

自由电子激光器中电子轨道的稳定性分析

王 元 殿

(中国科学院空间物理研究所)

提 要

本文分析了具有轴向磁场的自由电子激光器中电子轨道的稳定性问题,导出了作为稳定性判据的组合参数。从而为自由电子激光器的工作参数选择提供了某种依据。

一、引 言

为了抑制电子束在传播过程中的扩展,有时在自由电子激光器中引入轴向磁场。轴向磁场的引入使电子具有绕磁力线回旋的运动。这个运动同电子在横向摆动磁场中的运动相耦合,使横向速度调制和纵向速度调制具有很复杂的形态,其具体性质取决于实验参数的选择。一般说来,电子的平行速度在围绕一个平均值而振荡,有时振荡幅度还很大,平行速度的这种大幅度振荡会导致谱线的加宽和影响电子束的传播。事情还不仅如此,在某些特殊的参数空间范围,初始平行速度展宽很小的一群电子在进入作用区后平行速度就会很快弥散开来,导致很大的速度展宽。我们把这种情形称为电子轨道的不稳定。

电子轨道的稳定性问题有人已进行过分析。Friedland的分析^[1]比较简略,没有考虑电子的初始横向速度分散,他所采用的横向速度的表达式并不具有一般性。Freund和Drobot作了更为一般性的分析^[2],但由于数学上的繁杂没有给出简明的稳定性判据。本文采取某些合理的数学近似,导出一个组合参数,使稳定性的判断明显而简单。进一步阐述对电子轨道稳定性的物理本质,并对保证激光器正常工作的参数选择作了进一步的讨论。

二、电子轨道的稳定性分析

取轴向磁场的方向为 z 轴,则总的磁场可表示为

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k} - B_w (\mathbf{i} \cos k_0 z + \mathbf{j} \sin k_0 z), \quad (1)$$

其中 B_w 和 k_0 分别为摆动场的幅度和波数。电子的运动方程为

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}. \quad (2)$$

用 \mathbf{p} 标乘(2)式的两边可导出 $p = \text{常数}$ 。从而相对论因子 γ 保持不变。由(2)式还可以导出另外一个运动常数^[3],即所谓的纵向不变量

$$\left(\frac{k_0 v_z}{\omega_c} - 1 \right)^2 - \frac{2ck_0}{eB_0^2} m\gamma v_{\perp} B_w \cos \psi = \left(\frac{k_0 \mathcal{V}_z}{\omega_c} - 1 \right)^2, \quad (3)$$

其中 \mathcal{V}_z 为电子的初始纵向速度, $\omega_c = eB_0/(m\gamma c)$, m 为电子的静止质量, $\psi = \varphi - k_0 z + \pi$,其

中 φ 为 v_{\perp} 同 i 的夹角, 从而 ψ 代表 v_{\perp} 同 B_w 间的夹角。由于电子的总速度保持不变, 从而有 $v_z^2 = \mathcal{V}_z^2 + \mathcal{V}_{\perp}^2 - v_{\perp}^2$, 其中 \mathcal{V}_{\perp} 为初始横向速度, 注意到 $|\mathcal{V}_{\perp}^2 - v_{\perp}^2| \ll \mathcal{V}_z^2$, 则 $v_z \cong \mathcal{V}_z [1 + 1/2(\mathcal{V}_{\perp}^2 - v_{\perp}^2)/\mathcal{V}_z^2]$, 把这个关系式代入(3)式整理后可得

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_c}{4k_0\mathcal{V}_z} \frac{v_{\perp}^4}{\mathcal{V}_z^2} + \left(\frac{\omega_c}{k_0\mathcal{V}_z} - 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_c \mathcal{V}_{\perp}^2}{k_0 \mathcal{V}_z^3} \right) v_{\perp}^2 - 2 \frac{\omega_w}{k_0} v_{\perp} \cos \psi \\ & = \left(\frac{\omega_c}{k_0\mathcal{V}_z} - 1 - \frac{\omega_c}{4k_0\mathcal{V}_z} \frac{\mathcal{V}_{\perp}^2}{\mathcal{V}_z^2} \right) \mathcal{V}_{\perp}^2, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\omega_w = eB_w/(m\gamma c)$ 。为了讨论的方便我们把(2)式成分量的形式, 则有

$$dv_{\perp}/dt = -\omega_w v_z \sin \psi, \quad (5)$$

$$d\psi/dt = \omega_c - k_0 v_z - \omega_w (v_z/v_{\perp}) \cos \psi, \quad (6)$$

$$dv_z/dt = \omega_w v_{\perp} \sin \psi. \quad (7)$$

下面就非回旋共振和回旋共振两种情形分别加以讨论。

1. 非回旋共振的情形 ($\omega_c \neq k_0 \mathcal{V}_z$)

