| = \mu\sqrt{2\pi}\exp[-\mu^2(Q-\sqrt{2}x_1)^2]。\tag{54}$$

容易看出，从(53)或(54)式再积分一次都可得完备性(42)式。

四、压缩态和坐标本征态、动量本征态的关系

为了深入理解压缩态的性质特别是它与坐标、动量本征态的关系，我们通过(44)式，并利用 $\operatorname{sech}\lambda = 2\mu/(\mu^2+1)$，$\operatorname{th}\lambda=(\mu^2-1)/(\mu^2+1)$。计算如下积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_2|\alpha,\ r\rangle=\operatorname{sech}^{\frac{1}{2}} r \exp\left[\left(x_1a^+-\frac{x_1^2}{2}\right)(1+\operatorname{th}\lambda)-\frac{\operatorname{th}\lambda}{2}a^{+2}\right]$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \exp\left[-\frac{x_2^2}{2}(1-\operatorname{th}\lambda)+ix_2(x_1\operatorname{th}\lambda-a^+\operatorname{th}\lambda+a^+)\right]|0\rangle$$
$$=\sqrt{2\pi\mu}\exp\left[-\frac{a^{+2}}{2}+x_1a^+-\frac{(\mu^2+1)x_1^2}{4}\right]|0\rangle。\tag{55}$$

(55)式两边用消灭算符 a 作用并移项得

$$\frac{a+a^+}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} dx_2|\alpha,\ r\rangle=Q\int_{-\infty}^{\infty} dx_2|\alpha,\ r\rangle=\frac{x_1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} dx_2|\alpha,\ r\rangle。\tag{56}$$

可见态矢 $\int_{-\infty}^{\infty} dx_2|\alpha,\ r\rangle$ 是坐标 Q 的本征态，本征值为 $q=x_1/\sqrt{2}$，然而(56)式尚未归一化，可以证明

$$\frac{\exp(\mu^2x_1^2/4)}{\pi^{1/4}\sqrt{2\pi}\ \mu}\int_{-\infty}^{\infty} dx_2|\alpha,\ r\rangle=|q\rangle,\quad q=x_1/\sqrt{2},\quad \mu=e^r\tag{57}$$

是归一化的态矢。(57)式表明了压缩态与坐标本征态的转换关系，亦即指出为何由坐标测不准度比例于 e^{-r} 的压缩态过渡到坐标完全确定的态 $|q\rangle$。如果计算如下积分，则可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1|\alpha,\ r\rangle=\sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}\exp\left[\frac{a^{+2}}{2}+ix_2a^+-\frac{1+\mu^2}{4\mu^2}x_2^2\right]|0\rangle。\tag{58}$$

两边用 a 作用移项后得

$$P\int_{-\infty}^{\infty} dx_1|\alpha,\ r\rangle=(x_2/\sqrt{2})\int_{-\infty}^{\infty} dx_1|\alpha,\ r\rangle,\quad P=(a-a^+)/i\sqrt{2},\tag{59}$$

可见态矢 $\int_{-\infty}^{\infty} dx_1|\alpha,\ r\rangle$ 是动量算符的本征态，本征值为 $p=x_2/\sqrt{2}$，其归一化态矢为

$$|p\rangle=\frac{\sqrt{\mu}\exp(x_1^2/4\mu^2)}{\pi^{1/4}\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1|\alpha,\ r\rangle,\quad p=x_2/\sqrt{2},\quad \mu=e^r。\tag{60}$$

此即为动量本征态与压缩态的关系。它表明如何从动量测不准度比例于 e^r 的压缩态转换到动量完全确定的态。

五、压缩态的 Wigner 分布函数

Wigner 分布函数可写为

$$W=T_r[\rho\Delta(p,\ q)],\tag{61}$$

$$\Delta(p,\ q)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} du\,dv\exp[i(q-Q)v+(p-P)u],\tag{62}$$

其中 ρ 是指所描述系统的密度算符，而 $\Delta(p,\ q)$ 为 Wigner 算符。在文献[3]中我们已经导出 $\Delta(p,\ q)$ 的明显算符形式和正规乘积形式

$$\left.\begin{aligned}\Delta(p,\ q)&=\frac{1}{\pi}\exp(2\gamma a^+)\exp(i\pi N)\exp(2\gamma^*a)\exp(-2|\gamma|^2)\\&=\frac{1}{\pi}:\exp[-2(a^+-\gamma^*)(a-\gamma)]:\\\gamma&=(q+ip)/\sqrt{2},\end{aligned}\right\}\tag{63}$$

或相干态形式

$$\Delta(p,\ q)=\frac{1}{\pi}\int\frac{d^2z}{\pi}|\gamma+z\rangle\langle\gamma-z|\exp(\gamma z^*-z\gamma^*)。\tag{64}$$

当 ρ 取纯压缩态的密度算符时，压缩态的 Wigner 分布函数为 $W_s=\langle\alpha, r|\Delta(p, q)|\alpha, r\rangle$，利用(12)式有

$$S(r)\Delta(p, q)S^{-1}(r)=\Delta(q/\mu, \mu p), \tag{65}$$

又由 $D^+(\alpha)\Delta(p, q)D(\alpha)=\Delta(p+\alpha_1, q+\alpha_2)$，$\alpha=(\alpha_1+i\alpha_2)/\sqrt{2}$，可得出压缩态的 Wigner 分布函数

$$\begin{aligned}W_s&=\langle 0|S^{-1}(r)D^+(\alpha)\Delta(p, q)D(\alpha)S(r)|0\rangle=\langle 0|\Delta\left[\frac{q+\alpha_1}{\mu}, \mu(p+\alpha_2)\right]|0\rangle\\&=\langle 0|\frac{1}{\pi}\colon\exp\left\{-2\left[a^+-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{q+\alpha_1}{\mu}-i\mu(p+\alpha_2)\right)\right]\right.\\&\left.\quad\times\left[a-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{q+\alpha_1}{\mu}+i\mu(p+\alpha_2)\right)\right]\right\}\colon|0\rangle=\frac{1}{\pi}\exp\left\{-\left[\frac{(q+\alpha_1)^2}{\mu^2}+\mu^2(p+\alpha_2)^2\right]\right\}。\end{aligned}\tag{66}$$

可见压缩态的 Wigner 分布函数为正定的。因此在处理双光子过程时采用 Wigner 分布函数来替代失去意义的 P 是一种可能的途径。关于这个问题，我们将在别处另行讨论。

参 考 文 献

[1] R. E. Slusher, B. Yurke *et al.*; *J. O. S. A.* (*B*), 1984, **1**, No. 3 (Mar), 525.

[2] V. L. Mandel, E. Wolf; *«Coherence and Quantum Optics»*, (Plenum, New York, 1984).

[3] 范洪义，阮图南；《中国科学》A 辑，1984, No. 1 (Jan), 61.

[4] D. F. Walls; *Nature*, 1983, **306**, No. 5939 (Nov), 141.

[5] 范洪义等；(待发表)。

A new formalism of the squeeze operator and various representations and properties of the squeezed state

FAN HONGYI

(Department of Mordern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

GUO GUANGCAN

(Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei)

(Received 10 September 1984; revised 16 April 1985)

Abstract

A new formalism of the squeeze operator has been found by integration within normal ordered products. Based on this formalism, the essence of the formation of the squeezed state can be revealed directly and clearly. Various representations and properties of the squeezed state can be derived easily. It has been proved that the squeezed state is a coherent one in the quasiparticle space. The transformation relationship between squeezed states and eigenstates of both coordinate and momentum operators are presented. Also presented is the Wigner distribution function of the squeezed state.