由于 $v_{\perp} \ll \mathcal{V}_z$, $\mathcal{V}_{\perp} \ll \mathcal{V}_z$, 当 ω_c 不接近 $k_0 \mathcal{V}_z$ 时, 比较(4)式各项的量级可将(4)式进一步简化为

$$[(\omega_c/k_0\mathcal{V}_z) - 1] v_{\perp}^2 - 2(\omega_w/k_0) v_{\perp} \cos \psi = [(\omega_c/k_0\mathcal{V}_z) - 1] \mathcal{V}_{\perp}^2. \quad (8)$$

将(7)式和(8)式结合, 并利用 $v_{\perp}^2 = v^2 - v_z^2$ 可得

$$(du/d\tau)^2 + (1-2\sigma)u^2 + \sigma u^4 - (1-\sigma+\delta) = 0, \quad (9)$$

其中 $u = v_z/\mathcal{V}_z$, $\tau = t\omega_w$, $\sigma = (\omega_c/k_0\mathcal{V}_z - 1)^2 \mathcal{V}_z^2 / (2\omega_w/k_0)^2$, $\delta = \mathcal{V}_{\perp}^2/\mathcal{V}_z^2 \ll 1$ 。

方程(9)有个简单的解释, $(du/d\tau)^2$ 可看作“粒子”的动能, $V(u) = (1-2\sigma)u^2 + \sigma u^4 - (1-\sigma+\delta)$ 可看作“粒子”的势能, 则(9)式只是简单地表明总能量是守恒的, 其值为零。下面我们仅分析 $V(u)$ 的特征以了解“粒子”的运动性质, 这实际是一种相空间的分析办法。

$V(u)$ 可能有四个不同的实根, 一对实根、一对共轭复根, 和三个实根三种情形。第三种情形意味着一对实根合并为一个。我们暂时忽略小量 δ , 通过简单的判断就可知道, 当 $\sigma > 1$ 时, 有四个不同的实根; 当 $\sigma < 1$ 时, 有一对实根和一对共轭复根; 当 $\sigma = 1$ 时, 有三个不同的实根。这三种情形所对应的势能曲线 $V(u)$ 如图 1 所示。由(9)式可以看出, 只有 $V(u) \leq 0$ 是可能的运动区, 因为 $(du/d\tau)^2 \geq 0$ 。这时有两个隔离开来的运动区, 我们假定电子的初始速度 $\mathcal{V}_z > 0$, 则电子只能处于图中画有斜线的运动区内。显然纵向速度 u 的变化范围为 $u_1 \sim u_2$, 围绕平衡点 u_0 而振荡。由于两个运动区之间存在一个势垒, 电子不可能从一个运动区进到另一个运动区。让 σ 逐渐减小, 看 $V(u)$ 曲线如何演化。首先, u 的变化范围越来越大, 即 u_1 逐渐减小, 从而 u 的振荡幅度越来越大。其次, 两个运动区之间的势垒越来越低, 当 $\sigma = 1$ 时势垒完全消失, 两个运动区开始连通起来。 $\sigma = 1$ 对应一个临界状态, 当 σ 略大于 1 时电子只能在一个运动区运动, u 的振荡范围大约为 $0 \sim 1$ 。而当 σ 略小于 1 时, 电子可在两个运动区构成的整个连通区内运动, u 的振荡范围大约为 $-1 \sim 1$ 。设想一个电子的 $\sigma \cong 1$, 当受到某种扰动后, 电子的运动可能从 $\sigma > 1$ 的状态跳到 $\sigma < 1$ 的状态, 或者相反。其结果会导致振荡幅度的很大改变。如果电子束在 $\sigma \cong 1$ 的条件注入, 由于电子束有一个小的初始平行速度展宽, 这相当于 σ 有个小的展宽范围, 从而有些电子的 σ 略大于 1, 有些电子的 σ 略小于 1。由于两者的振荡幅度差别很大, 因此在进入作用区后, 纵向速度就很快弥散开来, 而且分散很大。这就是为什么把这种轨道称做不稳定轨道的理由。所以我们得到一个

结论, $\sigma=1$ 所对应的轨道是不稳定的。 σ 继续减小时, $V(u)$ 只有两个实根, 从严格的意义上讲, 这时轨道是稳定的, 但 u 的振荡幅度比较大。

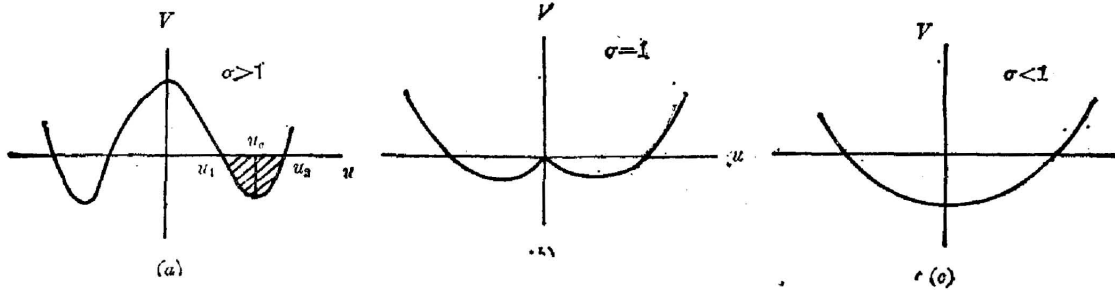


图 1 以 σ 为参变量的势能曲线 $V(u)$
 Fig. 1 Potential $V(u)$ with σ as parameter

在上面的分析中, 忽略了电子初始横向速度的影响。如果考虑到 δ , 则可知 $\sigma=1+\delta$ 对应不稳定轨道。可见初始横向速度有导致不稳定的倾向。

v_z 之所以能够振荡, 其物理图像是很清楚的, 这就是在轴向电子受到一个洛伦兹力的作用, $F_z = -(e\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}_w)/c$ 。从(7)式可以看出, 这个力的大小和方向是由 \mathbf{v}_\perp 和 \mathbf{B}_w 之间的夹角所决定的。 ψ 的周期性变化就导致电子在轴向的周期性加速和减速, 即 v_z 围绕一个平均值而振荡。而 ψ 的变化受激光器的工作参数所决定 ($B_0, B_w, k_0, \mathcal{V}_z$ 等)。与无轴向磁场的情形不同, 这时电子的回旋运动受 \mathbf{B}_0 和 \mathbf{B}_w 二者的共同控制, 一般说来, 电子不可能与 \mathbf{B}_w 准确的同步。这点在无轴向磁场的自由电子激光器中很容易实现, 只是电子的初始横向速度很小, 进入作用区后就有 $\mathbf{p}_\perp = e\mathbf{B}_w/c k_0$, 即 $\mathbf{v}_\perp \parallel \mathbf{B}_w$, 且大小不变。而在有轴向磁场的情形, 不仅 \mathbf{v}_\perp 同 \mathbf{B}_w 的夹角 ψ 在周期性地变化, v_\perp 的大小也在周期性地改变。至于说为什么 $\sigma=1$ 所对应的轨道是不稳定的, 只要把(5)、(7)和(8)式结合起来分析就可以得到结论。容易看出, 当 $\sigma < 1$ 时电子可以得到大的加速和减速, 这个过程会导致 v_z 符号的改变, 从而 v_z 的振荡幅度较大, 而当 $\sigma > 1$ 时, 振荡幅度要小得多, $\sigma=1$ 刚好对应两种情况的过渡。

2. 回旋共振的情形 ($\omega_c = k_0 \mathcal{V}_z$)

此时把(3)式与(7)式结合, 消去 v_\perp 和 ψ 得到只含未知函数 v_z 的方程

$$\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{B_0}{2B_w}\right)^2 \eta^4 + (\eta+1)^2 - A^2 = 0, \tag{10}$$

式中 $\eta = (k_0 v_z / \omega_c - 1)$, $A = k_0 v / \omega_c$, v 为电子的速度大小。设电子的初始横向速度 \mathcal{V}_\perp 很小, 则 $v \cong \mathcal{V}_z$, 按照回旋共振的条件 $A \cong k_0 \mathcal{V}_z / \omega_c = 1$ 。如把方程写成形式 $(d\eta/d\tau)^2 + V(\eta) = 0$, 这时“势能”

$$V(\eta) = \left(\frac{B_0}{2B_w}\right)^2 \eta^4 + \eta^2 + 2\eta. \tag{11}$$

$V(\eta)$ 的曲线如图 2 所示, 它只可能有两个实根。所以, 在上述的假定条件之下并不存在轨道的不稳定问题。但纵向速度 \mathcal{V}_z 的振荡幅度取决于 (B_0/B_w) 。当这个比大的时候, 振荡幅度小一些。

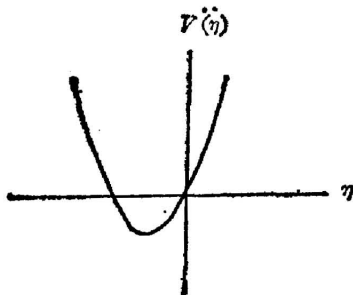


图 2 $\omega_c = k_0 \mathcal{V}_z$ 时的势能曲线 $V(\eta)$
 Fig. 2 Potential $V(\eta)$ when $\omega_c = k_0 \mathcal{V}_z$

三、结 论

通过上面的讨论可以得到下面几点结论。

1. 对于非回旋共振的工作方式 ($\omega_c \neq k_0 v_z$), $(\omega_c - k_0 v_z)^2 / (2\omega_w)^2 = 1$ 所对应的轨道是不稳定的。电子束的注入条件应该避开这点附近。

2. 对于回旋共振的工作方式 ($\omega_c = k_0 v_z$), 如果电子束的初始横向速度很小, 则不存在轨道不稳定的问题。但 (B_w/B_0) 取得小一些, 可使 v_z 的振荡幅度小一些。但 (B_w/B_0) 的取值还受到因素的控制(如增益效率等), 应权衡各种因素而决定其大小。

最后需要指出, 就一般说来, v_z 的振荡幅度很大这种情况是不希望的。但是这种振荡对电子束来说不是随机的, 而是集体性质的。它对激光器的增益和效率的影响还不清楚, 因为鉴于其复杂性, 理论上还很少有人分析过。到目前为止理论分析的人大都取方程组 (5)~(7) 的奇解 $\varphi=0$, $v_z = \text{constant}$, $v_\perp = \omega_w v_z / (\omega_c - k_0 v_z)$ 作为电子的未扰轨道。或者象 McMullin 和 Davidson 那样, 认为 v_z 围绕平衡点作小幅度的振荡是简谐振荡近似^[4]。

参 考 文 献

- [1] L. Friedland; *Phys. Fluids*, 1980, **23**, No. 12 (Dec), 2376.
- [2] H. P. Freund, A. T. Drobot; *Phys. Fluids*, 1982, **25**, No. 4 (Apr), 736.
- [3] R. C. Davidson, H. S. Uhm; *J. Appl. Phys.*, 1982, **53**, No. 4 (Apr), 2910.
- [4] W. A. McMullin, R. C. Davidson; *Phys. Rev. (A)*, 1982, **25**, No. 6 (Jun), 3130.

Stability analysis of electron trajectories in free-electron lasers with an axial magnetic field

WANG YUANDIAN

(Institute of Space Physics, Academia Sinica)

(Received 18 August 1984; revised 7 February 1985)

Abstract

Stability of electron trajectories in free-electron lasers with an axial magnetic field is analysed in this paper. The results show that in the case of non-cyclotron-resonance ($\omega_c \neq k_0 v_z$), the trajectories are instable if the condition $(\omega_c - k_0 v_z) / (2\omega_w)^2 = 1$ is satisfied, while in the case of cyclotron-resonance ($\omega_c = k_0 v_z$), the trajectories are always stable if the initial perpendicular velocities of electrons are small. On the other hand, oscillation amplitudes of the parallel velocities of electrons depend on the ratio B_w/B_0 . The smaller the ratio, the smaller the oscillation amplitudes.